

〈論 文〉

하중경계조건의 변화에 대한 선형탄성문제의 민감도 해석

이 태 원*

(1991년 4월 1일 접수)

Sensitivity Analysis of Linear Elastic Problem due to Variations of the Traction Boundary Conditions

Tae Won Lee

Key Words : Shape Design Sensitivity(형상설계민감도), Design Velocity(속도장), Material Derivative(전미분), Adjoint System(보조 시스템), Lagrange Multiplier Method (Lagrange 승수방법), Tangential Component of Design Velocity(속도장 접선성분)

Abstract

A shape design sensitivity of the elastic deformation due to a change of traction boundary condition is presented. The solution of governing equations for a linear elasticity problem is obtained by finite element method and the traction boundary is defined by design variables. The performance functional to be considered involves both the domain and boundary integral. Variations of geometry can be defined as design velocity. Using material derivative concept and adjoint equations, the design sensitivity is derived by Lagrange multiplier method. For a given geometry of a structure, the change of traction boundary is described by the tangential component of the design velocity only. The final result for the shape design sensitivity is formulated as the boundary integral form, the integrand is defined by tangential component of design velocity and first order derivatives of parameters. Numerical implementation of design sensitivity is discussed and is compared with the difference of the actual values.

기호설명

\mathbf{b} : 설계변수 벡터	s_i : 경계에서 단위접선벡터의 i 방향성분
c_i : 하중경계에서 기술된 표면력의 i 방향 성분	T_i : 표면력의 i 방향성분
d_i : 변위경계에서 기술된 변위의 i 방향성분	u_i : 상태변수의 i 방향성분, 또는 i 방향 변위
f_i : 체적력의 i 방향성분	V : 속도장벡터
g : 경계 Γ 에서 정의된 임의의 함수	V_i : 속도장의 i 방향성분
h : 영역 Ω 에서 정의된 임의의 함수	\mathbf{x} : 공간좌표벡터
J : 임의의 범함수	Γ : 연속체의 경계
L : Lagrange 함수	δ : Kronecker delta
n_i : 경계에서 단위수직벡터의 i 방향성분	ϵ_{ij} : 변형도 텐서
r : 연속체 경계를 정의하는 함수	λ : Lamé의 상수
	μ : 전단계수
	σ_{ij} : 응력텐서
	Ω : 연속체의 영역

*정회원, 금오공과대학교 기계설계학과

상첨자

- : 전미분
- ‘ : 변수 t 에 대한 편미분
- * : 보조변수를 나타냄

하첨자

- i : 벡터방향성분
- $, i$: i 방향에 대한 편미분

1. 서 론

민감도 해석은 변수들의 조합으로 표현된 함수에서 특정변수의 변화에 대한 함수의 변화량을 설명한다. 그러므로, 시스템의 상태를 기술하는 함수나, 설계 목적함수가 현재 설정된 변수값에서 정확하게 만족되지 않을 때 이 변수값들의 변화를 통하여 보다 향상된 결과를 찾는 신뢰도해석, 시스템의 특성규명(system identification) 및 최적설계등에 민감도 해석이 필요하다. 이와같이 기계공학의 전 분야에 적용이 가능한 민감도해석은 Taylor 급수 전개에 기초를 두고 함수의 미분값을 이용하여 수행된다. 그러나, 연속체의 선형탄성문제에서 민감도해석을 통하여 경계조건이 변화에 따른 거동변화를 예측하기는 간단하지 않다. 이는 물체의 거동을 지배하는 방정식이 편미분방정식이고 이 방정식의 경계조건을 기술하는 하중경계가 변수로 설정되기 때문이다. 이러한 형태의 문제는 결국 연속체의 형상변화에 따른 설계목적함수값의 변화량, 즉, 형상설계민감도를 구하는 문제와 동일하고 이에 대한 연구는 형상최적설계분야에서 활발하다.

최근에 많은 관심을 끌고 있는 형상최적설계는 연속체의 형상을 변화시키면서 더 좋은 설계결과를 얻고자하는 하는 것이 목적이다. 형상설계에서는 최적화 과정중 해석대상인 연속체의 형상이 변화하기때문에 시스템을 기술하는 상태방정식에서 경계조건의 영역이 변하게 된다. 최적화 과정중에 연속체의 형상 및 경계조건이 변하면 해석적으로 정해를 구할 수 없는 경우가 존재한다. 잘 알려진 바와 같이 특수한 형태의 문제를 제외하고 대부분의 구조해석은 시스템 상태방정식을 수치적으로 유한요소법이나 경계요소법으로 해결하였다. 그러므로, 형상최적화문제에 관한 많은 연구^(1~11)들은 공학적 응용 관점에서 이들 수치해를 적용한 형상설계민감

도를 유도하였다. 문헌들의 민감도 해석방법은 크게 2가지 방법으로 분류할 수 있다. 먼저 연속체를 유한차원화하여 유한요소 절점으로 정의하고 이에 대한 변수들의 미분치로부터 민감도를 구하는 방법^(1,2)이 있다. 그러나, 유한차원적 접근은 수치적 측면에서 문제점이 있기 때문에 연속체적 관점에서 형상설계민감도를 일반적인 함수로 유도한 다음 유한요소법이나 경계요소법을 적용하는 방법이 현재는 주로 연구되고 있다^(3~11). 이 방법은 연속체 역학에서 사용되는 각종 함수의 형상 변화를 속도장으로 정의한 다음 이를 이용한 전미분 개념을 적용하거나, 영역변수화방법(domain parameterization method)을 이용하였다. 또한, 구조물의 형상최적설계에 유한요소법이나 경계요소법을 적용하기위하여 시스템의 상태방정식을 적분형으로 변환하고 목적함수 및 제한조건식 역시 적분형으로 정의하였다.

