

## 초등급수 전개에 의한 유행병 모델의 해법에 관한 연구

정형환\* · 주수원\* · 김해재\* · 이광우\*\*

=Abstract=

### A Study on the Solution of the Epidemic Model Using Elementary Series Expansions

Hyeng-Hwan Chong\*, Soo-Won Joo\*, Hae-Jae Kim\*, Kwang-Woo Lee\*\*

A solution for the course of the general deterministic epidemic model is obtained by elementary series expansion.

This is valid over all times, and appears to hold accurately over a very wide range of population and threshold parameter values.

This algorithm can be more efficient than either numerical or recursive procedures in terms of the number of operations required to evaluate a sequence of points along the course of the epidemic.

#### 1. 서 론

인구집단의 건강, 질병문제를 해결하기 위해서 전염병의 수학적 모델 구성 및 해석상의 문제는 오래전부터 중요시되었다.

Kermack가 처음으로 유행병의 유포상태를 나타내는 결정론적 모델을 나타냈으며<sup>[2]</sup>, 그 후 본격적인 발전을 하게 된 것은 Bartlett가 실질적인 분포를 얻는데 가장 적합한 통계적 모델을 제시한 때

부터이다<sup>[3]</sup>.

그후 Luding에 의해 출생, 사망 과정의 문제로서 감염자 수를 아는 근사확률 모델이 제시되고, Thime에 의해 감염될 가능자와 사망자의 변수로서 접근방법(asymptotic methods)이 계속하여 연구되었다<sup>[4][5]</sup>.

결정론적 모델에 관한 유행과정을 규정하기 위해 Bailey가 연구에 몰두하였고<sup>[6]</sup>, Kendall은 절대적분방식으로 실질적인 반응을 설명하고 있다<sup>[7]</sup>. 그러나 어느 것이든 유행과정 표현에는 어려움이 있었다.

그래서 본 논문에서는 초등급수 전개를 이용하여 일반적인 결정론적 모델에 대한 해를 구하였는데 만족스러웠다.

\*동아대학교 공과대학 전기공학과  
Dept. of Electrical Eng., Dong-A University

\*\*부산외국어대학 전산학과  
Dept. of Computer Eng., Busan College of Foreign Studies  
(본 연구는 90년도 한국과학재단 지원 연구비에 의하여 이루어졌음)

## 2. 초등급수 전개에 의한 결정론적 모델의 해석

한 감염자가 다른 사람을 감염시킬 수 있을만한 효과적인 평균 접촉률(contract rate)  $\beta$ 에 의해서 시간척도(time scale)  $\tau = \beta t$ 로 변화시킨 후, 일반적으로 표준 유행병 모델 형태는 식(2-1)과 같다.

$$\frac{dx}{d\tau} = xy - \theta x, \quad \frac{dy}{d\tau} = -xy \quad (2-1)$$

여기서  $x(\tau)$ 는  $\tau$ 시간에서 감염자 집단(the population fraction of infectives)의 상대확률이고,  $y(\tau)$ 는 감염 가능자(susceptibles)에 해당된다. 이때 각각의 초기치를  $x_0$  혹은  $y_0$ 이라 한다. 그리고  $\theta$ 는 연구 대상으로 분류한 인구집단 사이의 상대적인 이동율(relative removal rate)이다.

식(2-1)에서  $y$ 가  $\theta$ 와 같을 때  $x(\tau)$ 는 최대치임을 알 수 있다.

이동상수(the constant of motion)  $\alpha$ 를 구하기 위해서, 식(2-1)의 첫번째 식에 두번째 식으로 나누어서 적분하면 식(2-2)와 같이 된다.

$$x + y - \theta \log y = x_0 + y_0 - \theta \log y_0 \equiv \alpha$$

$x(\infty) = 0$ 이므로, 식(2-2)는 암암리에 감염가능자의 최종 분수(ultimate fraction)인 식(2-3)을 주고 있다.

$$y_{\infty} = \text{EXP} \left[ \frac{y_0 - \alpha}{\theta} \right] \quad (2-3)$$

식(2-2)에서  $x$ 를 구하여 식(2-1) 두번째 식에 대입하면 식(2-4)가 된다.

$$\frac{dy}{d\tau} = -y(\alpha - y + \theta \log y) \quad (2-4)$$

적분하면, 식(2-5)와 같은  $\tau$ 와  $y$  사이 관계를 산출할 수 있다.

$$\tau = \int_{y_0}^y \left\{ \frac{1}{\eta(\eta - \alpha - \theta \log \eta)} \right\} d\eta \quad (2-5)$$

$z = -\log \eta$ 로 두면  $\eta = e^{-z}$ ,  $d\eta = -e^{-z} dz$ 이다.

