

適應 境界要素法을 利用한 2次元 靜磁界 解析

2-D Magnetostatic Field Analysis Using Adaptive Boundary Element Method

高 彰 變* · 鄭 炫 教** · 韓 松 曄***
 (Chang-Seop Koh · Hyun-Kyo Jung · Song-Yop Hahn)

Abstract- Adaptive mesh refinement scheme is incorporated with the boundary element analysis in order to get accurate solution with relatively fewer unknowns for magnetostatic field analysis. A new and simple posteriori local error estimate is also presented. The local error is defined as an integration over the element of the difference between solutions from quadratic interpolation functions and linear interpolation functions and is used as the criterion for mesh refinement. Case study with a singular point reveals that adaptive meshes are more efficient in accuracy of solutions than uniform meshes generated by dividing all the elements evenly. The adaptive meshes give much better rate of convergence in global errors than the uniform meshes.

1. 序 論

電氣工學의 諸般問題에 電磁界 解析을 위하여 有限要素法이 導入된 이래, 각종 電氣機器들의 特性을 解析하고, 設計하는데 커다란 發展이 있었다. 특히 近來에 들어서는 自動要素分割과 適應要素分割에 대한 研究가 成功的으로 進行되어[1, 2, 3] 實際의 工學問題解析에 適用하기가 매우 容易해졌다. 그러나 有限要素法은 開領域 모델 解析時와 같이 解析領域과 境界條件의 人爲的인 設定이 必要한 경우, 解의 正確度에 관한 問題가 發生한

다. 한편, 境界要素法은 解析領域의 境界만을 離散化하기 때문에 要素分割이 比較的 容易하고, 解析領域의 人爲的인 設定으로 인한 誤差를 隨伴하지 않으며 解析에 필요한 未知 變數를 줄일 수 있어 最近들어 이에 대한 研究가 널리 進行中이다 [4, 5, 6].

境界要素法이 갖는 短點으로는, 最終的으로 얻어지는 시스템 行列 方程式의 係數行列이 非對稱이며, 요소가 거의 平方 行列이기 때문에 行列方程式을 푸는데 많은 勞力이 들고 係數行列의 組立時 數值積分過程에서 比較的 많은 時間이 걸린다는 것이다. 이러한 問題點은 要素數가 增加함에 따라 더욱 심각해진다[6]. 따라서, 境界要素法이 實際의 工學問題에 쉽게 適用되기 위하여는 要素의 數를 効率의으로 적게하여 行列方程式의 係數行列의 次數를 낮추는 동시에 解의 精度를 높여야

*正 會 員 : 서울大 工大 電氣工學科 博士課程
 **正 會 員 : 江原大 工大 電氣工學科 副教授 · 工博
 ***正 會 員 : 서울大 工大 電氣工學科 教授 · 工博
 接受 日: 1990年 7月 19日
 1 次 修 正 : 1991年 1月 28日
 2 次 修 正 : 1991年 2月 3日