현재까지 연구된 형상최적설계의 대부분은 하중경계에서 표면력(traction)이 존재하지않는 자유경계부분의 형상결정에 주안점을 두었기때문에 연속체 한 부분의 경계변화가 다른 나머지 경계부분에 영향을 주지않는 경계변화의 수직성분으로 형상설계민감도를 유도하였다. 그러나, 실제로 기계구조물의 설계는 수식으로 표현하기 어려운 기능상 및 제작상의 문제로 인하여 구조물의 형상을 결정하는 형상최적화문제보다 주어진 연속체의 형상에서 하중 및 변위 경계조건의 적절한 설정을 통하여 설계항상을 도모하는 경우가 많이 존재한다. 이러한 예로서 가공면의 변형을 최소화하기 위한 체결부위 선정, 에너지 방출률에 기초를 둔 크랙의 성장방향 예측등이 있다.

이와같이 기존의 형상설계에 대한 연구결과들은 유한차원적 접근에 의하거나 변분이론 및 경계적분방정식에 의한 민감도 해석을 이용하여 형상최적설계를 행하였으나, 적용대상의 형상설계민감도를 경계변화의 수직성분만 고려하여 실제 응용 관점에서 보다 중요한 하중 및 변위경계조건의 변화에 따른 연속체의 거동등을 예측하기는 불가능하였다. 앞서 설명하였듯이 형상최적설계 기법은 설계뿐 아니라 기계공학 여러분야에도 확장 적용이 가능하므로 연구관심분야에 맞는 문제정의 및 민감도 유도가 필요하다. 그러므로, 본 연구에서는 연구대상을 주어진 구조물 형상에서 경계조건의 변화에 따른 형상설계민감도, 특히 하중경계조건의 변화에 따른 구

조물의 변형에 주안점을 두었다. 이 연구결과는 가공물의 지지위치에 따른 가공면의 변형정도 향상 및 접촉문제 해석등에 응용이 가능하다. 유도된 민감도가 정확함을 입증하기 위하여 예제로서 하중경계조건의 변화에 따른 범함수로 정의된 변형의 변화량을 예측하는 문제를 선정하였다.

2. 문제 정의

본 연구에서는 하중경계조건이 달라질 때 탄성변형하의 연속체의 특성을 기술하는 함수의 변화를 관찰하고자한다. 함수는 특정부위의 변형, 응력일 수도 있고 연속체의 탄성에너지 일 수도 있다. 목적함수를 수식으로 기술하는 방법은 여러가지가 있을 수 있으나, 영역 및 적분형으로 함수를 표현하는 것이 연속체 역학에서는 보다 일반적이다. 이러한 이유는 특정위치의 응력 및 변위를 국부 영역 및 경계에서의 평균값으로 가정한다면 공간좌표의 함수 역시 경계 및 영역적분형 함수로 표현이 가능하기 때문이다⁽¹¹⁾. 그러므로, 연구 목적 범함수 $J(\cdot)$ 를 아래와 같이 정의하였다.

$$J(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} h(\mathbf{u}, \sigma) dx + \int_{\Gamma} g(\mathbf{u}, \mathbf{T}) ds \quad (1)$$

위식에서 σ 는 응력, \mathbf{u} 는 변위, \mathbf{T} 는 경계에서의 표면력, Ω 는 적분영역, Γ 는 적분경계를 의미하며 영역적분형과 경계적분형으로 분리하여 기술한 이유는 일반적으로 탄성변형하에서 연속체의 영역내부는 변위와 응력으로 표현되고 경계는 변위와 표면력으로 표현되기 때문이다.

목적함수 $J(\cdot)$ 를 기술하는데 사용된 응력, 변위 및 표면력등은 시스템 상태 방정식이라는 탄성 지배방정식으로부터 그들의 상관관계가 정의된다. 임의의 2차원 탄성체에 대하여 변위벡터 u_i , 변형도 ϵ_{ij} , 응력텐서 σ_{ij} 로 하여 상대방정식을 기술하면 아래와 같다.