따라서 식(2-5)는 식(2-6)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \tau &= \int_{z_0}^z \left\{ \frac{-e^{-z}}{e^{-z}(e^{-z} - \alpha + \theta \cdot Z)} \right\} dz \\ &= \int_{-\log y_0}^{-\log y} \left\{ \frac{1}{\alpha - e^{-z} - \theta \cdot Z} \right\} dz \quad (2-6) \end{aligned}$$

식(2-6)은 모든 시간  $\tau$ 동안 계속되며 유행병은  $y = y_{\infty}$ 인  $\tau = -\infty$ 에서 시작하여  $y(0) = y_0$ 을 통과하고, 그리고  $y_{\infty}$ 에 도달한다고 생각할 수 있다.

또 식(2-6)에 대한 근사 적분값과 전도(inversion)를 구할 수 있다.

$\alpha - \theta \cdot Z_{\infty} - e^{-z_{\infty}} = 0$ 을 만족하는  $Z_{\infty} = -\log y_{\infty}$ 을 가지고 식(2-7)과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{D} &= \frac{1}{\alpha - \theta \cdot Z - e^{-z}} \\ &= \frac{1}{\alpha - \theta \cdot Z_{\infty} - \theta \cdot Z + (1 - e^{z - z_{\infty}})e^{-z_{\infty}}} \\ &= \frac{1}{\alpha - \theta \cdot Z_{\infty}} \cdot \frac{(\alpha - \theta \cdot Z) e^{z - z_{\infty}}}{\theta(Z_{\infty} - Z) e^{z - z_{\infty}} + (e^{z - z_{\infty}} - 1) e^{-z_{\infty}}} \quad (2-7) \end{aligned}$$

$$+ \frac{\theta}{\alpha - \theta \cdot Z_{\infty}} \cdot \frac{Z - Z_{\infty}}{\theta(Z_{\infty} - Z) + (1 - e^{z - z_{\infty}})e^{-z_{\infty}}}$$

그래서

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{D} &= \frac{1}{\alpha - \theta \cdot Z_{\infty}} \log [\theta(Z_{\infty} - Z) e^{z - z_{\infty}} + e^{-z_{\infty}} \\ &\quad (e^{z - z_{\infty}} - 1)] \\ &+ \frac{\theta}{\alpha - \theta \cdot Z_{\infty}} \int \frac{dz}{D} \quad (2-8) \end{aligned}$$

가된다. 여기서

$$\frac{1}{D_1} = \frac{Z - Z_{\infty}}{\theta(Z_{\infty} - Z) + e^{-z - z_{\infty}}(1 - e^{z - z_{\infty}})}$$

이다. 만약  $D$ 의 근으로서  $Z_{\infty}$ 가  $-\log y_{\infty}$ 와 같고, 그리고  $u = Z_{\infty} - Z$ 로 정의하면 식(2-10)과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_1} &= \frac{Z - Z_{\infty}}{\theta(Z_{\infty} - Z) + (1 - e^{z - z_{\infty}})e^{-z_{\infty}}} \\ &= \frac{Z_{\infty} - Z_{\infty} - u}{\theta \cdot u + e^{-z_{\infty}}(1 - e^{-u})} \quad (2-10) \end{aligned}$$

다음에  $1/D_1 = \beta_{-1} \cdot u^{-1} + \beta_0 + \beta_1 \cdot u + \beta_2 \cdot u^2 + \dots$ 으로 전개되고 각 상수는 식(2-11)과 같다.

