

〈論 文〉

# 선형계에 있어서의 잡음/신호비가 소음/진동원 규명에 미치는 영향

박정석\* · 김광준\*\* · 이종원\*\*

(1991년 3월 14일 접수)

## The Effects of Noise/Signal Ratios on Noise/Energy Source Identification in Linear Systems

Jung-Seok Park, Kwang-Joon Kim and Chong-Won Lee

**Key Words :** Auto Spectrum(자기 스펙트럼), Cross Spectrum(상호 스펙트럼), Coherence Function(기여도 함수), Partial Coherence Function(부분 기여도 함수), Residual Spectrum(잔여 스펙트럼), Partial Coherent Output Spectrum(부분 기여 출력 스펙트럼), Noise/Signal Ratios(잡음/신호비)

### Abstract

The problems associated with noise/energy source identification using multiple input/single output model in linear systems are investigated. Partial coherence function is formulated for the model introducing a virtual force and extraneous noises into the conventional two input/single output system. The analytical results show that the partial coherence function in two input/single output linear system is the fuction of noise/signal ratios when multiple inputs are mutually coherent and extraneous noises exist. Parametric studies for ordinary and partial coherence functions are carried out to demonstrate the effects of noise/signal ratios for these functions.

#### 기호설명

- $G_{ii}$  : 신호  $i$ 의 자기 스펙트럼
- $G_{ij}$  : 신호  $i$ 와 신호  $j$ 사이의 상호 스펙트럼
- $G_{ij,k}$  : 잔여 스펙트럼
- $G_{y,i}$  : 기여 출력 스펙트럼
- $G_{y,i,j}$  : 부분 기여 출력 스펙트럼
- $H, L$  : 주파수 응답함수
- $n_i(t)$  : 외부잡음
- $P, Q, R$  : 잡음/신호비
- $v_i(t), y_i(t)$  : 시간 영역에서의 신호
- $V_i, Y_i$  : 주파수 영역에서의 신호
- $\gamma_{ij}^2$  : 신호  $i$ 와 신호  $j$ 사이의 기여도 함수

$\gamma_{ij,k}^2$  : 부분 기여도 함수

### 1. 서 론

소음/진동 문제를 해결하기 위해 우선은 소음/진동원(noise/energy source)들을 알아내고 그 중에서 가장 많은 영향을 주는 소음/진동원을 판별하는 것이 중요하다. 더불어 소음/진동원들의 위치뿐만 아니라 각 소음/진동원들의 주파수 성분 및 크기를 파악할 수 있다면 효과적인 소음/진동 대책의 수립이 가능하게 된다. 소음/진동원의 위치를 파악하는 것은 주로 기술자의 경험 및 직관으로부터 결정되나 여러 소음/진동원들 중에서 가장 비중이 큰 소음/진동원들을 판별하는 데에는 여러가지 방법이

\*정회원, 한국과학기술원 생신공학과

\*\*정회원, 한국과학기술원 기계공학과

연구되어 왔다. 그 중 한가지 방법으로 다중입력/단일출력 모형을 이용한 신호해석법이 있는데 이는 구조물의 여러지점에서 측정된 소음/진동 신호들을 입력으로 간주하고 관측자의 위치에서 측정된 신호를 출력으로 간주한 뒤 다중입력/단일출력 모형을 세워 출력에 가장 많은 영향을 미치는 입력을 찾아내는 방법이다<sup>(1~4)</sup>. 다중입력/단일출력 모형을 이용한 소음/진동원 규명법으로는 입력들 사이의 상호상관(correlation)의 정도에 따라 주파수 응답함수(frequency response function)를 이용하는 방법과 부분 기여도 함수(partial coherence function)를 이용하는 방법으로 크게 나눌 수 있다<sup>(3)</sup>. 입력들 사이의 상호상관이 존재하지 않거나 아주 작은 경우에는 전자의 방법만으로도 비중이 큰 소음/진동원을 매우 효과적으로 알아낼 수 있으나 그렇지 않은 경우에는 후자의 방법을 사용하게 된다. 이는 특정 입력에서 임의의 다른 입력들의 선형적인 효과를 제거하였을 때 그 신호가 출력에 차지하는 파워, 즉 부분 기여 출력 스펙트럼(partial coherent output spectrum)을 각각 구한 뒤 비교해 봄으로써 비중이 가장 큰 소음/진동원을 찾아내는 방법이다<sup>(5~7)</sup>.

본 연구에서는 구조물이 순수한 선형계인 경우에 국한하여 선형 구조물의 여러지점에서 측정된 신호들을 기존의 방법과 같이 다중입력으로 간주하고 선형 구조물로부터 방사된 소음, 즉 관측자의 위치에서 측정된 신호를 출력으로 가정된 뒤 부분 기여도 함수를 적용하여 소음/진동원을 규명하였을 때 발생하는 결과를 이론적으로 해석하여 보았다.

2. 다중입력/단일출력 신호해석법을 이용한 소음/진동원 규명법의 기본개념

일반적인 다중입력/단일출력 문제를 풀기 위한 방법을 이해하기 위해 Fig. 1과 같은 2입력/1출력의 간단한 모형을 먼저 고려해 보기로 한다. Fig.

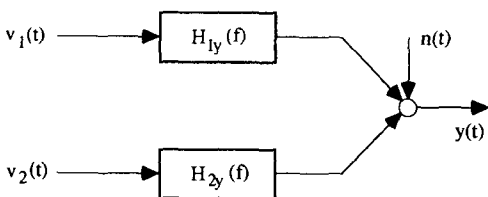


Fig. 1 Two-input/one-output model

1의 모형에서 입력  $v_1(t)$ 와  $v_2(t)$  사이에는 상호상관이 부분적으로 존재하며 입력들과 출력은 측정이 가능한 신호로서 평균이 0인 정상 불규칙 과정(stationary random process)이고 계는 상변수 선형계라 가정한다. Fig. 1로부터 입력  $v_1(t), v_2(t)$ 는 상변수 선형계  $H_{1y}(f), H_{2y}(f)$ 를 각각 통과한 후 외부잡음  $n(t)$ 와 합쳐져서 출력  $y(t)$ 를 구성하게 된다. 외부잡음  $n(t)$ 는 계의 비선형성, 비정상 불규칙 과정으로 인한 영향, 측정시의 잡음 등과 같은 여러가지 영향을 고려하여 첨가된 항으로서 이상적인 다중입력/단일출력 모형으로부터의 편차를 나타낸다. 이때 출력은 주파수 영역에서 다음과 같이 식(1)로 표현할 수 있다.