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

$$u_i = d_i \quad \text{on } \Gamma_u \quad (3)$$

$$T_i = \sigma_{ij} n_j = c_i \quad \text{on } \Gamma_f \quad (4)$$

여기서 Ω 는 연속체의 전 영역을, Γ_u 는 변위가 기술된 부경계를 Γ_f 는 하중경계를 표현하고 f_i 는 단위체적당 체적력, T_i 와 n_j 는 경계에서의 표면력과 단위법선벡터 성분을 나타낸다. d_i 와 c_i 는 각각

의 부 경계에서 주어진 변위 및 표면력이다. 한편 위식들에서 정의된 응력과 변위와의 상관관계는

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (5)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + \mu \epsilon_{ij} \quad (6)$$

이다. 식에서 사용된 λ 와 μ 는 Lamé의 상수, δ_{ij} 는 Kronecker delta이다.

한편, 범함수식 (1)을 포함하여 시스템 상대방정식 (2)~(6)은 영역 및 경계에서 정의되므로 특수한 경우를 제외하고 해석학적으로 다루기가 불가능하다. 그러므로, 보다 응용성 관점에서 수치해를 사용하여야 하는데 본 연구에서는 유한요소법을 적용하였고 민감도해석 역시 이에 기초를 두었다.

3. 형상설계 민감도 해석

범함수 식 (1)의 형상설계민감도를 전미분 개념으로부터 유도하기에 앞서 속도장과 설계변수와의 관계를 정의하여야 한다. 일반적으로 연속체의 전 경계 중 경계조건의 변화가 발생하는 경계 Γ_f 를 설계변수의 함수 $\mathbf{r}(\alpha; \mathbf{b})$ 로 표현한다. 이때 α 는 매개변수이며 $\mathbf{b} = [b_1, \dots, b_m]^T$ 는 설계변수이다. 유한요소를 사용하여 연속체의 형상을 모델링하는 경우에 변화하는 경계를 설계변수로 정의하므로 설계변수의 변화는 매개변수 t 를 도입하여 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + t \delta \mathbf{b} \quad (7)$$

\mathbf{b}_0 는 초기값이다. 이 때, 매개변수 t 를 시간으로 정의하여 시간에 따른 연속체의 한점의 변화를 설명하는 속도장 V 와 설계변수와의 관계는 다음과 같이 정의된다.

$$V = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}(\alpha; \mathbf{b}_0 + t \delta \mathbf{b})) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{b}} \delta \mathbf{b} \quad (8)$$

한편, 공간좌표 $\mathbf{r}(\mathbf{b})$ 로 정의된 함수 $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ 의 전미분은 다음의 식으로 표현된다.

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{r}) = \frac{d}{dt} \mathbf{u}_i(\mathbf{r} + tV(\mathbf{r}))|_{t=0} \quad (9)$$

이 식은 벡터 \mathbf{r} 의 성분을 x_i 로 하여 텐서로 표기하면

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}'(\mathbf{r}) + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} V_i = \mathbf{u}' + u_{,i} V_i \quad (10)$$

로 된다.

위와같은 정의하에 속도장으로 표현된 설계민감도는 상태방정식 (2)~(4)을 포함한 형상최적화문제에서 많은 문헌의 연구는 다양한 방법을 적용하여 유도 하였으나, 본 연구에서는 Lagrange 승수 방법에 기초를 두었다. 민감도해석을 위하여 적분대상함수 $h(\cdot)$ 와 $g(\cdot)$ 는 연속이라는 가정이 필요하다. 이러한 가정하에 상태방정식을 고려한 Lagrange함수는

$$L(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) = \int_{\Omega} h dx + \int_{\Gamma} g ds - \int_{\Omega} \mathbf{u}^* (\sigma_{ij} + f_i) dx \quad (11)$$

이 된다. 위 식에서 \mathbf{u}^* 는 Lagrange 승수이다. 한편, 전미분 개념을 적용하여 이식을 정리하면

$$\begin{aligned} \dot{L}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) &= \int_{\Omega} (h' + \mathbf{u}_{i,j}^* \sigma_{ij} + \mathbf{u}_{i,j}^* \sigma_{ij} - \mathbf{u}^* f_i - \mathbf{u}^* f_i') dx \\ &+ \int_{\Gamma} (h + \mathbf{u}_{i,j}^* \sigma_{ij} - \mathbf{u}^* \lambda_i f_i) V_n ds \\ &+ \int_{\Gamma} (\dot{g} - \dot{u}_i^* T_i - \dot{u}_i^* T_i) ds \\ &+ \int_{\Gamma} (g - \mathbf{u}_i^* T_i) (V_n H + V_{s,s}) \end{aligned} \quad (12)$$

이 된다. 위식에서 ($\dot{\cdot}$)은 $\frac{d}{dt}$ 를 ($'$)은 $\frac{\partial}{\partial t}$ 를 의미하며 속도장 V 의 법선 성분을 V_n , 접선성분을 V_s , 연속체 경계에서의 곡률을 H 로, 접선방향속도의 접선방향 미분을 $V_{s,s}$ 로 표현하였다. 그런데, $h'(\mathbf{u}, \sigma)$ 는 변위와 응력의 함수이므로

$$h' = h_{u_i} u_i' + h_{\sigma_{ij}} \sigma_{ij}' \quad (13)$$

의 관계로 표현할 수 있다.