$$\beta_{-1} = \lim_{u \rightarrow 0} \left( \frac{u}{D_1} \right) = \frac{Z_{\infty} - Z_{\infty}}{\theta - e^{-z_{\infty}}} \quad (2-11)$$

$$\beta_0 = \lim_{u \rightarrow 0} \left( \frac{1}{D_1} - \frac{\beta_{-1}}{u} \right) = \frac{e^{-z_{\infty}} [1 + (Z_{\infty} - Z_{\infty})/2] - \theta}{(\theta - e^{-z_{\infty}})^2}$$

여기서 식(2-8)은 식(2-12)와 같이 근사하게 쓸

수 있다.

$$\int \frac{dz}{D} = \frac{1}{\alpha - \theta - \theta \cdot Z_{-\infty}} \log[\theta(Z_{-\infty} - Z)e^z + e^{z - Z_{-\infty}} - 1] \\ + \frac{1}{\alpha - \theta - \theta \cdot Z_{-\infty}} [\beta_0 \cdot z - \beta_{-1} \cdot \log(Z_{\infty} - Z)] \\ = \frac{1}{\alpha - \theta - \theta \cdot Z_{-\infty}} [\log\{e^z(\alpha - \theta \cdot Z) - 1\} \\ + \theta(\beta_0 \cdot Z - \beta_{-1} \cdot \log(Z_{\infty} - Z))] \quad (2-12)$$

그래서 식(2-6)은 식(2-13)과 같이 된다.

$$\tau = \frac{1}{\alpha - \theta - \theta \cdot Z_{-\infty}} \log \left[ \frac{\alpha + \theta \cdot \log y - y}{y} \right] \\ - \frac{\theta}{\alpha - \theta - \theta \cdot Z_{-\infty}} [\beta_0 \cdot \log y + \beta_{-1} \cdot \log(Z_{\infty} + \log y)] \\ - \frac{1}{\alpha - \theta - \theta \cdot Z_{-\infty}} \log \left[ \frac{\alpha + \theta \cdot \log y_0 - y_0}{y_0} \right] \\ + \frac{\theta}{\alpha - \theta - \theta \cdot Z_{-\infty}} [\beta_0 \cdot \log y_0 + \beta_{-1} \cdot \log(Z_{\infty} + \log y_0)] \quad (2-13)$$

전도를 위해서, 식(2-13)의 마지막 두항을 K로 두면, 식(2-14)와 같이 쓸 수 있다.

$$T \equiv \text{EXP} \left[ \frac{\alpha - \theta - \theta \cdot Z_{-\infty}}{\theta \cdot \beta_{-1} - 1} (\tau - k) \right] \\ = \frac{1/(\theta \cdot \beta_{-1} - 1)}{\frac{(\alpha + \theta \cdot \log y - y)}{\theta \cdot \beta_0 + 1} / (\theta \cdot \beta_{-1} - 1)} \cdot \frac{\theta \cdot \beta_{-1} / (\theta \cdot \beta_{-1} - 1)}{y \cdot (Z_{\infty} + \log y)} \quad (2-14)$$

식(2-14)의 오른쪽 항은  $(y - y_{\infty})^{-1}$ 이다.

그래서  $T = G_{-1}(y - y_{\infty})^{-1} + G_0 + G_1(y - y_{\infty}) + \dots$ 로 전개할 수 있다. 여기서  $G_{-1}$ 와  $G_0$ 은 식(2-15), (2-16)이다.

$$G_{-1} = \frac{1/(\theta \cdot \beta_{-1} - 1)}{\frac{(\theta \cdot \beta_0 + 1)/(\theta \cdot \beta_{-1} - 1)}{y} \cdot \frac{\theta \cdot \beta_{-1} / (\theta \cdot \beta_{-1} - 1)}{[\log y / y_{\infty}]}} \\ = \frac{1/(\theta \cdot \beta_{-1} - 1)}{\frac{(\theta - y_{\infty})}{(\theta \cdot \beta_0 - \theta \cdot \beta_{-1} + 2)/(\theta \cdot \beta_{-1} - 1)} \cdot y_{\infty}} \quad (2-15) \\ G_0 = \frac{\theta}{2(1 - \theta \cdot \beta_{-1})} \cdot y_{\infty} \\ \cdot \frac{(1 + \theta \cdot \beta_0)/(1 - \theta \cdot \beta_{-1})}{(2 - \theta \cdot \beta_{-1})/(\theta \cdot \beta_{-1} - 1)} \\ \cdot [(\theta - y_{\infty})$$

$$- \beta_{-1}(\theta - y_{\infty})^{1/(\theta \cdot \beta_{-1} - 1)}] \quad (2-16)$$

