

〈論 文〉

## 이형단면 코일 스프링의 응력해석

이인혁\* · 한동철\*\*

(1991년 3월 22일 접수)

### Stress Analysis of a Coil Spring with Nonlinear Section

In-Hyuk Lee, Dong-Chul Han

**Key Words:** Coil spring(코일스프링), Stress Analysis(응력해석), Noncircular Section(비원형 단면), Nonlinear Deformation(비선형변형), Warping(와핑)

#### Abstract

The deformation of coil spring with noncircular section, which is used in the engine valve of automobiles under the applied load is usually accompanied by sectional warping and additional displacements of geometric center. In this study the isoparametric beam element formulations are modified and expanded to consider these two effects. To verify these formulations, simple torsion tests are made and compared with the analysis results. For the case of the zero-pitch spring, the stress distributions of oval and circular section are coincided with those of the analysis using the solid elements. Cylindrical coil springs with oval section are analyzed. These results are agreed with those of Nagaya.

#### 1. 서 론

코일스프링은 시스템의 강성을 유지시키고 거동을 제한시키며 댐퍼와 맞물려 외부에서 가해지는 충격을 완충시켜주는 기계요소로서 널리 사용되고 있다.

예전에는 원형단면스프링의 사용이 주종을 이루었으며 이 형태의 스프링에 대해서는 탄성학에서 제시된 몇가지 이론을 사용하여 간단히 해석할 수 있었다<sup>(1)</sup>. 그러나 계란형단면과 같은 특수한 단면을 가지는 스프링의 경우에는 경계조건을 만족하는 와핑해를 해석적방법으로 구할 수 없기 때문에 수치적방법을 사용하여 스프링을 해석할 수 밖에 없다.

Fig. 1은 본 연구의 해석대상이 되는 계란형단면

스프링의 모양을 나타낸 그림이다. 계란형 단면 코일스프링은 현재 몇몇 자동차의 흡배기 밸브의 밸브스프링으로 사용되고 있다. 이러한 비원형 스프링은 단면의 무게중심과 전단중심이 일치하지 않아서 변형시 와핑현상이 존재한다. 지금까지는 주로 Nagaya<sup>(2)</sup>에 의해 제시된 푸리에전개평균법이나,

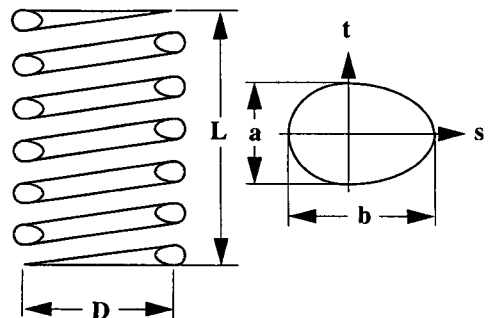


Fig. 1 Oval spring configuration

\*서울대학교 대학원 기계설계학과

\*\*정희원, 서울대학교 기계설계학과

입체요소를 사용한 유한요소해석법을 사용하여 해석해 왔다. 그러나 Nagaya의 방법은 스프링의 형태가 원통형인 경우에만 적용할 수 있고, 입체요소를 사용하여 유한요소해석하는 것은 스프링의 3차원으로 휘어진 형태에 적용하기에는 난점이 있다. 따라서 피치가 없는 스프링의 해석에는 효과적이거나 실제 사용되는 피치가 있는 스프링의 해석에 적용하기는 어렵다.

본 연구에서는 와핑과 두 단면중심의 불일치에 의해 발생하는 기하중심의 이동을 고려한 등매개변수보요소를 개발하여 스프링단면의 응력해석을 수행하고 그 결과를 다음과 같이 검증할 것이다. 우선 본 연구에 사용된 보요소가 이 두 효과를 효과적으로 표현하고 있는지를 확인하기 위해서 간단한 비틀림실험과 비교할 것이다. 또한 2차원문제에 대해서 입체요소를 이용한 결과와 비교하고, 원통형 스프링모델의 해석결과를 Nagaya의 해석결과와 비교함으로써 실제 스프링해석에 효과적으로 적용될 수 있음을 보일 것이다.

## 2. 등매개변수 보요소(Isoparametric beam element)의 정식화

### 2.1 기하중심과 전단중심

기본적인 보요소의 가정에 의해, 단면위 임의의 점의 변위들과 응력들은 이 변위들의 평균값인 평균변위들과 응력들의 합력으로 대치된다. 또한 이 평균변위들과 합력들은 보요소의 절점에 작용하게 된다.

그러나 전단중심과 기하중심이 일치하지 않는 경우에는 평균변위들과 합력들의 작용점이 전단중심과 기하중심에 나누어져 있기 때문에 합력들과 평균변위들을 한 점에 일치시키는 것이 필요하다. Bo-Zhen Chen과 Yu-Ren Hu<sup>(3)</sup>는 이러한 문제를 해결하기 위해 전단중심에 작용하는 합력들과 평균변위들을 기하중심으로 이동시켰다. 그러나 이들은 단면방향의 평균변위들과 전단방향합력들을 기하중심에 위치시켜 물리현상과 일치하지 않았다.