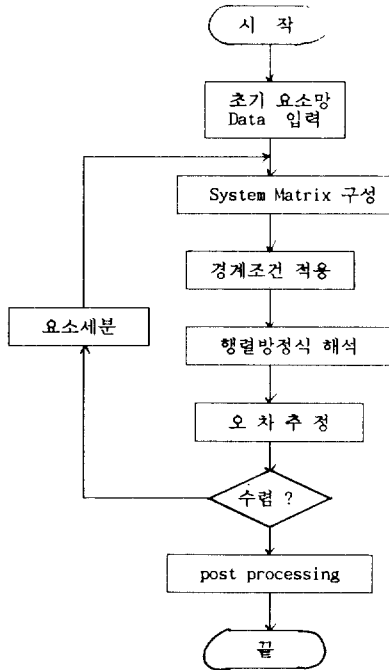


그림 1 경계요소법의 적용과정
 Fig. 1 Flow chart of Adaptive Boundary Element Methods

한다.
 본 논문에서는 이러한 문제점을 해결하기 위하여適應境界要素法[7, 8, 9, 10]을導入하였다.適應境界要素法の適用過程은 그림 1에 나타낸 바와 같이 시스템 行列方程式의 組立 및 解析, 各要素別 部分誤差의 推定, 그리고 要素 再分割 過程으로 構成된다. 이때, 最適 要素網의 형성 및 適應境界要素法 전체의 效率에 가장 큰 영향을 주는 過程은 要素別 部分誤差의 推定過程이다. 이에 대한 論文이 이미 수 篇 發表되어 있으나[7, 8, 9, 10] 이들 方法에서는 推定誤差를 計算하는데 시간이 많이 걸리고 解析領域이 單一媒質로 構成되어 있는 경우만을 다루었기 때문에 實際의 工學 모델을 解析하는데 適用하기는 不適合하다. 따라서, 本 論文에서는 推定誤差 計算時間이 짧고 解析領域이 多媒質로 構成된 경우에도 適用될 수 있는 새로운 誤差 推定法을 提示하고 영역내에 特異點이 존재하는 경우와 철이 존재하는 경우에 適用하여 그 妥當性을 檢討하였다.

2. 境界要素 方程式의 正式化

靜磁界 問題 解析時 그림 2와 같이 주어지는 解析 모델에 대하여 媒質이 線形, 等方性이고 解析變數가 磁氣벡터 포텐셜 A 이면 支配方程式과 境界條件은 다음과 같이 주어진다[11].

$$\frac{1}{\mu_1} \nabla^2 A_1(\vec{r}) = 0, \vec{r} \in R_1 \quad (1-a)$$

$$\frac{1}{\mu_2} \nabla^2 A_2(\vec{r}) = -j, \vec{r} \in R_2 \quad (1-b)$$

$$A_1(\vec{r}) = C_1, \vec{r} \in \Gamma_d \quad (2-a)$$

$$A_2(\vec{r}) = C_2, \vec{r} \in \Gamma_{2d} \quad (2-b)$$

$$\frac{\partial A_1(\vec{r})}{\partial n} = \frac{\partial A_2(\vec{r})}{\partial n} = 0, \vec{r} \in \Gamma_{1n} \cup \Gamma_{2n} \quad (2-c)$$

$$H_{1t}(\vec{r}) = H_{2t}(\vec{r}), \vec{r} \in \Gamma_{12} \quad (2-d)$$

$$B_{1n}(\vec{r}) = B_{2n}(\vec{r}), \vec{r} \in \Gamma_{12} \quad (2-e)$$

여기서, $A_i(\vec{r}) = A_{iz}(\vec{r})$; A_i 의 Z -成分

μ_1, μ_2 : 領域 1, 2의 誘磁率 [H/m]

j : 電流密度 [A/m^2]

\vec{n} : 單位 外向 法線 벡터

$\frac{\partial A_i}{\partial n}$: 磁氣 벡터 포텐셜의 法線 微分値

H_{it} : 磁界의 세기의 接線 成分

B_{in} : 磁束 密度의 法線 成分

媒質의 境界面에서 H 와 B 의 連續條件인 式 (2-d), (2-e)는 磁氣 벡터 포텐셜 $A_i(\vec{r})$ 로 나타내면

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_1(\vec{r})}{\partial n} = \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_2(\vec{r})}{\partial n}, \vec{r} \in \Gamma_{12} \quad (3-a)$$

$$A_1(\vec{r}) = A_2(\vec{r}), \vec{r} \in \Gamma_{12} \quad (3-b)$$

이 된다. 그린의 定理를 이용하여 境界積分方程式을 誘導하고 式(3)을 代入하면 各 領域의 境界에 대하여 다음과 같이 얻어진다[4].