그리고

$$G_1 = \frac{(\theta - y_{\infty})(3 - 2\theta \cdot \beta_{-1})/(\theta \cdot \beta_{-1} - 1)}{(\theta \cdot \beta_0 + \theta \cdot \beta_{-1})/(\theta \cdot \beta_{-1} - 1)} \\ \cdot \left[ \frac{\theta y_{\infty}(\theta - y_{\infty})}{3} + \frac{g - 1}{g} \theta^2 \right] g \\ - \left( \frac{1}{12} - \frac{g}{8} \right) (1 + g)(\theta - y_{\infty})^2 - \frac{g(1 + g)}{4} \theta(\theta - y_{\infty}) \quad (2-17)$$

이며, 여기서  $g = (\theta \cdot \beta_{-1} - 1)^{-1}$ 이다.

3항 이후 급수를 생략하고,  $(y - y_{\infty})$ 에 관해서 풀면 식(2-18)을 계산할 수 있다.

$$y = y_{\infty} + \frac{T - G_0 - \sqrt{(T - G_0)^2 - 4G_1G_{-1}}}{2G_1} \quad (2-18)$$

여기서  $T$ 는 식(2-14)에서 규정하였고,  $x(\tau)$ 값은 그때마다 식(2-2)에서 구한다.

식(2-18)은 전체시간 동안 비대칭이다.

### 3. 컴퓨터에 의한 해석 및 결과고찰

#### 3.1 시뮬레이터의 구성

본 논문 이론의 결과를 알아보기 위해서  $x_0, y_0$  및  $\theta$ 의 초기값을 0.04, 0.95, 0.6과 0.01, 0.98, 0.50 그리고 0.025, 0.95, 0.40의 경우를 대상으로 하였다. 인구집단은 균준화시켰으며, 위의 초기값은 불균칙하게 정하였다.

그리고 유행특성을 알아보기 위해서  $y_0 = 0.92$ ,  $\theta = 0.4$ 로 고정하고  $x_0$ 의 값을 0.07, 0.04 및 0.01의 경우에 대해 연구대상으로 하였다. 흐름도 작성 및 컴퓨터 처리를 위해서 반복계산 회수 NN, 적분계수 H, D의 계산시 허용오차 DK로 정하였으며, 식(2-1)은 가장 정확한 Runge-Kutta법으로 해석하였다.

그림 1은 디지털 컴퓨터로 시뮬레이션하기 위한 흐름도이다.