$$Y(f) = H_{1y}(f) \cdot V_1(f) + H_{2y}(f) \cdot V_2(f) + N(f) \quad (1)$$

만약 외부잡음과 입력들 사이에 상호상관이 존재하지 않는다고 가정하면 출력  $y(t)$ 의 자기 스펙트럼(auto spectrum)은 식(1)을 이용하여 식(2)와 같이 나타낼 수 있다. (이하 소문자는 시간 영역에서의 신호를, 대문자는 주파수 영역에서의 신호를 나타내며 표현의 단순화를 위해 주파수  $f$ 는 생략하기로 한다.)

$$G_{yy} = |H_{1y}|^2 G_{v_1v_1} + H_{1y}^* \cdot H_{2y} \cdot G_{v_1v_2} + H_{1y} \cdot H_{2y}^* \cdot G_{v_2v_1} + |H_{2y}|^2 \cdot G_{v_2v_2} + G_{nn} \quad (2)$$

여기서

$$G_{yy} = \frac{2}{T} \cdot E[Y^*(f, T) \cdot Y(f, T)]$$

$$G_{nn} = \frac{2}{T} \cdot E[N^*(f, T) \cdot N(f, T)]$$

$$G_{v_i v_j} = \frac{2}{T} \cdot E[V_i^*(f, T) \cdot V_j(f, T)] \quad i, j=1, 2$$

$Y(f, T)$ 는 신호  $y(t)$ 의 시간영역  $0 \leq t \leq T$ 에 걸친 유한 푸리에 변환(finite Fourier transform)을, \*는 공액 복소수를 나타내며  $E[ ]$ 는  $[ ]$ 값의 앙상블 평균(ensemble average)을 의미한다. 식(2)의  $G_{yy}$ 는 출력신호  $y(t)$ 의 주파수에 따른 평균 제곱값(mean square value)의 변화율을 의미하는데 우변의 두번째와 세번째항은 입력들 사이의 상호상관으로 인하여 발생하는 항임을 알 수 있다. 또한  $G_{v_1v_2}$ 는 신호  $v_1(t)$ 와  $v_2(t)$  사이의 상호 스펙트럼(cross spectrum)이라 하며 크기와 위상에 대한 정보를 포함하는 복소함수로서 두 신호 사이의 상호 파워(mutual power)의 척도를 나타낸다. 같은 방법으로 각각의 입력과 출력 사이의 상호 스펙트럼

은 식 (1)을 이용함으로써 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 G_{v_1y} &= \frac{2}{T} \cdot E[V_1^*(f, T) \cdot Y(f, T)] \\
 &= H_{1y} \cdot G_{v_1v_1} + H_{2y} \cdot G_{v_1v_2} \\
 G_{v_2y} &= \frac{2}{T} \cdot E[V_2^*(f, T) \cdot Y(f, T)] \\
 &= H_{1y} \cdot G_{v_2v_1} + H_{2y} \cdot G_{v_2v_2} \quad (3)
 \end{aligned}$$

한편 측정된 두 신호 사이의 상관관을 판단하는 척도로서 기여도 함수(coherence function)를 사용하는 데<sup>(6-8)</sup> 각각의 입력과 출력 사이의 기여도 함수는 식 (2), (3)으로부터 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \gamma_{v_1y}^2 &= \frac{|G_{v_1y}|^2}{G_{v_1v_1} \cdot G_{yy}} = \frac{|H_{1y} \cdot G_{v_1v_1} + H_{2y} \cdot G_{v_1v_2}|^2}{G_{v_1v_1} \cdot G_{yy}} \\
 \gamma_{v_2y}^2 &= \frac{|G_{v_2y}|^2}{G_{v_2v_2} \cdot G_{yy}} = \frac{|H_{1y} \cdot G_{v_2v_1} + H_{2y} \cdot G_{v_2v_2}|^2}{G_{v_2v_2} \cdot G_{yy}} \quad (4)
 \end{aligned}$$

기여도 함수는 0과 1사이의 값을 갖는데 0인 경우에는 두 신호가 서로 독립임을 나타내며 1인 경우에는 완전한 선형 종속성을 의미한다. 식 (4) 자체는 입력  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$ 가 출력에 차지하는 비율을 나타내고 있는데 각각의 입력이 출력에 차지하는 파워의 양을 정량적으로 파악하기 위해서는 다음의 기여 출력 스펙트럼을 이용하게 된다. 입력  $v_1(t)$ 와 출력 사이의 기여 출력 스펙트럼은 식 (5)와 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}
 G_{y \cdot v_1} &= \gamma_{v_1y}^2 \cdot G_{yy} \\
 &= |H_{1y}|^2 \cdot G_{v_1v_1} + H_{1y}^* \cdot H_{2y} \cdot G_{v_1v_2} \\
 &\quad + H_{1y} \cdot H_{2y}^* \cdot G_{v_2v_1} + \gamma_{v_1v_2}^2 \cdot |H_{2y}|^2 \cdot G_{v_2v_2} \quad (5)
 \end{aligned}$$

기여 출력 스펙트럼  $G_{y \cdot v_1}$ 은 입력  $v_1(t)$ 가 출력에 차지하는 파워의 양을 나타내는데 Fig. 1의 모형에서와 같이 입력  $v_1(t)$ 는 단지 선형계  $H_{1y}$ 만 거쳐 출력에 나타나는 것이 아니라 식 (5)에서는, 입력  $v_1(t)$ 와  $v_2(t)$ 사이의 상호상관으로 인하여 선형계  $H_{2y}$ 를 거쳐 출력에 또한 나타나는 것을 알 수 있다. 같은 방법으로 입력  $v_2(t)$ 와 출력 사이의 기여 출력 스펙트럼은 식(6)으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 G_{y \cdot v_2} &= \gamma_{v_2y}^2 \cdot G_{yy} \\
 &= |H_{2y}|^2 \cdot G_{v_2v_2} + H_{1y}^* \cdot H_{2y} \cdot G_{v_1v_2} \\
 &\quad + H_{1y} \cdot H_{2y}^* \cdot G_{v_2v_1} + \gamma_{v_1v_2}^2 \cdot |H_{1y}|^2 \cdot G_{v_1v_1} \quad (6)
 \end{aligned}$$

식 (5)와 마찬가지로  $v_2(t)$ 도 선형계  $H_{1y}$ ,  $H_{2y}$  양쪽에 거쳐 출력에 나타나는 것을 알 수 있다. 한편 입력들의 기여 출력 스펙트럼과 외부잡음에 대한

스펙트럼의 합은 식 (2)의 출력 스펙트럼과 동일하여야 하나 입력들 사이의 상호상관으로 인한 항들 때문에 더 크게 나타남을 알 수 있다. 이 관계를 나타내 보면 Fig. 2와 같은데 식 (5)와 (6)의 우변에서 첫번째 항을 제외한 나머지항들, 즉 입력들 사이의 상호상관으로 인하여 발생하는 항들에 해당하는 사전부분이 중복되어 출력 스펙트럼을 구성하기 때문이다. 따라서 각각의 입력과 출력 사이의 기여 출력 스펙트럼만으로는 출력에 더 많은 영향을 미치는 입력을 파악하기 어렵게 된다. 이는 신호 해석상 나타나는 결과로서 입력 사이의 상호상관이 존재하는 경우, 각각의 입력이 출력에 차지하는 비중을 파악하기 위해서는 다음의 부분 기여도 함수를 이용한다.