1) $\vec{r} \in \Gamma_1$ 일때

$$C_1(\vec{r})A(\vec{r}) + \int_{\Gamma_1} [A(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n}]$$

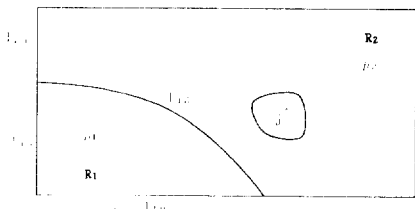


그림 2 정자계 해석 모델
 Fig. 2 Magnetostatic Model

$$\begin{aligned}
 & -G'(\vec{r}, \vec{r}')q(\vec{r}')d\Gamma \\
 & + \int_{\Gamma_{12}} \left[A(\vec{r}') \frac{\partial G'(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\mu} G'(\vec{r}, \vec{r}')q(\vec{r}') \right] d\Gamma = 0
 \end{aligned} \tag{4-a}$$

2) $\vec{r} \in \Gamma_2$ 일 때

$$\begin{aligned}
 C_2(\vec{r})A(\vec{r}) + \int_{\Gamma_1 + \Gamma_{12}} \left[A(\vec{r}') \frac{\partial G'(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} \right. \\
 \left. - G'(\vec{r}, \vec{r}')q(\vec{r}') \right] d\Gamma \\
 = \mu_2 \int_{R_s} JG'(\vec{r}, \vec{r}') dR
 \end{aligned} \tag{4-b}$$

3) $r \in \Gamma_{12}$ 일 때

$$\begin{aligned}
 C_1(\vec{r})A(\vec{r}) + \int_{\Gamma_1} \left[A(\vec{r}') \frac{\partial G'(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} \right. \\
 \left. - G'(\vec{r}, \vec{r}')q(\vec{r}') \right] d\Gamma \\
 + \int_{\Gamma_{12}} \left[A(\vec{r}') \frac{\partial G'(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} \right. \\
 \left. + \frac{1}{\mu} G'(\vec{r}, \vec{r}')q(\vec{r}') \right] d\Gamma = 0 \tag{4-c} \\
 C_2(\vec{r})A(\vec{r}) + \int_{\Gamma_2 + \Gamma_{12}} \left[A(\vec{r}') \frac{\partial G'(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} \right. \\
 \left. - G'(\vec{r}, \vec{r}')q(\vec{r}') \right] d\Gamma \\
 = \mu_2 \int_{R_s} JG'(\vec{r}, \vec{r}') dB
 \end{aligned} \tag{4-d}$$

여기서

$$G'(\vec{r}, \vec{r}') = \ln |\vec{r} - \vec{r}'| \tag{5-a}$$

$$\frac{\partial G'(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} = - \frac{(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \tag{5-b}$$

$$\mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

r, \vec{r}' : 각각 觀測點과 磁界源이 存在하는 點

$$\vec{a}(r) = \frac{\partial A(\vec{r})}{\partial n}$$

$$\Gamma_i = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{ia}$$

R_s : 電流 領域

$C_i(\vec{r})$; 境界點 \vec{r} 에서의 內部角에 의하여 決定되는 常數[6]

式(4)를 그림 3에서와 같이 磁氣 벡터 포텐셜 A에 대하여는 2次 要素를, 磁氣 벡터 포텐셜의 法線 微分値 q에 대하여는 2개의 常數 要素를 사용하여 離散化하고 각 要素의 중심에서 離散化한 式이 성립한다고 하면

$$[A][X] = [B] \tag{6}$$

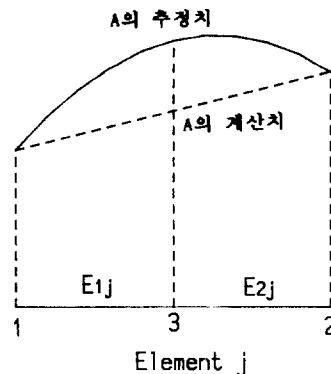


그림 3 A 및 q의 계산치와 추정치
Fig. 3 Calculated and estimated values of A and q

형태의 行列方程式을 얻게 되며[4, 12], 境界條件式(2-a), (2-b), (2-c)을 代入하면 最終的인 行列方程式을 얻게 된다. 이때 式(4-b)의 電流를 포함하는 項은 電流領域을 三角形 小領域으로 分割하고, 각 要素에서 J_s 가 一定한 것으로 보아 離散化한다[4]. 行列方程式의 解法으로는 가우스 消去法을 使用한다.