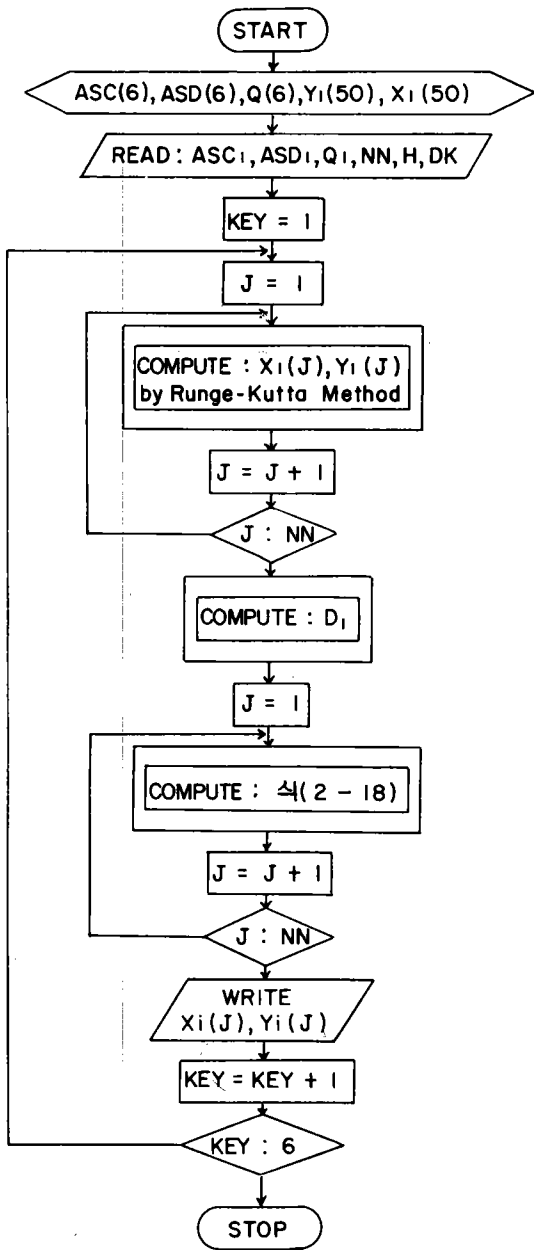


그림 1 초등 급수에 의한 결정론적 모델 해석을 위한 흐름도

Fig. 1 Flow-Chart for analysis of the deterministic model by elementary series expansions

3·2 결과고찰

NN=25. H=1.0, DK=10<sup>-4</sup>로 하고 각 형태에 대하여 디지털 컴퓨터로 수치계산을 하였는데 그림 2, 3과 같은 유행응답을 나타내었다.

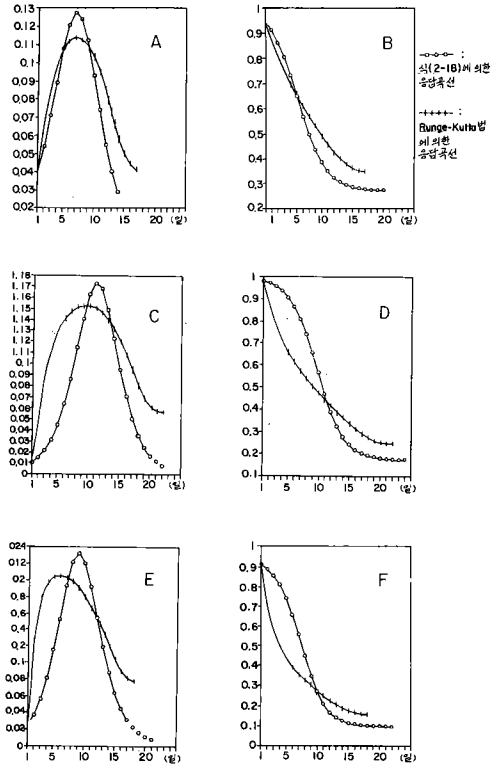


그림 2 수치해석의 비교

A,C와 E는 감염자, H, D와 F는 감염가능자 곡선이다.

Y<sub>0</sub>, X<sub>0</sub>와 θ는 각각 다음과 같다. A,B: 0.95, 0.04, 0.6.

C,D: 0.98, 0.01, 0.5. E,F: 0.95, 0.025, 0.4.

Fig. 2 Comparison of numerical solution. curves A, C and E are fraction of infectives versus time. B,D and F, fraction of suceptibles versus time. The initial suceptible(Y<sub>0</sub>), initial infective(X<sub>0</sub>), and threshold(θ) parameter for each figure pair are respectively. A,B: 0.95, 0.04, 0.6 C,D: 0.98, 0.02, 0.5 E,F: 0.95, 0.025, 0.4

그림 2에서 초등급수 전개에 따른 계수 표현이 다소 복잡하지만, 컴퓨터에 의한 수치해석에 있어서 효과적이라는 사실을 알 수 있다.  $x_0=0.04$ ,  $y_0=0.95$ ,  $Q=0.65$  및  $D=0.35$ 에서는 상당히 정확하였다. 그리고 결정론적 모델을 직접 해석하였을 경우에는 본 이론에 해석하였을 경우보다 최대치가 평균 0.0197만큼 많았다.