본 연구에서는 평균변위들과 합력들을 Fig. 2(a), (b)와 같이 위치시켰다. 이와 같이 위치시킨 경우에 대해 전단중심의 평균변위들과 합력들을 무게중심으로 이동시킨 것을 Fig. 2(a), (b)의 오른쪽에 나타내었다.

### 2.2 와핑함수와 와핑자유도

와핑은 비틀림모멘트에 의해 발생하는 추가적인 축방향의 변위이다. Vlasov<sup>(4)</sup>는 이 와핑량을, 축방향 비틀림량의 변화율과 와핑함수의 곱으로 가정하였다. Kollbrunner와 Hajdin은 이 가정을 일반화시켜 식 (1)과 같이 와핑량  $w$ 를 와핑함수와 와핑자유도의 곱으로 나타내었다<sup>(5)</sup>.

$$w(r, s, t) = \Psi_w(s, t) \Theta(r) \quad (1)$$

위 식에서  $r, s, t$ 는 요소방향의 좌표계이고  $\Theta$ 는 와핑자유도를 나타낸다. 타원형이나 정삼각형, 직사각형 등 특정한 형태의 단면에 대한 와핑함수는 여러 탄성학책에서 이론적으로 제시되어 있다<sup>(5)</sup>. Bathe는 사각형단면의 외와핑함수를 정사각형단면에 대한 와핑함수와 충분히 가느다란 직사각형단면에 대한 근사된 와핑함수를 중첩한 형태로 가정하여, 이를 선형과 비선형해석 유한요소해석에 적용하였다<sup>(6)</sup>. 그러나 단면의 모양이 임의의 형태를 가지고 있는 경우에 대해서는 단면의 와핑경계조건을 만족하는 해를 일반적인 형태로 구할 수 없다. Nagaya<sup>(2)</sup>는 단면을 여러개의 삼각형조각으로 나누고, 이 삼각형에 대해서 경계조건을 푸리에 전개함으로써 일반적인 모양의 단면에 대한 와핑함수의 근사해를 구하였다. 본 연구에서는 Nagaya가 제시한 방법을 채택하여 계란형단면에 대한 와핑함수를 구하였다.

### 2.3 등매개변수 보요소의 기본양태

Fig. 3와 같이  $N$ 개의 절점을 가지는 등매개변수 보요소에 대해서 정식화해보자. 정식화에서 각 요소의 변수에 대한 표시규약은 특별한 언급이 없으면 Bathe<sup>(7)</sup>의 표시규약을 따랐다. Fig. 3에서  $V_k^s, V_k^t$ 는 각각 임의의 절점  $k$ 에서  $(r, s, t)$ 방향의 단위벡터를 나타내고,  $G_1, G_2, \dots, G_n$ 은 절점을 가리킨다.  $S_1, S_2, \dots, S_n$ 은 절점이 속한 단면의 전단중심을 나타낸다.

초기상태에서는 변위가 없으므로 와핑과 두 중심의 불일치에 의한 효과가 나타나지 않는다. 그러므로 초기상태에서 요소 내부의 임의의 점  $(r, s, t)$ 의 위치벡터는 Bathe에 의해 제시된 일반적인 보요소의 식과 동일하다.

$${}^0x(r, s, t) = \sum_{k=1}^N {}^0x^k + s \sum_{k=1}^N h_k {}^0V_k^s + t \sum_{k=1}^N h_k {}^0V_k^t \quad (2)$$

식 (2)에서  $h_k$ 는 절점  $k$ 의 보간함수이다. 또한

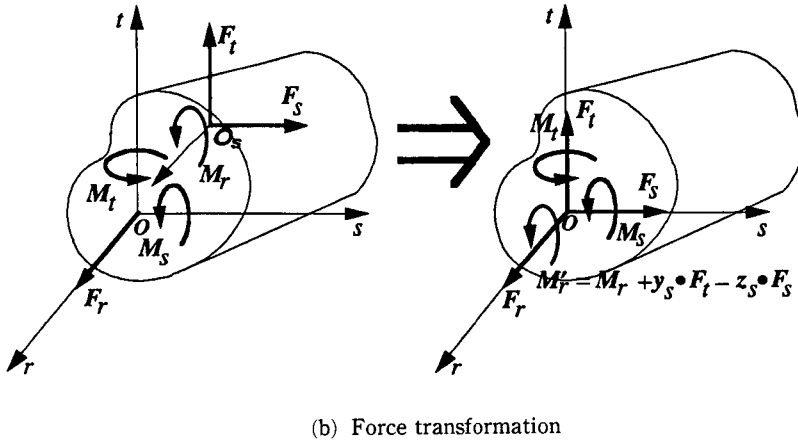
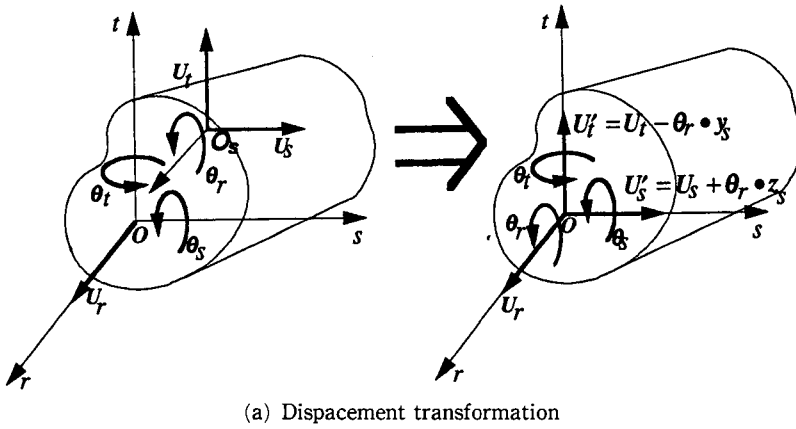