식 (12)에서 Lagrange 승수 \mathbf{u}^* 는 보조시스템 (adjoint system)을 도입하여 계산할 수 있다. 전미분항들을 소거하기 위하여 정의된 보조시스템은

$$\sigma_{ij,j}' = h_{u_i} \quad \text{in } \Omega \quad (14)$$

$$\mathbf{u}_i^* = g_{T_i} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (15)$$

$$T_i^* = \sigma_{ij}' n_j = g_{u_i} \quad \text{on } \Gamma_f \quad (16)$$

$$\epsilon_{ij}' = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{i,j}' + \mathbf{u}_{j,i}') \quad (17)$$

$$\sigma_{ij}' = \lambda (\epsilon_{kk}' + h \sigma_{kk}) \delta_{ij} + \mu (\epsilon_{ij}' + h \sigma_{ij}) \quad (18)$$

로 수식화된다. 이 보조시스템과 시스템 상태방정식을 Lagrange 함수의 전미분에 적용하면 결과식

$$\dot{L}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) = \int_{\Gamma} (T_i^* \mathbf{u}_i' + T_i \mathbf{u}_i') ds - \int_{\Omega} \mathbf{u}_i^* f_i' dx$$

$$\begin{aligned} &+ \int_{\Gamma} (h + \epsilon_{ij}' \sigma_{ij} - \mathbf{u}_i^* f_i) V_n ds \\ &+ \int_{\Gamma} (\dot{g} - \mathbf{u}_i^* \dot{T}_i - \dot{u}_i^* T_i) ds \\ &+ \int_{\Gamma} (g - T_i \mathbf{u}_i^*) (V_n H + V_{s,s}) ds \end{aligned} \quad (19)$$

이 된다. 한편, 식 (19)에서

$$\dot{g} = g_{u_i} \dot{u}_i + g_{T_i} \dot{T}_i \quad (20)$$

이므로 Lagrange 함수의 전미분은 다시

$$\begin{aligned} \dot{L} &= \int_{\Gamma} \{ (g_{u_i} + T_i^*) \dot{u}_i + (g_{T_i} - \mathbf{u}_i^*) \dot{T}_i \} ds \\ &- \int_{\Gamma} (T_i^* \epsilon_{ij}' + T_i \epsilon_{ij}') V_j ds + \int_{\Gamma} (h + \epsilon_{ij}' \sigma_{ij} \\ &- \mathbf{u}_i^* f_i) V_n ds + \int_{\Gamma} (g - T_i \mathbf{u}_i^*) (V_n H \\ &+ V_{s,s}) ds - \int_{\Omega} \mathbf{u}_i^* f_i' dx \end{aligned} \quad (21)$$

로 정리된다. 경계변화를 나타내는 속도장 V 는 접선방향성분 V_s 및 법선방향 성분 V_n 로 분해되나, 현재 주 관심사는 연속체의 형상변화가 없고 경계조건만 변하는 경우이므로 V_n 을 0로 하고 접선성분으로 표현하면

$$V_j = V_s s_j$$

임을 알 수 있다. 여기서 s_j 는 단위 접선 벡터이다.

연속체의 경계 Γ 는 부경계 Γ_u, Γ_f 로 구성되어 있고 설계변수로 기술된 경계 Γ_f 는 하중경계 Γ_f 의 부분 경계이다. 그러므로, 속도장 V 는 경계 Γ_u 을 제외하고는 0이다. 또한, 속도장 접선성분의 미분 $V_{s,s}$ 은 설계변수와 접선방향의 2차미분이므로 수치계산상 속도장의 미분이 존재하지 않는 형태로 민감도를 유도하는 것이 추천된다. 이러한 목적을 위하여 함수 g 와 표면력 \mathbf{T} 및 보조변수 \mathbf{u}^* 는 경계 Γ 에서 연속이라는 가정하에 부분적분을 하면 민감도 결과식은

$$\begin{aligned} \dot{L}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) &= \int_{\Gamma_u} (g_{u_i} + T_i^*) \dot{u}_i ds + \int_{\Gamma_f} (g_{T_i} - \mathbf{u}_i^*) \dot{c}_i ds \\ &- \int_{\Gamma_f} (T_i^* \epsilon_{ij}' + T_i \epsilon_{ij}') V_j ds \\ &- \int_{\Gamma_f} (g_{u_i} \epsilon_{ij}' + g_{T_i} T_{i,j} \mathbf{u}_i^* + T_i \epsilon_{ij}') V_j ds \\ &+ [(g + T_i \mathbf{u}_i^*) V_s]_{\Gamma} - \int_{\Omega} \mathbf{u}_i^* f_i' dx \end{aligned} \quad (22)$$

로 정리된다.

이상에서 유도된 결과식 (22)에서 전미분 L 은 설계변수의 변화에 따른 범함수식 (1)의 변화량이므로 연속체의 하중경계를 설계변수로 기술된 벡터 r 로 표현하여 속도장을 식 (8)로부터 계산하면 하중경계의 변화에 따른 범함수형으로 정의된 탄성문제의 민감도를 구할 수 있다.