### 3. 부분 기여도 함수

Fig. 1에서 상호상관이 존재하는 두 입력 사이에서 입력  $v_1(t)$ 가 입력  $v_2(t)$ 에 영향을 준다고 가정하면 Fig. 1은 Fig. 3으로 나타낼 수 있다. 즉 Fig. 1에서의 입력  $v_2(t)$ 는 다음과 같이 상호상관이 없는 두 항으로 표시할 수 있다.

$$v_2(t) = v_{2,1}(t) + v_{2,1}(t) \quad (7)$$

식 (7)은 유한 푸리에 변환으로부터 식 (8)과 같이

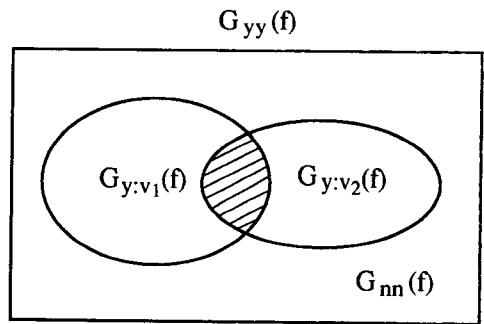


Fig. 2 The relationship of output spectrum and coherent output spectrum

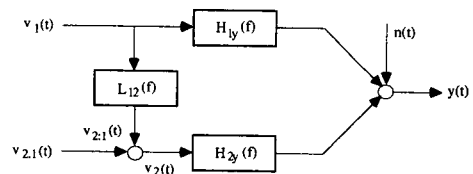


Fig. 3 Model equivalent to Fig. 1

표현된다.

$$V_2 = V_{2,1} + V_{2,1} \quad (8)$$

여기서

$$V_{2,1} = L_{12} \cdot V_1, \quad L_{12} = \frac{G_{v_1 v_2}}{G_{v_1 v_1}}$$

식(7)에서  $v_{2,1}(t)$ 는  $v_1(t)$ 로 인하여  $v_2(t)$ 에 나타나는 신호를 표현하며  $v_{2,1}(t)$ 는  $v_2(t)$ 로부터  $v_1(t)$ 의 선형성분을 제거한 나머지 부분을 나타낸다. 한편  $v_2(t)$ 는  $v_1(t)$ 가  $L_{12}$ 를 거쳐 발생한 신호와  $v_1(t)$ 와는 상호상관이 없는 신호의 합으로 구성이 되는데, 상변수 선형계  $L_{12}$ 는 최소자승법을 이용하여  $v_1(t)$ 와는 상호상관이 없는 신호를 최소화시키는  $v_1(t)$ 와  $v_2(t)$ 사이의 전달함수이다. 같은 방법으로 출력  $y(t)$ 도 입력  $v_1(t)$ 에 의한 항과  $v_1(t)$ 와는 상관이 없는 항으로 표현할 수 있는데 주파수 영역에서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Y = Y_{y,1} + Y_{y,1} \quad (9)$$

여기서

$$Y_{y,1} = L_{1y} \cdot V_1, \quad L_{1y} = \frac{G_{v_1 y}}{G_{v_1 v_1}}$$

식(9)에서  $Y_{y,1}$ 은  $v_1(t)$ 로 인한 출력 신호를,  $Y_{y,1}$ 은  $v_1(t)$ 를 제외한 나머지 신호로 인하여 발생하는 출력 신호를 나타낸다. 한편 Fig. 3의 모형에서의 입력들  $v_1(t)$ 와  $v_{2,1}(t)$  사이에서는 상호상관이 존재하지 않게 되며 입력  $v_{2,1}(t)$ 와 출력 사이의 상호스펙트럼은 식(8), (9)로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$G_{v_2 y, v_1} = \frac{2}{T} \cdot E[V_{2,1}^* \cdot Y_{y,1}] = G_{v_2 y} - \frac{G_{v_2 v_1} \cdot G_{v_1 y}}{G_{v_1 v_1}} \quad (10)$$

여기서  $G_{v_2 y, v_1}$ 은 잔여 스펙트럼(residual spectrum)으로서 신호  $v_2(t)$ 와  $y(t)$ 에서  $v_1(t)$ 의 성형성분을 제거한 신호 사이의 스펙트럼 [혹은  $v_2(t)$ 에서  $v_1(t)$ 의 성형성분을 제거한 신호와  $y(t)$ 사이의 스펙트럼]을 나타내며 측정된 신호의 스펙트럼으로부터 각각 구해줄 수 있다. 또한 입력  $v_{2,1}(t)$ 의 자기 스펙트럼과 출력으로부터  $v_1(t)$ 의 선형효과를 제거한 신호  $y_{y,1}(t)$ 의 자기 스펙트럼은 다음과 같이 각각 표시된다.

$$G_{v_2 v_2, v_1} = \frac{2}{T} \cdot E[V_{2,1}^* \cdot V_{2,1}] = (1 - \gamma_{v_1 v_2}^2) \cdot G_{v_2 v_2}$$

$$G_{y y, v_1} = \frac{2}{T} \cdot E[Y_{y,1}^* \cdot Y_{y,1}] = (1 - \gamma_{v_1 y}^2) \cdot G_{y y} \quad (11)$$

이때 입력  $v_{2,1}(t)$ 와 출력  $y_{y,1}(t)$ 사이의 관련성을 나타내는 기여도 함수를 부분 기여도 함수라 하며 식(12)와 같이 표시된다.

$$\gamma_{v_2 y, v_1}^2 = \frac{|G_{v_2 y, v_1}|^2}{G_{v_2 v_2, v_1} \cdot G_{y y, v_1}} = \frac{|G_{v_2 y} \cdot G_{v_1 v_1} - G_{v_1 y} \cdot G_{v_2 v_1}|^2}{G_{v_1 v_1}^2 \cdot G_{v_2 v_2} \cdot G_{y y} \cdot (1 - \gamma_{v_1 v_2}^2) \cdot (1 - \gamma_{v_1 y}^2)} \quad (12)$$