3. 誤差의 定義 및 推定

領域內的 임의의 점에서 磁氣 벡터 포텐셜 A는 境界에서의 A 및 q의 境界積分으로 구해지므로, 境界에서의 A 및 q를 精確하게 計算하는 것이 重要하다. 따라서, 要素細分을 위한 誤差는 解析變數 A 및 q의 誤差로서 構成된다.

全體誤差는 다음과 같이 定義된다.

$$\|e\| = \left(\sum_{i=1}^N e_i^2 \right)^{1/2} \quad (7)$$

$$e_i = \int_{\Gamma_i} \{ |A_{cat} - A_{exc}|^2 + |q_{cat} - q_{exc}|^2 \} d\Gamma \quad (8)$$

여기서,

N : 全體要素數,

A_{cat}, A_{exc} : 磁氣 벡터 포텐셜의 計算解와 이론해.

q_{cat}, q_{exc} : 磁氣 벡터 포텐셜의 法線 微分値의 計算解와 이론해.

部分誤差 e_i 는 각 要素마다 計算하여 要素細分時 細分度의 指標가 되도록 한다. 그러나 實際問題 解析에서는 式(8)의 이론해 A_{exc} 와 q_{exc} 를 알 수 없으므로, 反復計算時 얻어지는 情報로부터 推定하게 된다. 따라서 推定된 部分誤差 e_i 는 다음과 같이 된다.

$$e_i = \int_{\Gamma_i} \{ |A_{cat} - A_{est}|^2 + |q_{cat} - q_{est}|^2 \} d\Gamma \quad (9)$$

여기서,

A_{est}, q_{est} : A_{exc} 및 q_{exc} 의 推定解

그림 3-a)는 磁氣 벡터 포텐셜에 대하여 3개의 節點(1, 3, 2)으로 構成되는 2次 要素를 사용하여 얻은 解와 2개의 節點(1, 2)만으로 構成되는 1次 要素를 사용하여 얻은 解를 比較한 것으로, 2次 要素를 사용하여 얻은 解가 훨씬 더 精確함을 알 수 있다. 이것은 2次 要素를 사용한 경우가 節點數가 2배 가량 많고, 또한 同一한 節點數에서도 2次 補間 函數를 사용하여 얻은 解가 1次 補間 函數를 사용하여 얻은 解보다 精確하기 때문이다.

[3] 따라서, 2次 要素를 사용하여 얻은 結果를 이론해의 推定値로 하고 1次 要素로부터 얻은 結果를 計算値로 할 수 있다. 그러나, 이들 두가지 경우를 모두 풀어서 解를 比較하는 것은 計算時間 및 컴퓨터 記憶容量이 늘어나 非能率의이며, 더우기 節點 1, 2에만 局限하면 1次 및 2次 要素로부터 구한 解가 거의 비슷하므로[3], 2次 要素를 사용하여 얻은 結果 중 節點 1, 2에서의 값만을 택하여 1次函數로 補間한 結果를 計算値로 貸身하였다. 따라서, 磁氣 벡터 포텐셜에 대한 部分誤差는 그림 3-a)의 實線과 點線으로 둘러싸인 部分의 面積이 된다. 磁氣 벡터 포텐셜의 法線 微分値 q 에 대하여는 그림 3-b)에서와 같이 要素 j 를 2개의

小要素(E_{1j}, E_{2j})로 나누고 각 小要素에 대하여 常數函數로 近似化하여 구한 解($q(E_{1j}), q(E_{2j})$)를 推定値(q_{est})로 하고 $q(E_{1j})$ 와 $q(E_{2j})$ 의 平均値를 計算値(q_{cat})로 하여 式(9)로부터 q 의 部分誤差를 計算하였다.

要素細分은 각 要素別 部分誤差의 정도에 따라 1~4개의 要素로 細分하였으며, 이때 細分 方法으로는 二分法[2]을 使用하였다.