Fig. 2 Forces and displacements transformation of arbitrary section

각 방향벡터의 원편윱침자는 현재의 시간상태가 0임을 의미한다. 이와 같은 요소가 다음과 같은 가정하에서 변형을 한다고 가정하자.

(1) 초기상태에서 요소의 단면축에 수직인 직선은 보가 변형하는 동안에도 수직을 유지한다.

(2) 단면의 와핑량은 미소하다. 즉, 변형된 단면의 굽힘평면에 대한 정사영은 초기상태의 단면과 동일하다.

가정 1은 오일러 보가정이다. 스프링의 경우에는 비틀림에 의한 변형이 대부분을 차지하며, 전단력에 의한 변형은 미미하기 때문에, 가정 1은 스프링의 해석에 무리가 없다. 가정 2는 보요소의 일반적인 가정에 미소와핑 가정을 추가하여 확장시킨 것이다<sup>(8)</sup>. 가정 2에 의해서 임의의 평형상태에서 보요소의 와핑량은 와핑에 대한 Vlasov가정을 따른다. 이러한 가정에 의해서, 보요소가 시간  $t$ 의 상

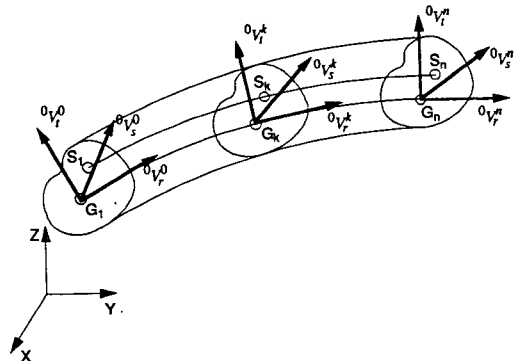


Fig. 3 Initial configuration of  $N$ -node curved isoparametric beam element

태로 변형하였다고 하자. 그러면 초기상태와 달리 와핑현상과 두 중심의 불일치에 의한 영향이 추가되어야 한다.

이 두 영향을 고려하여 Bathe의 식을 수정하면 시간  $t$ 에서 요소내부의 임의의 점  $(r,s,t)$ 의 위치 벡터는 식 (3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} {}^t x(r,s,t) &= \sum_{k=1}^N {}^t x^k + s \sum_{k=1}^N h_k {}^t V_s^k \\ &+ t \sum_{k=1}^N h_k {}^t V_t^k + \sum_{k=1}^N h_k \Psi_{\omega}^t \Theta^t V_r^k \quad (3) \\ &+ \sum_{k=1}^N h_k [{}^t \theta^k \cdot {}^t V_r^k - y_{sk} {}^t V_t^k + z_{sk} {}^t V_s^k] \end{aligned}$$

$y_{sk}, z_{sk}$ 는 절점  $k$ 에서 전단중심의  $s, t$ 방향 좌표,  $\Psi_{\omega}$ 는 와핑함수,  $\Theta$ 는 와핑자유도이다. 식 (3)의 우변 네번째항은 와핑량을 나타내고 마지막항은 전단중심의 평균변위들이 기하중심으로 이동된 양을 나타낸 것이다. 식 (3)에서  ${}^t \theta$ 는 시간 0에서 시간  $t$ 까지 요소의 단면이 회전한 량이다. 초기상태에서 시간  $t$ 에 이르는 변형  ${}^t u$ 은 식 (4)와 같다.

$${}^t u(r,s,t) = {}^t x - {}^0 x \quad (4)$$

또한 시간  $t$ 에서 절점  $k$ 의 방향벡터  ${}^t V_r^k, {}^t V_s^k, {}^t V_t^k$ 와 초기상태의 방향벡터  ${}^0 V_r^k, {}^0 V_s^k, {}^0 V_t^k$ 사이에는 식 (5)가 성립한다.

$${}^t V_s^k = {}^t R^k \cdot {}^0 V_s^k, \quad {}^t V_t^k = {}^t R^k \cdot {}^0 V_t^k \quad (5)$$

식 (5)에서  ${}^t R^k$ 는 회전행렬이다. 이 회전행렬을 2차항까지만 취하여 근사하면 식 (6)과 같다<sup>(9)</sup>.

$${}^t R^k = \left\{ 1 + [{}^t \theta^k \times] + \frac{1}{2} [{}^t \theta^k \times ({}^t \theta^k \times)] \right\} \quad (6)$$