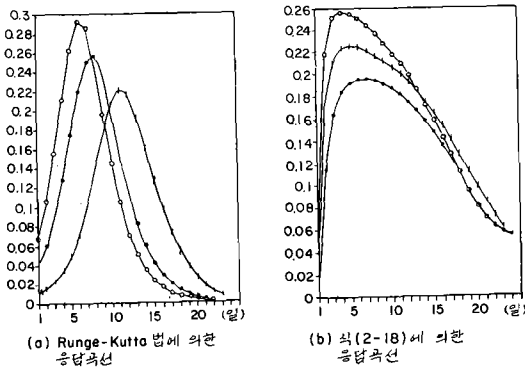


그림 3  $Y_0=0.92$ ,  $\theta=0.4$ 로 고정하고,  $X_0$ 의 값을 0.07, 0.4 및 0.01로 변화시킬 경우 감염자 응답곡선

Fig. 3 Infectives fractions of the deterministic model with  $Y_0=0.92$ ,  $\theta=0.4$ . Initial infectives are 0.07, 0.04, and 0.01

그림 3은 다른 파라메타 값을 일정하게 하고  $x_0$ 의 변화에 따라 고찰한 것이다.  $x_0$ 가 0.03씩 감소함에 따라 결정론적 모델을 직접 해석할 경우에 최대값과 응답일은 0.035와 2일씩 감소하는데, 본 이론에 따른 해석은 최대치가 0.0001씩 감소하고 시기도 1일 정도 늦어지므로 그다지 큰 변화를 보이지 않았다.

전체적으로, 본 이론에 따른 유행곡선은 결정론적 모델을 컴퓨터로 직접 해석할 경우보다 초기값에 따른 변화가 적었다.

#### 4. 결 론

초등급수 전개에 의한 유행병 모델을 만들고 해석한 본 논문에서 다음과 같은 중요한 결론을 얻었다.

- 1) 본 논문의 이론에 의한 유행병 모델은 종(bell) 모양의 유행응답을 잘 나타내었다.
- 2) 유행과정에 따라 연속점을 계산하는 반복계산보다도 더욱 효과적이었다.
- 3) 최종 감염가능자( $y_\infty$ )만 알면 유행형상을 짐작할 수 있다.
- 4) 본 이론에 따른 유행병 모델은 각종 파라메타 값에 큰 영향을 받지 않았다.

본 논문 이론은 여러 유행병 유포상태를 연구하는데 크게 공헌할 줄 믿는다.

#### 참 고 문 헌

- 1) Abate, E.H et al, "Solution by means of lie-series to the laser rate equations for a giant pulse including spontaneous emission." Z. Phys., 209, pp.13-32, 1968.
- 2) Kermack, W.O. & Mokendrick, A.G., "Contribution to the Mathematical theory of Epidemics." Proc. Royal Soc. Ser. A, Vol. 115, pp.700-21, 1927.
- 3) Bartlett, M.S., "stochastic processer or statistic of chang." Appl. statist, Vol. 2, pp.44-64, 1953.
- 4) Ludwing, D., "Mathematical Models for the spread of Epidemics." Comput. Biol. Med, Vol. 3, pp.137-39, 1973.
- 5) Thieme, H.R., "Asymptotic Estimates of the solution of Nonlinear Integral Equation and Asymptotic speed for the spread of populations." J. Reine Angew. Math., 306, pp.94-121, 1979.
- 6) Bailey, N.T.J.: The Mathematical Theory of Infectious Diseases and Its Applications Hafner,

New York, pp.82-86, 1975.

- 7) Kendall D.G., "Deterministic and stochastic epidemics in closed population." in proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol. 4, Univ. of Calif. Press, Berkeley, pp.149-165, 1956.
- 8) Gripenberg, G., "Periodic solution of an Epidemic model." J. Math, Biol., Vol. 10, No. 3, pp. 371-80, 1980
- 9) Gani, J. & Jerwood, D., "Markov chain Methods in chain Binomial Epidemic Models." Biometrics, 27, pp.591-603, 1971.
- 10) 정형환, 박상희, "인플루엔자 유행 관리의 수학적 모델화.", 전기학회지, Vol. 30, pp.37-41, 1981
- 11) 정형환 : 마르코프 과정을 이용한 인플루엔자 유행특성에 관한 연구. 박사학위논문, 연세대학교 대학원, 1984.
- 12) 정형환 등, "Pontryagin 최소 원리를 이용한 최적 접종에 관한 연구." 의공학회지, Vol. 9, No. 1, 1988.