4. 事例研究

本 論文에서 提示한 誤差 推定法의 妥當性을 檢討하기 위하여 固定境界條件과 自然境界條件을 갖는 2次元 라플라스 方程式의 境界要素 解析에 適用하여 보았다. 適用 모델의 解析領域과 境界는 그림 4와 같으며, 領域內에서의 磁氣 벡터 포텐셜에 대한 이론해가

$$A(\vec{r}) = A(r, \theta) = r^{1/2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (10)$$

이 되도록, 境界 $\partial\Omega_1$ 에는 式(10)에서 計算된 값을 固定境界條件으로 주었고, $\partial\Omega_2$ 에서는

$$\frac{\partial A(\vec{r})}{\partial n} = 0, \vec{r} \in \partial\Omega_2 \quad (11)$$

인 自然境界條件을 주었다. 본 적용모델은 解析領域 內에 磁束密度 B 에 대한 特異點이 存在하여 要素分割이 매우 힘든 경우이다.

初期 要素網과 이때 計算된 磁束分布, 그리고 本 論文에서 提示한 適應境界 要素法을 適用하여 發生된 要素網과 여기서 計算된 磁束分布를 그림 5에 나타내었다. 그림 5-a)에서 보듯이 初期 要素網은 磁氣 벡터 포텐셜 A 에 대하여는 11개의 2次 要素로, 磁氣 벡터 포텐셜의 法線 微分値 q 에 대하여

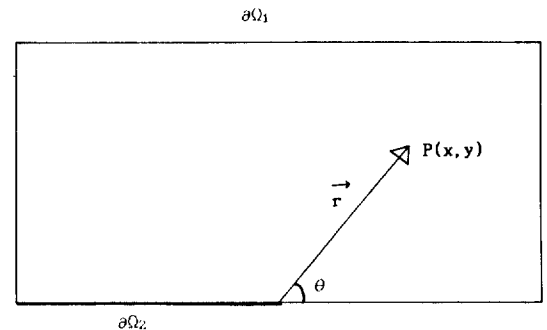
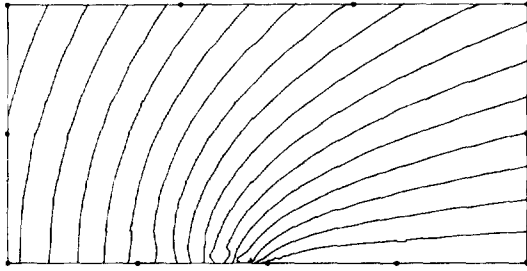
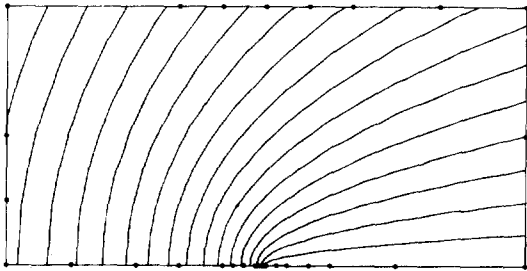


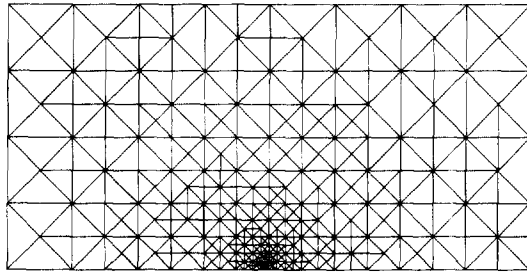
그림 4 해석적인 해를 갖는 적용모델
Fig. 4 Model with Analytic solutions



a) 초기요소망 (Unknowns = 44)



b) 최종결과 (Unknowns = 136)



c) 저속 분포를 그리기 위한 요소망

그림 5 적응 요소분할 과정 및 저속분포
Fig. 5 Adaptive mesh generation procedure and calculated flux lines

여는 22개의 常數要素로 構成되어 있으며, 5-b)에서 보면 예상대로 特異點 附近에서 要素細分이 많 이 進行되며 이에 따라 磁束線이 매끈해짐을 알 수 있다. 그림 5-c)는 領域內에서 磁束分布를 그리기 위한 要素網이다.