Fig. 1의 모형에서와 마찬가지로 Fig. 3의 모형에서도 잔여 스펙트럼과 부분 기여도 함수를 이용함으로써 각각의 입력들이 출력에 차지하는 파워를 구할 수가 있는데 이를 부분 기여 출력 스펙트럼이라 하며 다음과 같이 정의된다.

$$G_{y, v_1} = \gamma_{v_1 y}^2 \cdot G_{y y}$$

$$G_{y, v_2, v_1} = \gamma_{v_2 y, v_1}^2 \cdot G_{y y, v_1} = (1 - \gamma_{v_1 v_2}^2) \cdot |H_{2y}|^2 \cdot G_{v_2 v_2} \quad (13)$$

여기서 기여 출력 스펙트럼  $G_{y, v_1}$ 은 입력  $v_1(t)$ 가 출력에 차지하는 파워의 양을, 부분 기여 출력 스펙트럼  $G_{y, v_2, v_1}$ 은 입력  $v_2(t)$ 에서  $v_1(t)$ 의 선형성분을 제거한 신호가 출력에 차지하는 파워의 양을 나타낸다. 이때 식(13)의 기여 및 부분 기여 출력 스펙트럼들과 외부잡음에 대한 스펙트럼과의 합은 식(2)의 출력 스펙트럼과 동일하게 된다. 즉, 식(13)의 값을 관심있는 주파수 영역에서 각각 비교함으로써 출력에 많은 비중을 차지하는 입력을 결정하게 된다.

한편 식(13)은 입력  $v_1(t)$ 가  $v_2(t)$ 에 영향을 준다는 가정하에 구한 기여 및 부분 기여 출력 스펙트럼이었으나 만약  $v_2(t)$ 가  $v_1(t)$ 에 영향을 준다고 가정하면 식(13)과는 다른 결과를 가져 오게 된다. 즉, 다음과 같은 식(14)의 기여 및 부분 기여 출력 스펙트럼으로부터 출력에 더 많은 비중을 차지하는 입력을 결정하게 된다.

$$G_{y, v_2} = \gamma_{v_2 y}^2 \cdot G_{y y}$$

$$G_{y, v_1, v_2} = \gamma_{v_1 y, v_2}^2 \cdot G_{y y, v_2} = (1 - \gamma_{v_1 v_2}^2) \cdot |H_{1y}|^2 \cdot G_{v_1 v_1} \quad (14)$$

상호상관이 존재하는 입력들 사이에서 어느 입력이 다른 입력에 영향을 주는지의 여부를 파악하는 것을 우선순위(rank, or priority) 결정이라 하는데

이러한 우선순위를 계에 대한 물리적 의미를 바탕으로 결정할 수 없는 경우에는 각 입력과 출력 사이의 기여도 함수의 크기로부터 결정하는 방법이 있으나<sup>(4,5)</sup> 논리적인 타당성이 검증되지 않은 상태이므로 앞으로 더 많은 연구가 필요할 것으로 사료된다.

#### 4. 구조물이 선형계인 경우

Fig. 1의 모형에서 입력  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$ 를 선형 구조물을 통과하여 측정되는 신호라 할 때 선형 구조물에 가해진 가상의 힘과 측정시 발생하는 외부잡음의 영향을 고려하여 다시 모형화하면 Fig. 4와 같은 모형을 세울 수 있다. Fig. 4의 모형에서 가상의 힘  $f(t)$ 가 선형계  $H_1, H_2$ 를 통과한 신호를  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$ 라 하고 이들 신호와 외부잡음  $n_1(t)$ ,  $n_2(t)$ 가 각각 합해진 신호를  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ 라 하자. 또한  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$ 가 다른 선형계  $H_{1y}$ ,  $H_{2y}$ (예를 들어 구조물을 통과한 신호가 임의의 매질을 통과하여 출력에 합해질 경우 매질의 전달함수)를 통과하여 외부잡음  $n(t)$ 와 합해진 신호를  $y(t)$ 라 하자. 이때 입력을  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ , 출력을  $y(t)$ 라 하고 측정이 가능한 신호들이라 가정하면 주파수 영역에서 이들은 다음과 같은 관계를 각각 만족한다.

$$\begin{aligned} Y_1 &= V_1 + N_1 \\ Y_2 &= V_2 + N_2 \\ Y &= H_{1y} \cdot V_1 + H_{2y} \cdot V_2 + N \end{aligned} \quad (15)$$

한편 외부잡음들  $n_1(t)$ ,  $n_2(t)$ ,  $n(t)$ 사이에서는 상호상관이 서로 존재하지 않고 또한 각각의 외부

잡음과 선형계를 통과하는 신호  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$  사이의 상호상관도 존재하지 않는다고 가정하면 입력  $y_1(t)$ 와  $y_2(t)$  사이의 자기 스펙트럼과 상호 스펙트럼은 식(15)로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} G_{y_1 y_1} &= G_{v_1 v_1} + G_{n_1 n_1} \\ G_{y_2 y_2} &= G_{v_2 v_2} + G_{n_2 n_2} \\ G_{y_1 y_2} &= G_{v_1 v_2} \end{aligned} \quad (16)$$

또한 입력  $y_1(t)$ 와  $y_2(t)$ 사이의 기여도 함수는 식(16)을 이용하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\gamma_{y_1 y_2}^2 = \frac{|G_{y_1 y_2}|^2}{G_{y_1 y_1} \cdot G_{y_2 y_2}} = \frac{|G_{v_1 v_2}|^2}{(G_{v_1 v_1} + G_{n_1 n_1}) \cdot (G_{v_2 v_2} + G_{n_2 n_2})} \quad (17)$$

한편 Fig. 4의 모형에서, 선형구조물에 가해지는 가상의 힘  $f(t)$ 가 선형계  $H_1, H_2$ 를 각각 통과한 신호들 사이의 기여도 함수, 즉  $v_1(t)$ 과  $v_2(t)$ 사이의 기여도 함수를 구해 보면 다음과 같이 1이 됨을 알 수 있다.

$$\gamma_{v_1 v_2}^2 = \frac{|G_{v_1 v_2}|^2}{G_{v_1 v_1} \cdot G_{v_2 v_2}} = \frac{|H_1^* \cdot H_2 \cdot G_{ff}|^2}{|H_1|^2 \cdot G_{ff} \cdot |H_2|^2 \cdot G_{ff}} = 1 \quad (18)$$