4. 적용 예제

앞에서 경계조건의 변화에 따른 범함수의 민감도 결과를 유도하였다. 유도된 민감도식은 탄성변형하의 연속체의 특성을 기술하는 모든 경우에 하중 경계조건의 변화에 따른 연속체의 특성변화를 예측하는데 적용이 가능하다. 그러나, 복잡한 형상의 연속체의 경우에 시스템을 기술하는 상태방정식의 정해를 해석학적으로 구하기가 어려우므로 수치해법을 적용하게 된다. 본 연구에서는 변위를 기초로 한 유한요소법을 수치해법으로 선정하였고 적분대상함수의 연속성을 부여하기 위하여 변위만으로 범함수를 기술하였다. 이는 수치해법으로 채택한 유한요소법이 변위는 요소경계에서의 연속성을 만족하나 응력은 불연속하므로 민감도 유도시 서술한 함수가 연속하다는 가정을 만족하지 않기 때문이다. 그러므로, 응력의 연속성이 보장되는 수치해법을 적용하지 않는 이상 하중경계의 변화로 인한 연속체의 탄성변화를 예측하는 본 연구결과의 정확성

을 증명하기가 불가능하므로 변위로 정의된 범함수만 예제로 선정하였다. 그 중에서도 특히 경계적분형 범함수가 보조시스템 및 민감도 결과식이 더욱 복잡하고 연속체의 탄성 에너지를 구하는 경우를 제외하고는 일반적으로 경계에서의 변위가 주 관심사인 경우가 많으므로 경계적분형만 고려하였다.

4.1 하중경계의 변화에 따른 요철형흙의 변형

Fig. 1과 같은 요철형의 흙 부분을 갖는 물체에 전체하중의 크기는 일정하면서 압력이 작용하는 부위가 변화할 때 요철형흙의 상대변형을 계산하고자 한다. 해석대상은 중심에 대하여 대칭이므로 Fig. 2와 같이 4절점 등매개 유한요소로 모델링하였다. 전체하중의 크기는 98N이고 하중조건은 경계에서 수직압력으로 작용하고 연속체의 재질은 탄소강으로 탄성계수 $E=204.4\text{GPa}$, 프와송 비 $\nu=0.3$ 이다. Fig. 2와 같은 하중 및 경계조건하에 요철형흙의 상대 변형의 수직성분을 범함수로 설정하였다. 즉,

$$J(u) = \int_{\Gamma_2} (u_n - u_a)^2 ds \tag{23}$$

이다. 위식에서 Γ_2 는 요철형부분의 경계를, u_n 은 이 경계부위에서 변위의 법선성분을 u_a 는 기준점 a 에서 변위의 법선성분을 표현한다.

설계 변수는 Fig. 1과 같이 하중이 작용하는 부

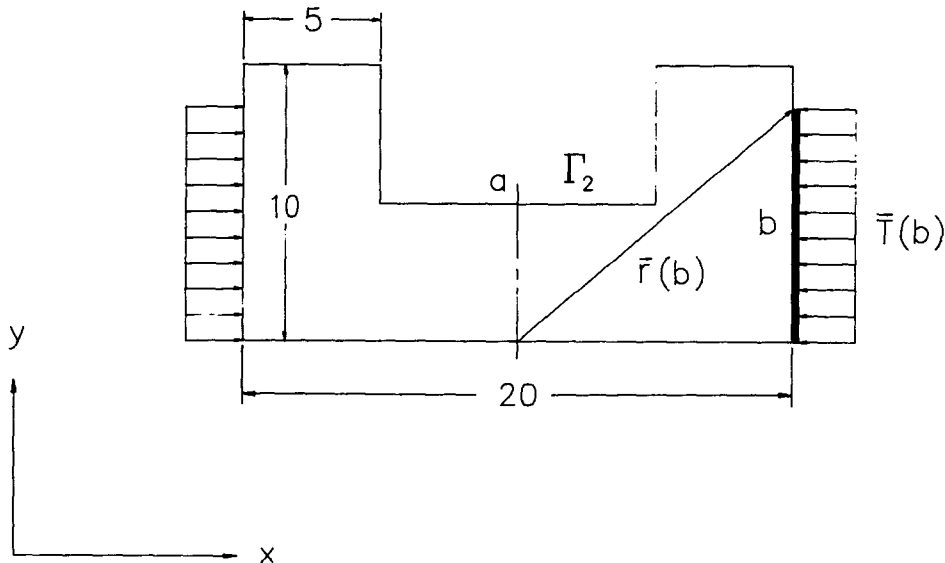


Fig. 1 Elastic structure with channel section shape under normal pressure

위를 선정하여 x 방향단위벡터를 i , y 방향단위벡터를 j 로 하여 하중경계를 벡터 r 로 수식화 하였다.

$$r(b) = 0i + bj \tag{24}$$

정의된 하중경계는 설계변수의 변화에 따라 유한요소형상이 변화하므로 민감도 해석시 현 모델링에서 요소크기에 비례하여 설계변수의 변화량이 분배되어 하중 경계부위의 요소크기가 변하는 것으로 정

의하였다. 즉, Fig. 2와 같이 총 유한요소수를 48개로 한 경우, $b=8.75\text{mm}$ 이면 벡터 r 로 정의된 경계를 요소의 크기가 동일하게 7개로 분할하였으므로, 설계변수의 변화량이 설계변수 값의 1/1000로 설정하면 각 요소의 크기는 경계에서 0.00125mm씩 증가한다.