식 (6)에서  $\times$ 는 외적 (cross-product)를 의미한다. 요소가 시간  $t$ 상태에서 시간  $t + \Delta t$  상태로 이행되면, 위치벡터  ${}^{t+\Delta t} x$ 는 식 (3)과 같은 방식으로 나타낼 수 있고 이에 따른 변위증분  $\Delta u$ 는 식 (7)과 같다.

$$\Delta u = {}^{t+\Delta t} x - {}^t x \quad (7)$$

변위증분  $\Delta u$ 는 선형항  $\Delta u_i$ 과 비선형항  $\Delta u_n$ 으로 나눌 수 있다.

$$\Delta u = \Delta u_i + \Delta u_n \quad (8)$$

변형률을 구하기 위해서 시간  $t$ 까지의 변형  ${}^t u$ 를 초기상태의 고정좌표계에 대해 미분하면,

$$\frac{\partial {}^t u_i}{\partial {}^0 x_j} \equiv {}^0 J_{j1}^{-1} \frac{\partial {}^t u_j}{\partial r} + {}^0 J_{j2}^{-1} \frac{\partial {}^t u_j}{\partial s} + {}^0 J_{j3}^{-1} \frac{\partial {}^t u_i}{\partial t} \quad (9)$$

또한 변위증분들을 초기상태의 고정좌표계에 대해 미분하면,

$$\frac{\partial \Delta u_{ij}}{\partial {}^0 x_j} \equiv {}^0 J_{j1}^{-1} \frac{\partial \Delta u_{ij}}{\partial r} + {}^0 J_{j2}^{-1} \frac{\partial \Delta u_{ij}}{\partial s} + {}^0 J_{j3}^{-1} \frac{\partial \Delta u_{ij}}{\partial t} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \Delta u_{ni}}{\partial {}^0 x_j} \equiv {}^0 J_{j1}^{-1} \frac{\partial \Delta u_{ni}}{\partial r} + {}^0 J_{j2}^{-1} \frac{\partial \Delta u_{ni}}{\partial s} + {}^0 J_{j3}^{-1} \frac{\partial \Delta u_{ni}}{\partial t} \quad (11)$$

위 식들에서  ${}^0 J$ 는 초기상태에서 구해진 Jacobian값이다.

### 2.4 평형방정식의 구성

물체가 초기상태에서 시간  $t$ 의 상태로 변형하였을 때 변형률  ${}^t \epsilon_{ij}$ 와 물체가 시간  $t$ 상태에서 시간  $t + \Delta t$ 상태로 이행될 때 변형률증분  ${}^0 \epsilon_{ij}$ 는 아래와 같다.

$${}^t \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} ({}^t u_{i,j} + {}^t u_{j,i} + {}^t u_{k,i} {}^t \delta u_{k,j}) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} {}^0 \epsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i} + \Delta u_{k,i} {}^0 \delta u_{k,j} \\ &+ {}^0 \delta u_{k,j} \Delta u_{k,i} + \Delta u_{k,i} \Delta u_{k,j}) \quad (13) \end{aligned}$$

$${}^0 \delta u_{ij} = \frac{\partial {}^t u_i}{\partial {}^0 x_j}, \quad \Delta u_{ij} = \frac{\partial \Delta u_i}{\partial {}^0 x_j}$$

식 (13)에 식 (8)을 대입하고 이를 선형변형률 증분  ${}^0 \epsilon$ 와 비선형 변형률 증분  ${}^0 \eta$ 으로 나누면 다음과 같다.

$${}^0 \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i}) \quad (14)$$

$$+ \frac{1}{2} (\Delta u_{ik,i} {}^0 \delta u_{k,i} + {}^0 \delta u_{k,i} \Delta u_{ik,j})$$

$${}^0 \eta_{ij} = \frac{1}{2} (\Delta u_{ni,j} + \Delta u_{nj,i}) \quad (15)$$

$$+ \frac{1}{2} (\Delta u_{nk,i} {}^0 \delta u_{k,j} + {}^0 \delta u_{k,i} \Delta u_{nk,j})$$

$$+ \frac{1}{2} (\Delta u_{ik,i} \Delta u_{ik,j})$$

식 (14)와 식 (15)은 참고문헌<sup>(9)</sup>의 형태와 같으나 비선형변위증분  $\Delta u_n$ 에 와핑항과 두 중심의 불일치에 의한 항이 추가되어 있다는 점이 참고문헌<sup>(9)</sup>와 다르다. 물체가 시간  $t$ 상태에서 시간  $t + \Delta t$ 상태로 이행될 때, 응력의 증분을  ${}^0 S$ 라 하면 응력증분과 변형률 증분은 식 (16)과 같은 관계를 가진다.

$$\begin{aligned} {}^0 S &= C {}^0 \epsilon \\ C &= T^T \bar{C} T \end{aligned}$$

위 식에서  $T$ 는 좌표변환행렬이고  $\bar{C}$ 는 요소좌표계를 기준으로 한다는 것을 의미 한다. 만약 재료 가 등방성이고 요소좌표계  $(r,s,t)$ 가 직각좌표계이