여기서

$$\begin{aligned} G_{v_1 v_1} &= |H_1|^2 \cdot G_{ff}, \quad G_{v_2 v_2} = |H_2|^2 \cdot G_{ff}, \\ G_{v_1 v_2} &= H_1^* \cdot H_2 \cdot G_{ff} \end{aligned}$$

따라서 식(18)을 이용하면 식(17)은 다음과 같이 표현된다.

$$\gamma_{y_1 y_2}^2 = \frac{1}{(1+P) \cdot (1+Q)} \quad (19)$$

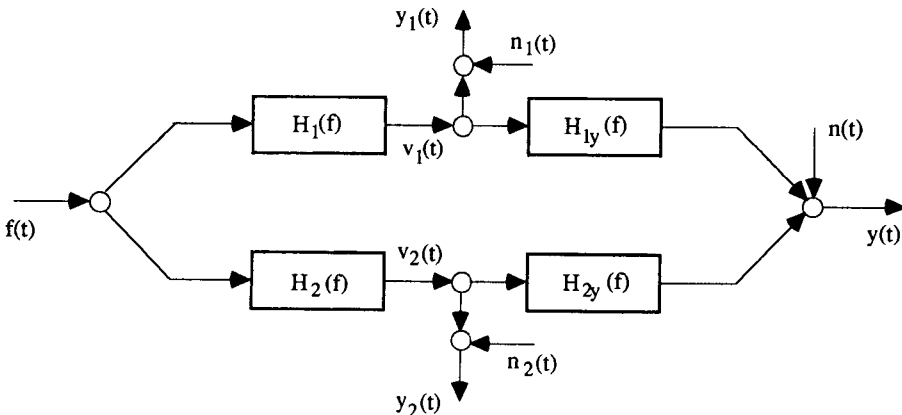


Fig. 4 New model

여기서

$$P = \frac{G_{n_1 n_1}}{G_{v_1 v_1}}, \quad Q = \frac{G_{n_2 n_2}}{G_{v_2 v_2}}$$

식 (19)로부터 두 입력 사이의 기여도 함수는 잡음/신호비(noise/signal ratio)의 함수로서 만약 외부잡음  $n_1(t)$ 과  $n_2(t)$ 가 존재하지 않는다면 입력들 사이의 기여도 함수, 식 (19)는 1이 됨을 알 수 있다. 기여도 함수가 1이라는 것은 두 신호 사이의 완전한 선형 종속성을 의미하므로 다중입력/단일출력 모형을 위한 기본 가정<sup>(6,7)</sup>으로부터 선형 구조물을 통과한 신호들을 가지고는 Fig. 1과 같은 다중입력/단일출력 모형을 세울 수가 없게 된다. 그러나 실제 실험에 있어서 선형계의 여러지점에서 측정된 신호들(즉 입력으로 간주한 신호들) 사이의 기여도 함수는 외부잡음 등으로 인하여 완전히 1이 되지 않을 수 있는데 이때 부분 기여도 함수를 이용하여 소음/진동원을 규명하는 경우 발생하는 결과를 이론적으로 규명해 보면 다음과 같다.

앞에서와 같은 방법으로 입력  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ 와 출력  $y(t)$  사이의 자기 및 상호 스펙트럼을 구해 보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} G_{yy} &= |H_{1y}|^2 \cdot G_{v_1 v_1} + H_1^* \cdot y \cdot H_{2y} \cdot G_{v_1 v_2} + H_{1y} \cdot H_2^* \cdot y \cdot G_{v_2 v_1} + |H_{2y}|^2 \cdot G_{v_2 v_2} + G_{nn} \\ G_{y_1 y} &= H_{1y} \cdot G_{v_1 v_1} + H_{2y} \cdot G_{v_1 v_2} \\ G_{y_2 y} &= H_{1y} \cdot G_{v_2 v_1} + H_{2y} \cdot G_{v_2 v_2} \end{aligned} \quad (20)$$

식 (20)을 이용하여 입력  $y_1(t)$ 와 출력  $y(t)$  사이의 기여도 함수는 다음과 같이 구할 수 있으며

$$\begin{aligned} \gamma_{y_1 y}^2 &= \frac{|G_{y_1 y}|^2}{G_{y_1 y_1} \cdot G_{yy}} \\ &= \frac{|H_{1y}|^2 \cdot \frac{G_{v_1 v_1}}{G_{v_2 v_2}} + H_1^* \cdot y \cdot H_{2y} \cdot \frac{G_{v_1 v_2}}{G_{v_2 v_2}} + H_{1y} \cdot H_2^* \cdot y \cdot \frac{G_{v_2 v_1}}{G_{v_2 v_2}} + |H_{2y}|^2}{(1+P) \cdot \left[ |H_{1y}|^2 \cdot \frac{G_{v_1 v_1}}{G_{v_2 v_2}} + H_1^* \cdot y \cdot H_{2y} \cdot \frac{G_{v_1 v_2}}{G_{v_2 v_2}} + H_{1y} \cdot H_2^* \cdot y \cdot \frac{G_{v_2 v_1}}{G_{v_2 v_2}} + |H_{2y}|^2 + \frac{G_{nn}}{G_{v_2 v_2}} \right]} \end{aligned} \quad (21)$$

식(18)의 관계를 이용하면 식 (21)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\gamma_{y_1 y}^2 = \frac{1}{(1+P) \cdot (1+R)} \quad (22)$$

여기서

$$R = \frac{r}{U}, \quad r = \frac{G_{nn}}{G_{v_2 v_2}}$$

$$U = |H_{1y}|^2 \cdot \frac{|H_1|^2}{|H_2|^2} + H_1^* \cdot y \cdot H_{2y} \cdot \frac{H_1^*}{H_2^*}$$

$$+ H_{1y} \cdot H_2^* \cdot y \cdot \frac{H_1}{H_2} + |H_{2y}|^2$$

주파수 응답함수로 구성되어 있는  $U$ 는 실수(보통은 양수)가 되며  $P$ 와  $R$ 은 양수이다. 식 (22)로부터 입력  $y_1(t)$ 와 출력 사이의 기여도 함수는 식 (19)와 마찬가지로 잡음/신호비의 함수로서 잡음이 증가할수록 기여도 함수의 값은 0으로 접근함을 알 수 있다. 한편 입력  $y_1(t)$ 가 입력  $y_2(t)$ 에 영향을 준다고 가정하면, 입력  $y_2(t)$ 와 출력  $y(t)$ 로부터 입력  $y_1(t)$ 의 성형성분을 제거한 신호 사이의 기여도 함수, 즉 부분 기여도 함수는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\gamma_{y_2 y_1}^2 = \frac{|G_{y_2 y} \cdot G_{y_1 y_1} - G_{y_1 y} \cdot G_{y_2 y_1}|^2}{G_{y_1 y_1}^2 \cdot G_{y_2 y_2} \cdot G_{yy} \cdot (1 - \gamma_{y_1 y_2}^2) \cdot (1 - \gamma_{y_1 y}^2)} \quad (23)$$