한편, 형상설계 민감도를 위하여 표면력 T 의 전미분도 계산하여야한다. 이러한 목적하에 표면력을 설계변수의 함수로 표현하면

$$T(b) = 98/bj \tag{25}$$

이 된다. 설계변수의 변화량에 해당하는 하중경계가 달라졌을 때의 실제값의 변화와 민감도에 의한 예측값의 비교는 Table 1에서 있다. 다양한 설계값의 변화에 따른 예측값의 정확도를 검토하기 위하여 Fig. 2와 같이 유한요소수가 48이고 하중경계 위치가 $b=8.75\text{mm}$ 인 case (a), $b=7.50\text{mm}$ 인 case(b)와 분할 요소수를 192까지 증가하여 하중경계 위치가 $b=8.75\text{mm}$ 인 case(c)에서 현 설계값의 0.01, 0.001, 0.0001까지 설계변수를 변화하면서 민감도해석을 행하였다. 해석 결과 수치미분의 정의에 가까운 $\delta b/b$ 가 작을수록, 요소분할수가 증가하여 변위해가 정해에 근접할수록 실제값의 변화

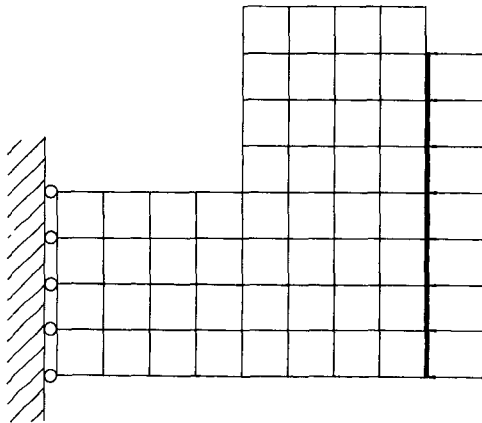


Fig. 2 Finite element model for sensitivity analysis of continuum described as channel section

Table 1 Design sensitivity analysis for deformation in concave boundary due to a change of traction boundary

(a) In case of $b=8.75$, number of finite element=48

$\delta b/b$	J_i	ΔJ	δJ	$\delta J/\Delta J * 100(\%)$
0.01	7.7279E-5	3.5977E-6	3.5568E-6	98.86
0.001	7.7279E-5	3.5615E-7	3.5568E-7	99.87
0.0001	7.7279E-5	3.5579E-8	3.5568E-8	99.97

(b) In case of $b=7.5$, number of finite element=48

$\delta b/b$	J_i	ΔJ	δJ	$\delta J/\Delta J * 100(\%)$
0.01	3.4627E-5	2.0951E-6	2.0659E-6	98.60
0.001	3.4627E-5	2.0681E-7	2.0659E-7	99.89
0.0001	3.4627E-5	2.0654E-8	2.0659E-8	100.02

(c) In case of $b=8.75$, number of finite element=192

$\delta b/b$	J_i	ΔJ	δJ	$\delta J/\Delta J * 100(\%)$
0.01	7.9655E-5	3.7527E-6	3.6848E-6	98.87
0.001	7.9655E-5	3.6892E-7	3.6848E-7	99.88
0.0001	7.9655E-5	3.6854E-8	3.6848E-8	99.98

량 ΔJ 와 민감도에 의한 예측값 δJ 사이의 오차는 작아진다. 그러나, 그 차이는 미미하여 무시할 정도이다. 그러므로, 제안된 민감도식은 설계변수값의 크기변화 및 다양한 요소분할하에서도 잘 적용됨을 알 수 있다.

4.2 하중경계의 변화로 인한 반원형홈의 변형

연속체의 평면 및 측면에서 Fig. 3과 같이 하중이 작용하는 경우 하중 작용 부위의 변화에 따른 반원형 홈의 변형을 민감도해석을 통하여 재해석을 하지 않고 변형결과를 예측하고자 한다. Fig. 3에서 보듯이 하중작용부의 위치를 2개의 설계변수로 정의하였고 하중상태는 균일수직압력이다. 대칭성을 고려하여 Fig. 4와 같이 4 절점 등매개유한요소로 모델링을 하였다. 하중은 x, y 방향에서 각각에서 $98N$ 으로 크고 재료는 A1 계통으로 탄성계수 $E=67.5GPa$, 프와송 비는 0.34 이다. 이러한 하중 및 경계조건하에 요철형홈의 변형의 수직성분을 범함수로 설정하였다. 즉,

$$J(u) = \int_{\Gamma_2} u_n^2 ds \tag{26}$$

이다. 위식에서 Γ_2 는 반원형부위의 경계를, u_n 은 변위의 경계법선성분을 표현한다.