면  $\bar{C}$ 는 식 (17)과 같다.

$$diag(\bar{C}) = (E, G, G) \quad (17)$$

참고문헌(7)에 제시된 Total Lagrangian 정식화를 통해 얻어진 평형방정식은 다음과 같다.

$$(\delta K_L + \delta K_{NL}) \Delta \hat{u}^{(i)} = {}^{i+4t}R - \delta^{+4t}F^{(i-1)} \quad (18)$$

위 식에 사용된 각 행렬들을 구하면 다음과 같다. 우선 선형 접강성행렬(linear tangent stiffness matrix)은 식 (14)를 이용하면 참고문헌(9)과 같은 형태로 주어지나 7번째 자유도에 해당하는 항에와 평행이 추가된다. 이 행렬을 구하기 위해 식 (14)를 행렬의 형태로 바꾸어 나타내면 식 (19)와 같다.

$$\begin{aligned} {}_0e &= \delta B_L \Delta \hat{u} \quad (19) \\ \delta B_L &= \delta B_{L0} + \delta B_{L1} \\ \Delta \hat{u}^k &= [\Delta u_1^k, \Delta u_2^k, \Delta u_3^k, \Delta \theta_1^k, \Delta \theta_2^k, \Delta \theta_3^k, \Delta \theta^k] \\ k &= 1, \dots, N \end{aligned}$$

위 식에서  $\Delta \hat{u}$ 은 결점의 변위를 뜻하고 윗첨자  $k$ 는 결점의 번호이다. 따라서 선형강성행렬  $K_L$ 은 식 (20)과 같다.

$$\delta K_L = \int_{0v} {}^t B_L^T C \delta B_L {}^0 dN \quad (20)$$

비선형 접강성행렬은 다음과 같은 등식에서 구할 수 있다.(9)

$$\delta \Delta \hat{u}^T \delta K_{NL} \Delta \hat{u} = \int_{0v} \delta S_{ij} \delta \Delta \eta_{ij} {}^0 dN \quad (21)$$

위 식에서  $\delta$ 는 변분(vaiation)이다. 식 (15)의 변분을 취하고 식 (21)의 우변에 대입하면 최종적인 비선형 접강성행렬이 구해진다.

$$\begin{aligned} \delta K_{NL} &= \delta K_{NL1} + \delta K_{NL2} + \delta K_{NL3} \quad (22) \\ \delta K_{NL1} &= \frac{1}{2} \sum_m \sum_n \int_{0v} \delta S_{mn} (\delta B_{NLmn} + \delta B_{NL1mn}) d^0 V \\ \delta K_{NL2} &= \frac{1}{2} \sum_m \sum_n \int_{0v} \delta S_{mn} (\delta B_{NL2mn} + \delta B_{NL2mn}) d^0 V \\ \delta K_{NL3} &= \int_{0v} \delta B_{NL3}^T \delta S \delta B_{NL3} d^0 V \end{aligned}$$

위 식에서  $\delta B_{NL1}$ ,  $\delta B_{NL2}$ ,  $\delta B_{NL3}$ 는 각각 식 (15)의 우변 첫째항, 둘째항, 셋째항을 변분하여 구성된 행렬을 의미한다.  $\delta K_{NL1}$ ,  $\delta K_{NL2}$ 는 참고문헌(9)와 같은 형태의 행렬이고,  $\delta K_{NL3}$ 는 참고문헌(7)에서 주어진 비선형 접강성행렬과 같은 형태이나 세행렬 모두 와핑항과 두 중심의 불일치에 의한 항이 포함되

어 있다. 내력항  $\delta^{+4t}F^{(i-1)}$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\delta^{+4t}F^{(i-1)} \\ &= \int_r T^{*T} \left( \int_{s,t} {}^t B_L^{i-4t} \hat{S} \det(Js) \det(Jt) ds dt \right) \\ &T^* \det(Jr) dr \quad (23) \end{aligned}$$

위 식에서  $T^*$ 는 두 중심의 불일치에 의한 합력의 이동을 표현하는 행렬이고  $Jr$ ,  $J_s$ ,  $J_t$ 는 각각  $r$ ,  $s$ ,  $t$  방향의 자코비안이다.

### 2.5 수치해법

구성된 요소강성행렬은 각각의 절점마다 7개의 자유도를 가지고 있다. 이 구성된 요소강성행렬들은 전체강성행렬과 결합되기 이전에 와핑자유도를 제거하여 6개의 자유도를 가지도록 행렬응축시켰다. 이렇게 행렬응축시킨 이유는 단순히 계산상의 편의를 위해서이다. 행렬을 응축시키는 과정은 참고문헌(10)에 자세히 서술되어 있다.

요소의 절점은 모두 4개를 사용하였다. 스프링은 3차원곡선으로 이루어져 있으므로 4개를 사용하지 않으면 스프링의 모양을 제대로 표현할 수 없다.