그림 6은 適應 要素 分割한 경우와 均等 要素 分割한 경우의 推定 誤差曲線을 나타낸 것으로서, 全體 誤差 $\|e\|$ 가 節點數가 增加함에 따라 減少하는 過程을 보여준다. 그림에서 均等 要素 分割한 경우보다 適應 要素 分割한 경우가 誤差 減少率이 顯著하게 큰을 알 수 있다. 그림 7은 그림 5-c)의

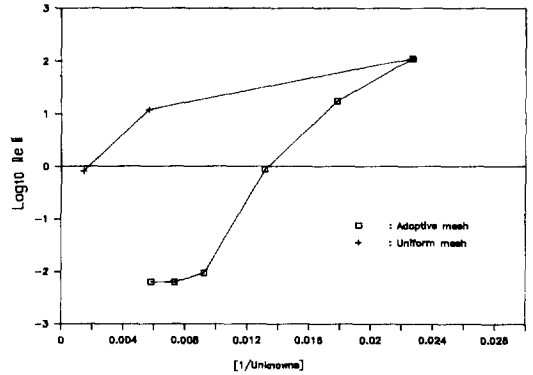


그림 6 전체오차의 수렴비 특성
Fig. 6 The rate of convergence of global error.

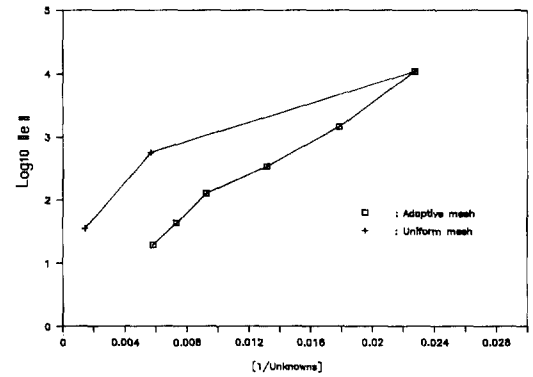


그림 7 영역내에서 계산해의 수렴과정
Fig. 7 Convergence of calculated solutions in region

節點들에서 計算된 磁氣 벡터 포텐셜 값이 이론해에 收斂하는 過程을 適應 要素分割한 경우와 均等 要素 分割한 경우에 대하여 比較한 것으로 誤差는

$$\|e\| = \sum_{j=1}^M [A_c - A_e]_j^2 \quad (12)$$

여기서, A_c : 境界要素法으로 計算된 解
 A_e : 이론해
 M : 全體 節點數

이며, 適應要素分割을 이용하면 比較的 적은 數의 未知數에서 훨씬 정확한 解을 얻을 수 있음을 알 수 있다.

그림 8은 본 알고리즘을 均等 磁界 內에 四角形 鐵 ($\mu_r=500$)이 놓인 모델에 適用한 경우로서 모델의 對稱性을 利用하여 第1象限에 該當하는 領域만을 解析한 경우이다. 豫測되는 바와같이 鐵의 모

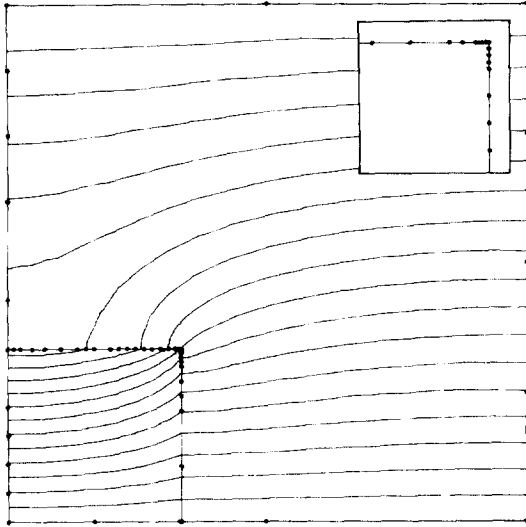


그림 8 균등 자기내에 철이 있는 경우의 해석모델
Fig. 8 Model with iron in the uniform field

서리 부분에 磁束이 集中되었고 그 部分의 要素가 細分됨을 알 수 있으며, 모서리 부분을 30배 확대한 그림을 그림 8의 내부에 나타내었다. 또한, 鐵의 윗면은 磁束의 變化가 심한 部分으로 要素가 細分됨을 알 수 있다.