압력 경계 r 과, 표면력 T 를 설계변수로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} r_1(b) &= (10-b_1)i+0j \\ r_2(b) &= 0i+(10-b_2)j \\ T_1(b) &= 98/b_1 j \\ T_2(b) &= 98/b_2 i \end{aligned} \tag{27}$$

$b_1=4, b_2=7$ 에서 정의된 하중상태하에서 하중경계의 변화에 따른 $J(u)$ 의 결과를 예측하기위하여 민감도 해석을 행하였다. 설정된 설계변수의 변화량은 현재 설계값의 $0.01, 0.001, 0.0001$ 로 하여 실제값의 변화량과 민감도 해석에 의한 예측값이 잘 일치함을 Table 2에서 볼 수 있다. 비교 결과 수치해의 정확도는 앞의 예제보다 떨어지며 특히 설계변수 b_1 의 변화에 대한 민감도 결과가 다소 오차가 크다. 이러한 이유는 유한요소법의 적용으로 원형 홈부분을 선형함수의 조합으로 근사하여 원래의 연속체와 약간의 형상오차가 발생하였기 때문이다. 또한, 설계변수의 변화에 따른 목적함수 $J(u)$ 의 변화가 예제 1의 경우보다 상당히 작고 특히 설계변수 b_1 의 변화에 함수값의 변화가 둔감한 것으로 보아 컴퓨터 계산오차(round off error)의 영향도 고려된다.

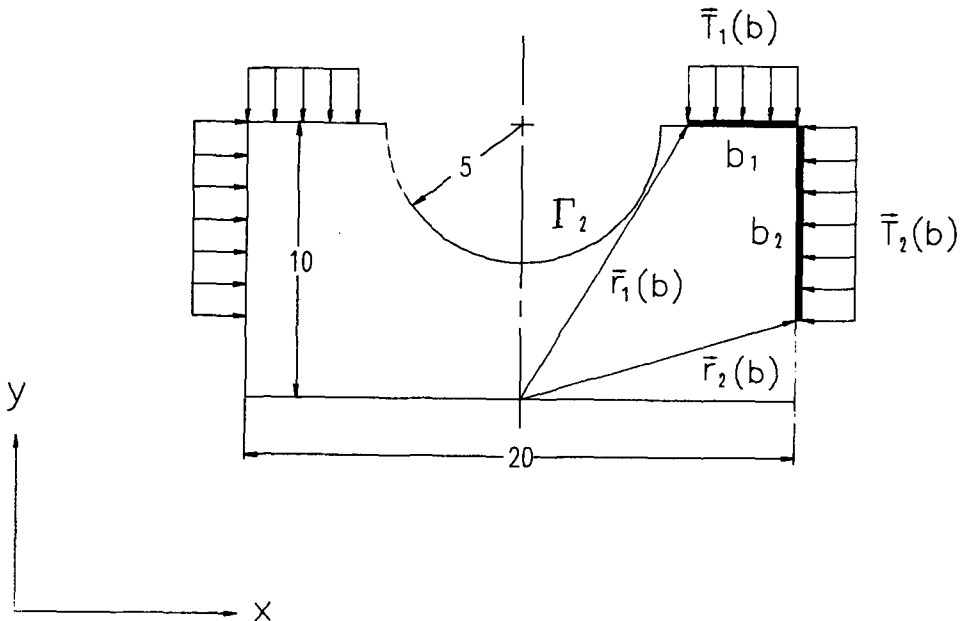


Fig. 3 Elastic structure with a half circular groove

Table 2 Design sensitivity analysis for deformation in circular boundary due to changes of traction boundary

(a) Case with design change in b_1				
$\delta b/b$	J_i	ΔJ	δJ	$\delta J/\Delta J * 100(\%)$
0.01	1.2757E-5	1.4749E-7	1.3729E-7	93.08
0.001	1.2757E-5	1.4664E-8	1.3729E-8	93.62
0.0001	1.2757E-5	1.4656E-9	1.3729E-9	93.67
(b) Case with design change in b_2				
$\delta b_2/b_2$	J_i	ΔJ	δJ	$\delta J/\Delta J * 100(\%)$
0.01	1.2757E-5	-2.6829E-7	-2.7511E-7	102.54
0.001	1.2757E-5	-2.7078E-8	-2.7511E-8	101.60
0.0001	1.2757E-5	-2.7103E-9	-2.7511E-9	101.51

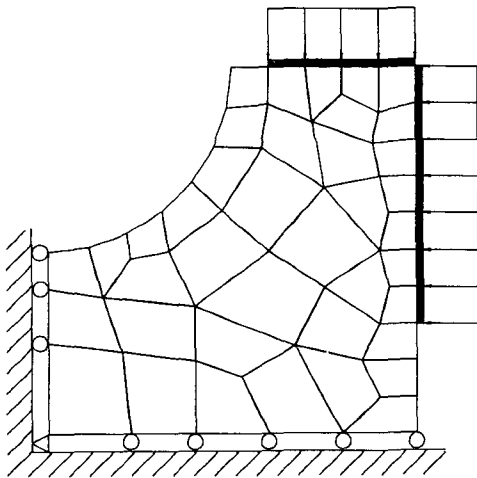


Fig. 4 Finite element model for sensitivity analysis of continuum with a half circular groove