일반적으로 요소강성행렬을 적분하는데 많이 사용되는 수치 적분은 가우스적분법이다. 그러나 단면이 유니형이나 직사각형이 아니기 때문에 가우스적분법을 단면의 전체영역에 대해서 적용하면 선택한 적분차수에 따라 상당히 큰 오차를 가지게 된다.

본 연구에서는 이러한 오차를 줄이기 위해서 단면에 대한 적분영역을 반경  $R$ 과 원주각  $\theta$ 평면에 대응시켜 적분하면서  $\theta$ 방향으로 여러개의 부적분 구간으로 나누어 각각의 적분구간에 대해서 심프슨 적분법이나 가우스적분법을 적용하였다. 본 연구에서는  $\theta$ 방향에 대한 적분은 가우스적분법을 이용하였다.  $r$ 방향의 적분차수는 스프링이 평면에 놓여 있을 때, 즉 피치가 0인 스프링에 대해서는 반드시 2차이상이어야 하고 스프링의 피치가 0이 아닐 때에는 3차이상을 사용하여야 한다. 그 이유는 적분점들로 스프링의 모양을 표현할 수 있어야 하기 때문이다.

식 (18)은 Newton-Raphson법의 형태로 되어 있다. 본 연구에서는 Full Newton-Raphson법을 이용하였다.

### 3. 실험

계란형 단면의 비틀림 응력 분포를 알아 보기 위해서 간단한 비틀림 실험을 하였다. Fig. 4은 비틀림 실험기에 계란형 단면을 가지는 스프링 강재를 장치한 모양이다.

실험은 Fig. 4과 같이 계란형 단면의 여섯 군데, 즉  $x$ 축을 기준으로  $0^\circ, 90^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 270^\circ$  점에서 실시하였다. 스트레인게이지는  $45^\circ$  로젯형과 단축형을 사용하였고 각 측정점에 대해서 2~5회 실시하였다.

### 4. 해석 결과

#### 4.1 외팔보모델의 해석

실험치와 비교해 보기 위해서 Fig. 5과 외팔보모델을 사용하였다. Fig. 5에서  $T=10\text{kgf}\cdot\text{m}$ ,  $A=2.055\text{mm}$ ,  $B=2.895\text{mm}$ 이고 요소의 절점은 등간격으로 4이다.

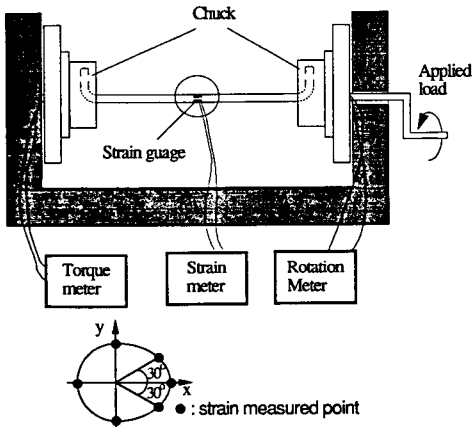


Fig. 4 Torsion test equipments of oval-shaped material

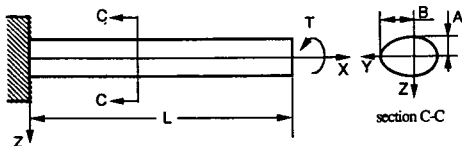


Fig. 5 Torsional analysis model of cantilever beam

Fig. 6는, 해석결과와 실험결과를  $\theta=0^\circ$ 에서의 해석결과로 나누어 무차원화시킨 것이다. Fig. 6에서 알 수 있듯이, 단면의 응력분포의 경향은 실험과 해석이 일치하였으며 값 또한 최대 10%정도 오차를 보였다. 이 오차들은 첫째, 단면의 크기가 매우 작아 스트레인 게이지를 붙이기가 어려웠고, 둘째로 스프링의 표면이 스폿피닝되어 있어 매우 거칠었기 때문에 생긴 것으로 보인다. 그러므로 본 연구에서 개발한 보요소는 단면의 와핑에 의한 영향과 두 중심의 불일치에 의한 영향을 잘 표현하고 있음을 할 수 있다.

#### 4.2 피치가 없는 스프링의 해석

Fig. 7은 입체요소를 사용하여 해석한 문헌<sup>(11)</sup>과 같은 치수를 사용하여 모델링한 그림이다. 이 해석 모델의 경계조건은 시작절점은 여섯방향 모두 고정이고 하중이 가해지는 가운데절점은 자유단이다. 원형단면의 경우에는 단면의 지름이 2mm이고 계란형단면의 경우  $A=1.826\text{mm}$ ,  $B=2.556\text{mm}$ 이다. 요소의 절점수는 4개이고 등간격으로 분할하였다.