5. 結 論

本 研究에서는 適應 境界 要素法을 使用하여 2次元 靜磁界 問題를 解析하는 경우를 다루었으며, 이때 必要한 새로운 部分 誤差 推定法을 提示하였다.

本 알고리즘을 解析領域내에 特異點이 存在하여 要素 分割이 힘든 경우와 均等 磁界 내에 四角形 鐵이 存在하는 모델에 適用하여 本 結果, 本 論文에서 提示한 適應 要素 分割法이 要素를 均等하게 再分割하는 경우보다 같은 數의 未知數에서 解의 正確度에 있어 훨씬 有利함을 알았다. 또한 提示한 部分誤差 推定法의 妥當性도 立證하였다.

本 論文에서 提示한 誤差推定法은 從前의 方法보다 그 理論 및 適用過程이 매우 간단하고 一般的이어서 전체 解析過程中 誤差推定에 所要되는 時間은 無視될 精度이고, 포물선 및 쌍곡선 形態의 方程式을 푸는 경우에도 쉽게 應用될 수 있을 것이다.

본 연구는 1990년도 한국과학재단 목적기초 연구비 지원에 의하여 이루어 졌음을 알려드립니다.

참 고 문 헌

- [1] J. Cendes, D.N. Shenfou, "Adaptive mesh refinement in the finite element computation of Magnetic field", IEEE, Trans. on Mag. Vol. MAG-21, No. 5, pp. 1811~1816, Sept. 1985.
- [2] Song-yop Hahn, C. Calmels, G. Meunier, J.L. Coulomb, "A posteriori Error Estimate for Adaptive Finite Element Mesh Generation", IEEE. Trans. on Mag. Vol. MAG-24, No. 1, pp. 315~317, 1988.
- [3] 최홍순, 적응요소분할을 위한 오차추정에 관한연구, 석사학위논문, 서울대학교, 1986.
- [4] Brebbia C.A., The Boundary Element Method for Engineers, John Wiley & Sons Inc., New York, 1978.
- [5] Brebbia C.A., Topics in Boundary Element Research, Vol. 6, Springer-Verlay, New York, 1989.
- [6] Sompoth Peaiyound, Computational Aspects of the Boundary Element Method Applied to Two-and Three-Dimensional Magnetic Field Problems, PHD Dissertation, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York, October 1987.
- [7] E. Alarcon, A. Peverter, "p-Adaptive Boundary Elements", Int. Journal for Numerical Method in Eng., Vol. 23, pp. 801~829, 1986.
- [8] ERNST RANK, "Adaptive h-, p- and hp-Versions for Boundary Integral Element Method", Int. Journal for Numerical Method in Eng., Vol. 28, pp. 1355~1349, 1989.
- [9] D.K. Park, S.Y. Lee, J.W. Ra, "Adaptive Mesh Refinement for Boundary Element Method and its Application to stripline Analysis", COMPUMAG, Tokyo, pp. 201~204, 1989.
- [10] T. Takeda, T. Kuwahara, T. Miyata and M. Igarashi, "An Error Estimation of the Solu-

tion of Integral Equation Method”,
COMPUMAG, Tokyo, pp. 467~470, 1989.

[11] J.D. Jackson, Classical Electrodynamics, 2'nd

Edition, Korean Student Edition, 연합출판.

[12] 임달호, 김찬오, “FEM과 BEM의 혼합적용
에 의한 정상자계의 해석에 관한 연구”, 전
기학회 논문지, Vol. 34, No. 7, 1985.