5. 결 론

본 연구에서는 하중경계조건의 변화에 따른 연속체의 거동변화에 주안점을 두고 이를 형상설계민감도해석으로 해결하였다. 먼저 정의된 문제는 탄성 변형하의 연속체 거동을 경계적분 및 영역전분형의 범함수로, 시스템상태방정식을 유한요소방정식으로 기술하는 것으로 제한하였다. 이러한 조건하에서 현재 연구대상은 기존의 형상최적화문제와 달리 연속체의 전체형상은 변하지 않고 설계변수로 정의된

연속체의 경계만 변하는 문제로 형상설계민감도식은 경계변화의 점선성분만으로 표현되었다. 또한, 연속함수라는 가정하에 민감도결과식은 보조시스템과 단지 1차미분까지만 고려한 경제적분형으로 표현되었다.

유도된 형상설계민감도의 정확성을 입증하기 위하여 두 개의 예제를 선정하여 경계조건의 변화에 따른 함수의 실제값의 변화와 민감도에 의한 예측값을 비교하였다. 비교결과로 제안된 민감도식은 하중경계조건의 변화에 따른 연속체의 거동을 잘 예측함을 볼 수 있었다. 본 연구에서 시스템상태방정식은 탄성지배방정식, 범함수는 경계에서의 변형으로 기술된 예제들을 다루었으나 기계공학에서 경계조건의 변화에 따른 범함수로 기술된 시스템의 상태를 예측하고자하는 모든 문제에도 현재의 방법론이 적용이 가능하다. 그러므로, 실제 응용관점에서 탄성변형외의 다른 문제들에 적합하도록 현 연구를 확장할 필요가 있다. 또한, 상태방정식의 수치해로서 본 연구는 유한요소법을 사용하였으나, 연속체의 해석에 현재 많은 연구가 진행 중인 경계요소법을 적용하는 경우의 형상설계민감도도 앞으로 연구할 과제이다.

후 기

본 연구는 한국과학재단의 지원으로 수행된 연구의 일부본이며 본 연구에 많은 도움을 준 금요공동 김경훈 교수님과 이호섭군에게 감사한다.

참고문헌

- (1) Zienkiewicz, O.C. and Campbell, J.S., 1973, "Shape Optimization and Sequential Linear Programming," in Optimum Structural Design, Wiley, New York, pp. 109~126.
- (2) Haftka, R.T. and Grandhi, R.V., 1986, "Structural Shape Optimization-A Survey," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 57, pp. 91~106.
- (3) Cea, J., 1981, "Problems of Shape Optimal Design," in Optimization of Distributed Parameter Structures, Sijthoff-Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands, pp. 1005~1048.
- (4) Zolesio, J.P., 1981, "The Material Derivative Method for Shape Optimization," in Optimization of Distributed Parameter Structures, Sijthoff-Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands, pp. 1152~1194.
- (5) Choi, K.K. and Haug, E.J., 1983, "Shape Design Sensitivity Analysis of Elastic Structures," Journal of Structural Mechanics, ASCE, Vol.11, pp. 231~269.
- (6) Dems, K. and Mroz, Z., 1984, "Variational Approach by Means of Adjoint Systems to Structural Optimization and Sensitivity Analysis- II. Structural Shape Variation," International Journal of Solids and Structures, Vol. 20, pp. 527~552.
- (7) Kikuchi, N., Chung, K.Y., Torigaki, T. and Taylor, J.E., 1986, "Adaptive Finite Element Methods for Shape Optimization of Linearly Elastic Structures," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.57, pp. 67~89.
- (8) Choi, J.H. and Kwak, B.M., 1988, "Boundary Intergral Equation Method for Shape Optimization of Elastic Structure," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 26, pp. 1579~1595.
- (9) 최주호, 1987, 경계적분방정식을 이용한 형상 최적설계, 박사학위논문, 한국과학기술원.
- (10) Phelan, D.G., 1989, "Sensitivity Analysis of Linear Systems Using Domain Parameterization and Mixed Mutual Energy Principal," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 77, pp. 31~59.
- (11) Haug, E.J., Choi, K.K. and Komkov, V., 1984, Design Sensitivity Analysis of Structural Systems, Academic Press.
- (12) Zienkiewicz, O.C., 1977, "The Finite Element Method," McGraw-Hill.
- (13) Bathe, K.J., 1982, "Finite Element Procedures in Engineering Analysis," Prentice Hall.
- (14) Bertsekas, D.P., 1982, "Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods," Academic Press
- (15) Fung, Y.C., 1965 "Foundaton of Solid Mechaics," Prentice-Hal.