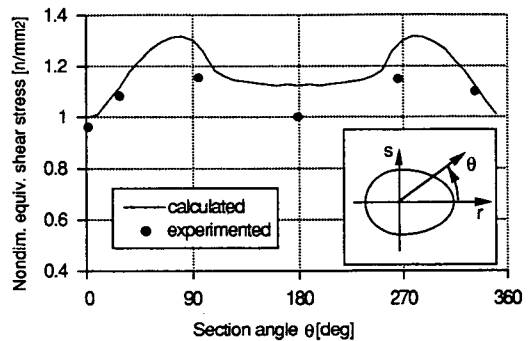


Fig. 6 Comparison of analysis and experiment

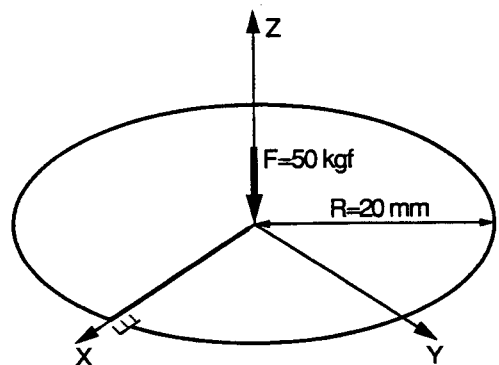


Fig. 7 Analysis model of spring with zero pitch

본 연구의 해석결과와 문헌<sup>(11)</sup>의 결과를 Fig. 8와 Fig. 9에 비교하였다.

Fig. 8와 Fig. 9에서 보면, 원형단면의 경우와 계란형단면의 경우 모두 각 결과가 문헌<sup>(11)</sup>과 잘 일

치하고 있음을 알 수 있다. 계란형단면의 경우 최대 전단응력의 크기와 위치는 본 논문의 결과는 50.2°에서 57.56kgf/mm<sup>2</sup>이고 문헌<sup>(11)</sup>의 해석에서는 46°에서 57.6kgf/mm<sup>2</sup>정도이다. 설계식을 사용하여 계산한 값은 58.5kgf/mm<sup>2</sup>이다.

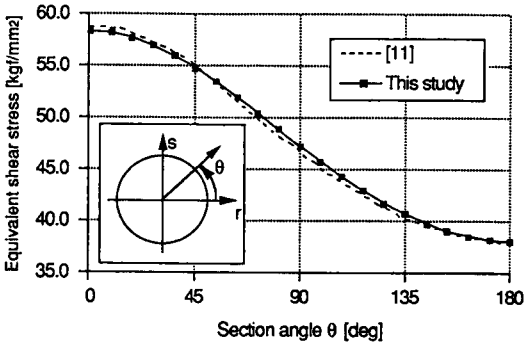


Fig. 8 Comparison of circular section stresses

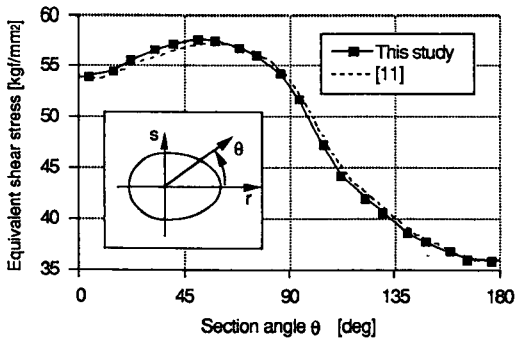


Fig. 9 Comparison of oval section stresses

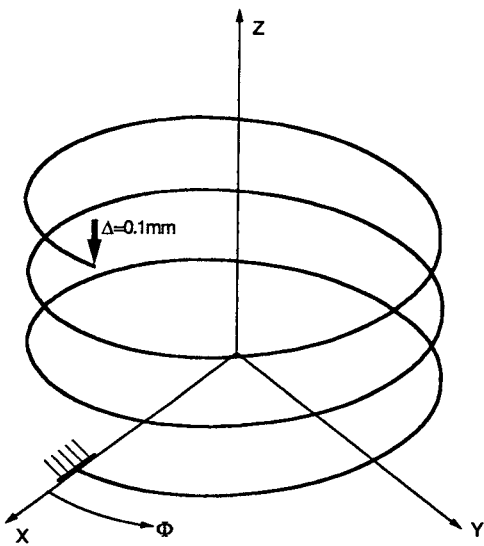


Fig. 10 Analysis model of coil spring

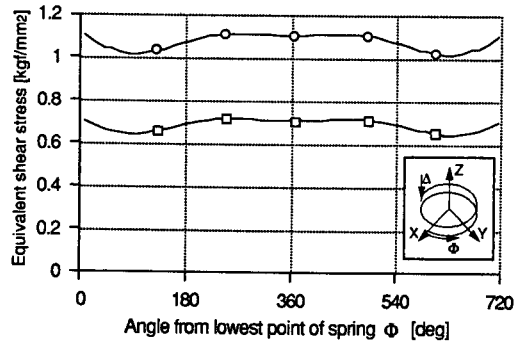


Fig. 11 Equivalent shear stress distribution along the spring when number of turns is 2

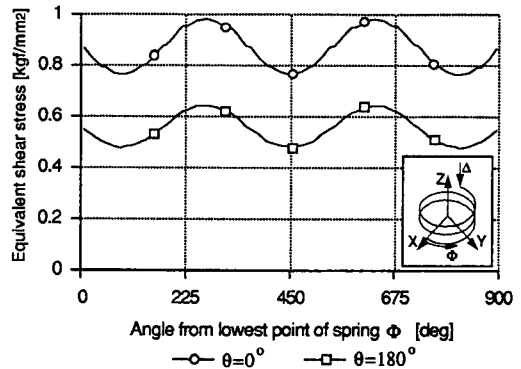


Fig. 12 Equivalent shear stress distribution along the spring when number of turns is 2.5