식 (23)의 분자항은 식 (16), (18), (20)을 이용하면 다음과 같이 구할 수 있으며

$$\begin{aligned} & |G_{y_2 y} \cdot G_{y_1 y_1} - G_{y_1 y} \cdot G_{y_2 y_1}|^2 \\ &= G_{v_1 v_1}^2 \cdot \left| (1+P) \cdot (H_{1y} \cdot G_{v_2 v_1} + H_{2y} \cdot G_{v_2 v_2}) \right. \\ & \quad \left. - \left( H_{1y} \cdot G_{v_2 v_1} + H_{2y} \cdot \frac{|G_{v_1 v_2}|^2}{G_{v_1 v_1}} \right) \right|^2 \end{aligned} \quad (24)$$

같은 방법으로 분모항의 앞 부분은 식 (25)와 같이 나타낼 수 있다.

$$G_{y_2 y_2} \cdot G_{yy} = U \cdot G_{v_2 v_2}^2 \cdot (1+Q) \cdot (1+R) \quad (25)$$

따라서 식 (23)의 부분 기여도 함수는 식 (18),

(19), (20), (22), (24), (25)를 이용하면 최종적으로 다음과 같이 표현된다.

$$\gamma_{y_2 y_1}^2 = \frac{P^2}{(P+Q+PQ) \cdot (P+R+PR)} \quad (26)$$

식 (26)으로부터 부분 기여도 함수 또한 잡음/신호비의 함수가 됨을 알 수 있다. 만약 외부잡음이 존재하지 않으면 부분 기여도 함수는 0과 1사이의 임의의 값을 갖는 부정값이 되며 외부잡음  $n_1(t)$ ,  $n_2(t)$ ,  $n(t)$ 가 존재하는 경우, 이들 값이 변화함에

따라 식(22)의 기여도 함수값 및 식 (26)의 부분 기여도 함수값도 그에 따라 변화하는 것을 알 수 있다.

### 5. 외부잡음의 영향에 따른 부분 기여도 함수의 변화경향

외부잡음의 영향에 따른 부분 기여도 함수의 변화경향을 살펴보기 위해 주파수 응답함수로 구성된  $U$ 를 임의의 상수로 고정시키고 외부잡음  $n_1(t)$ ,  $n_2(t)$ 와  $n(t)$ 를 변화시켜 보기로 한다. 다음은 입력  $y_1(t)$ 가  $y_2(t)$ 에 영향을 준다는 가정하에 구한 기여도 및 부분 기여도 함수에 영향을 주는 변수(잡음/신호비의 수)가 3개이므로 각각을 0으로 하였을 때 기여도 및 부분 기여도 함수의 경향을 각각 살펴본 것이다.  $U$ 는 실수이므로 모든 경우에 대해  $U$ 는 1로 고정하였다.

(1)  $n_1(t)=0(P=0)$ 인 경우

Fig. 4의 모형에서 외부잡음  $n_1(t)$ 가 0인 경우, 입력  $y_1(t)$ 와 출력 사이의 기여도 함수 및 입력  $y_2(t)$ 에서 입력  $y_1(t)$ 의 선형성분을 제거하였을 때 출력에 차지하는 비율, 즉 부분 기여도 함수는 식 (22)와 식 (26)으로부터 다음과 같이 각각 표시된다.

$$\begin{aligned} \gamma_{y_1 y}^2 &= \frac{1}{(1+R)} \\ \gamma_{y_2 y_1}^2 &= 0 \end{aligned} \tag{27}$$

식 (27)로부터  $y_1(t)$ 와 출력 사이의 기여도 함수는  $R$ 의 함수이며 부분 기여도 함수는 항상 0임을 알 수 있다. Fig. 5는 식 (27)을 각각 나타낸 것으로 잡음/신호비인  $R$ 과  $Q$ 를 변화시켰을 때의 기여도 함수 및 부분 기여도 함수값을 보여주고 있다. Fig. 5로부터 외부잡음  $n_1(t)$ 가 0인 경우에는 입력  $y_1(t)$ 와  $y_2(t)$  중에서 출력에 많은 비중을 차지하

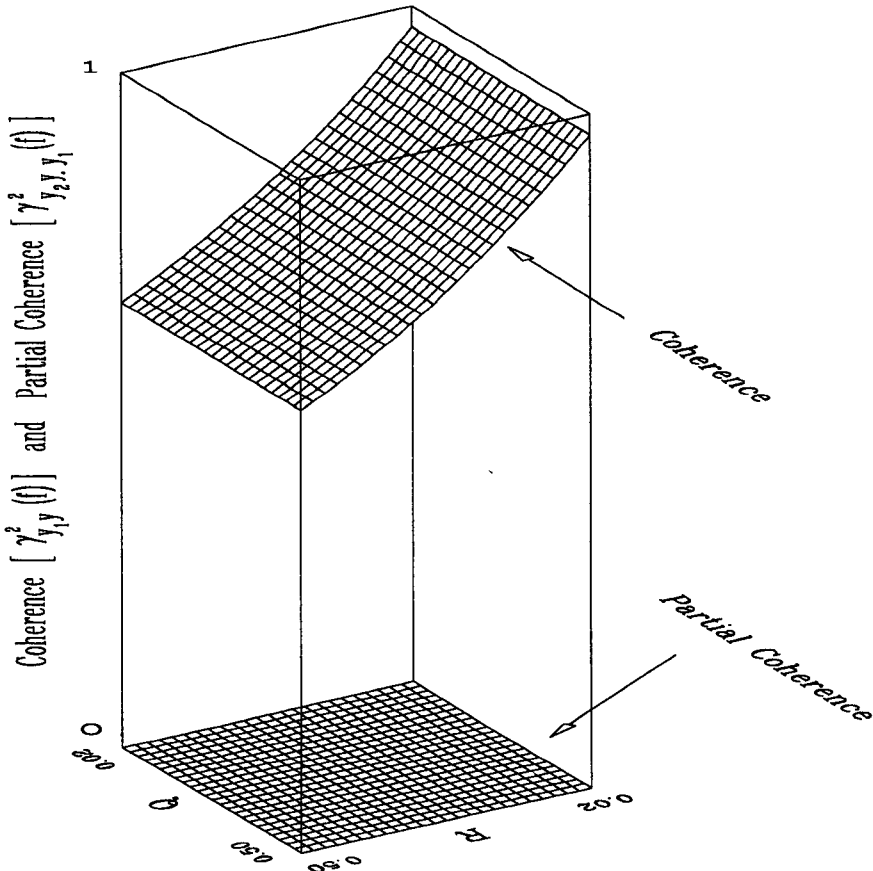


Fig. 5 The trends of ordinary coherence function and partial coherence function [ $n_1(t)=0$ ]

는 입력은  $y_1(t)$ 인 것처럼 결과가 항상 나타나게 된다.