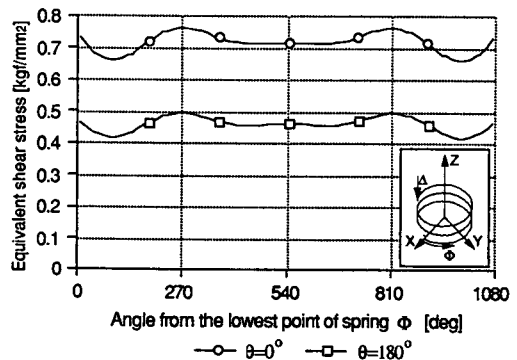


Fig. 13 Equivalent shear stress distribution along the spring when number of turns is 3

### 4.3 피치가 있는 코일스프링의 해석

Fig. 10은 유효권수가 3인 코일스프링의 해석모델을 나타낸 것이다. 스프링의 시작점에서 고정이고 끝점에서는 변위가 가해진  $z$ 방향을 제외한 나머지 방향에 대해서만 고정이다. 끝점의 경계조건을 이와같이 주는 이유는 하중이 가해지는 절점의 위치가 끝권(end turn)이 시작되는 점과 일치하기 때문이다. 실제 사용되고 있는 스프링은 이점에서 끝권과 용접이 되어있기 때문에 다른 방향으로 움직일 수 없다. 하중은 이 점에서 변형량으로 주었다. 이러한 하중은 실제의 경우와 일치하는 것이다. 이 모델의 경우  $A=2.055\text{mm}$ ,  $B=2.895\text{mm}$ 이고 요소의 절점수는 4개이다.

Fig. 11, 12, 13는 스프링의 권수가 각각 2, 2.5, 3 일 때 스프링 소선을 따라 전단응력이 변화하는 양상을 나타낸 그림이다. 전단응력은 Nagaya의 해석과 비교하기 위해 단면각  $\theta$ 가  $0^\circ$ ,  $180^\circ$ 인 지점의 응력을 나타내었다. 위 그림들에서 보면 응력의 최대치는 하중이 가해지는 지점에서  $3/4$ 권인 지점, 즉  $\phi=270^\circ$ 만큼 돌아간 지점에서 발생한다. 이는 Nagaya가 제시한 결과와 일치하는 것이다.

## 5. 결 론

본 연구에서는 단면의 비대칭성에 의해 발생하는 단면의 두 중심의 불일치에 의한 영향과 단면이 원형이 아님으로 인해서 발생하는 와핑에 의한 영향을 효과적으로 고려한 보요소를 개발하였다. 개발된 보요소가 실제로 두 영향을 효과적으로 고려하고 있는지를 검증하기 위해서 간단한 비틀림 실험을 행하였고 두 결과는 잘 일치하였다. 또한 해석 결과의 실제 사용에 있어서의 타당성을 검증하기 위하여 2차원문제와 원통형스프링의 경우에 대해서 참고문헌들과 비교하였는 바, 잘 일치함을 확인하였다.

본 연구에서 제시된 보요소는 특별한 제한이 존재하지 않으며 따라서 모든 형상의 스프링에 대해서 적용할 수 있다.

## 참고문헌

- (1) Wahl, A.H., 1963, Mechanical springs, McGraw-Hill Book Company.
- (2) Nagaya, K., 1987, "Stress in a Helical Spring of Arbitrary Cross Section with Consideration of End Effects," J. Vib. Acout. Str. Relib. Des, Vol. 109, pp. 289~301.
- (3) Chen, B.Z. and Hu, Y.R., 1988, "The Torsional Stiffness Matrix of a Thin Walled Beam and its Application to Beams Unde Combined Loading," Comp. Struct. Vol.28.
- (4) Vlasov, 1961, Thin-walled Elastic eams, Isenral Program for Scientific Translations Ltd.
- (5) Sokolnikoff, I., 1956, Mathematical Theory of Elasticity, McGraw Hill.
- (6) Bathe, K.J. and Chaudhary, A., 1982, "On the Displacement Formulation of Torsion of Shafts with Rectangular Cross-Cection," Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.18, pp. 1565~1568.
- (7) Bathe, K.J., 1982, Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice Hall.
- (8) Alte Gjelsvik, 1981, The Theory of Thin Walled Bars. John Wiley & Sons.
- (9) Dverkin, E., 1988, "On a Nonlinear Formulation for Curved Timoshenko Benam Elements Considering Large Displacement/Rotation Increments," Int. J. Num. Meth. Eng., pp. 1597~1613.
- (10) Yang, Y.B. and McQuire, W., 1984, "A Procedure for Analysis Space Frames with Pratial Warping Restraint," Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 20.
- (11) 일본스프링기술연구회, 1989, 일본스프링기술연구회추계강연회, "이형단면선을 이용하는 코일스프링에 관한 조사위원회보고".