(2)  $n_2(t)=0(Q=0)$ 인 경우

입력  $y_2(t)$ 에서의 외부잡음  $n_2(t)$ 가 0인 경우에,  $y_1(t)$ 와  $y(t)$  사이의 기여도 함수 및 식 (26)의 부분 기여도 함수는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \gamma_{y_1, y}^2 &= \frac{1}{(1+P) \cdot (1+R)} \\ \gamma_{y_2, y_1}^2 &= \frac{P}{(P+R+PR)} \end{aligned} \quad (28)$$

식(28)을 잡음/신호비  $P$ 와  $R$ 에 대해 나타내면 Fig. 6과 같다. 두 함수의 경계선은 식(28)의 두 함수를 같게 놓았을 때의 경우로서  $P=[R/(1+R)]^{1/2}$ 인 함수가 된다. 이로부터  $P$ 가  $[R/$

$(1+R)]^{1/2}$ 보다 작을 때 입력  $y_1(t)$ 가 출력에 많은 영향을 주는 것처럼 나타나며  $P$ 가  $[R/(1+R)]^{1/2}$ 보다 클 때 입력  $y_2(t)$ 가 출력과 더 많은 관계가 있는 것처럼 보이는 것을 알 수 있다. 또한  $P=[R/(1+R)]^{1/2}$ 인 경우 두 입력이 출력에 비슷한 정도의 관련성을 나타내고 있는 것처럼 보임을 알 수 있다.

(3)  $n(t)=0 (R=0)$ 인 경우

출력에서의 외부잡음  $n(t)$ 가 0인 경우 앞에서와 같은 기여도 함수 및 부분 기여도 함수는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \gamma_{y_1, y}^2 &= \frac{1}{(1+P)} \\ \gamma_{y_2, y_1}^2 &= \frac{P}{P+Q+PQ} \end{aligned} \quad (29)$$

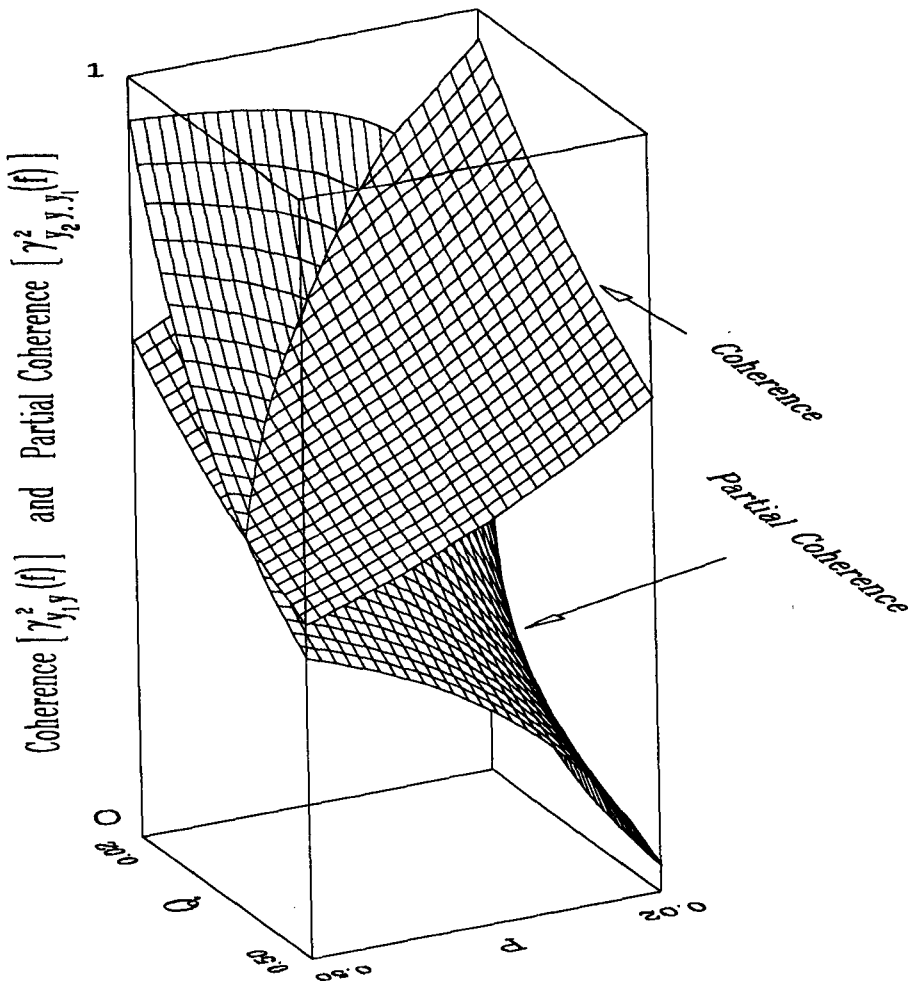


Fig. 6 The trends of ordinary coherence function and partial coherence function [ $n_2(t)=0$ ]



윗 식을  $P$ 와  $Q$ 에 대해 나타내면 Fig. 7과 같다. Fig. 7로부터  $Q > P^2/(1+P)$  일 때  $y_1(t)$ 가,  $Q < P^2/(1+P)$  일 때  $y_2(t)$ 가, 출력과 더 많은 관련성이 있는 것처럼 나타난다. 또한  $Q = P^2/(1+P)$  일 때 두 값은 비슷한 수준이 됨을 알 수 있다.

앞의 3경우에 대해 살펴본 바와 같이 잡음/신호비에 따라 출력과 관련성이 많은 입력은 각각 다르게 나타날 수 있음을 알 수 있다. 즉 선형계를 통과한 신호들에 대해 다중입력/단일출력 모델을 적용하여 소음/진동원을 규명할 때, 같은 구조물에서 발생한 신호임에도 불구하고 잡음/신호비에 따라 소음/진동원은 각각 다르게 나타날 수 있다는 것을 보여주고 있다.

### 6. 모의 실험

선형 구조물로부터 측정된 진동신호를 입력으로 하고 임의의 떨어진 지점에서 측정한 음압을 출력이라 가정하여 2입력/1출력 모델을 세운 뒤 다중입력/단일출력 신호해석법을 이용하여 잡음/신호비에 따른 각각의 입력과 출력 사이의 기여도 및 부분 기여도 함수를 구하여 보았다. Fig. 4의 모형에서와 같이 선형 구조물은 가상의 힘  $f(t)$ 에 의해 진동한다고 가정할 때 각각의 전달함수  $H_1, H_2$ 를 다음과 같이 고려하였다.

$$H_1(s) = \frac{m_2s^2 + c_2s + k_2}{[m_1s^2 + (c_1 + c_2)s + (k_1 + k_2)][m_2s^2 + c_2s + k_2] - (c_2s + k_2)^2}$$

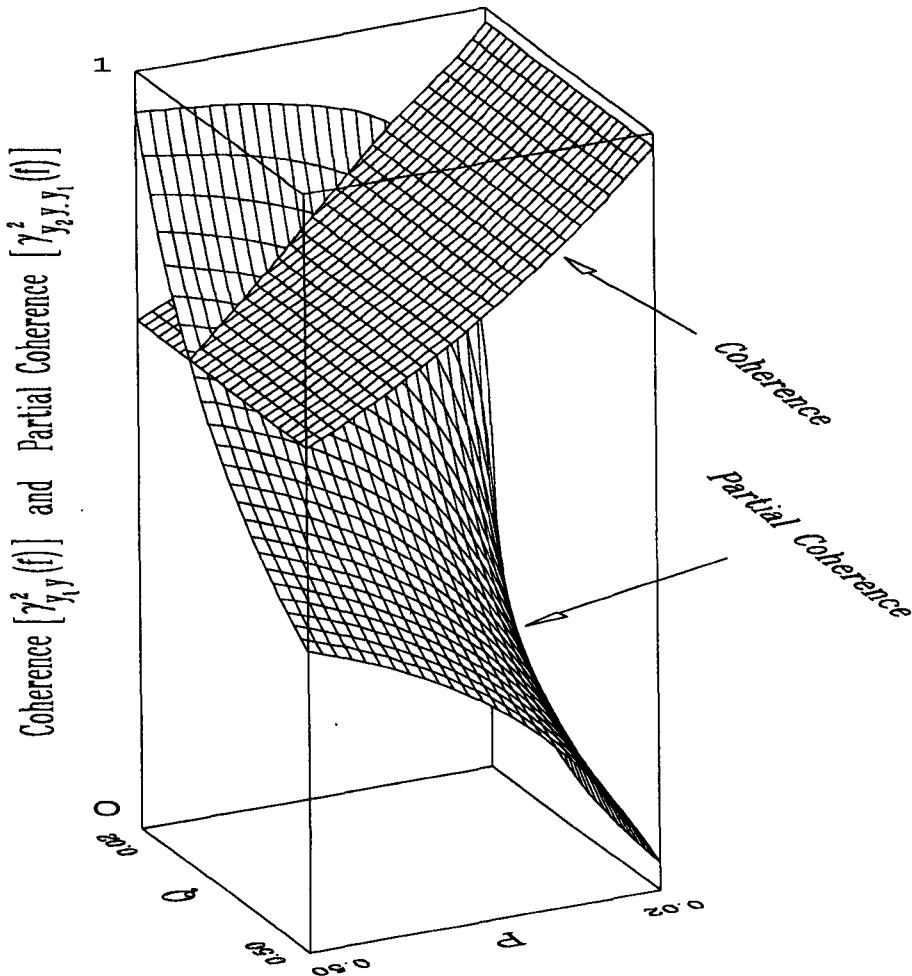


Fig. 7 The trends of ordinary coherence function and partial coherence function  $[n(t) = 0]$

$$H_2(s) =$$

$$\frac{c_2s + k_2}{[m_1s^2 + (c_1 + c_2)s + (k_1 + k_2)][m_2s^2 + c_2s + k_2] - (c_2s + k_2)^2}$$

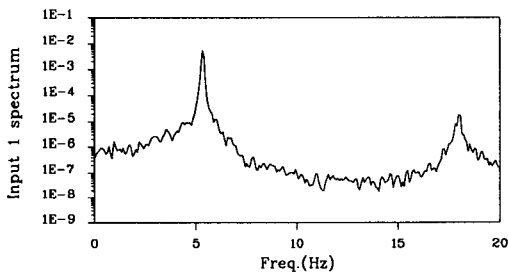
여기서

$$\begin{aligned} m_1 &= 0.1 & c_1 &= 0.05 & k_1 &= 252.66 \\ m_2 &= 0.1 & c_2 &= 0.05 & k_2 &= 568.49 \\ s &= j2\pi f \end{aligned}$$

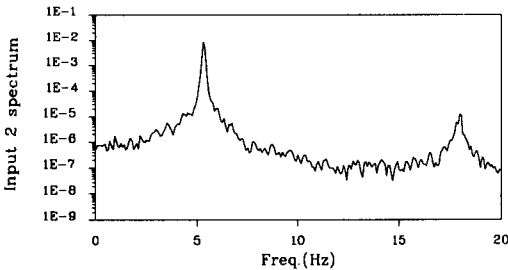
가상의 힘  $f(t)$ 를 랜덤신호로 주었을 때 선형 구조물을 통과한 신호  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$ 에 외부잡음  $n_1(t)$ ,  $n_2(t)$ 를 각각 첨가함으로써 측정신호  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ 를 구성하였다. 이때 외부잡음들은 상호상관이 존재하지 않는 랜덤신호로서  $v_1(t)$ 에 대한  $n_1(t)$ 의 rms비는 3.52%,  $v_2(t)$ 에 대한  $n_2(t)$ 의 rms

비는 2.84%로 주었다[case 1]. 출력의 음압은 선형 구조물의 떨림으로 인해서만 발생한다고 가정할 때 선형 구조물의 진동 측정점으로 부터 출력으로 가정한  $y(t)$ 사이의 전달함수  $H_{1y}, H_{2y}$ 는 진동 측정점과 출력 사이의 매질의 전달함수라 볼 수 있는데 본문에서는 계산의 단순화를 위해 각각을 1로 놓았다. 출력  $y(t)$ 는 선형 구조물을 통과한 신호들과 외부잡음  $n(t)$ 로 구성이 되는데  $n(t)$ 는 랜덤신호로서 선형 구조물을 통과한 신호들에 대해 rms비를 1.59%로 주었다. 신호처리는 개인용 PC에서 작성한 프로그램을 이용하여 수행하였다.

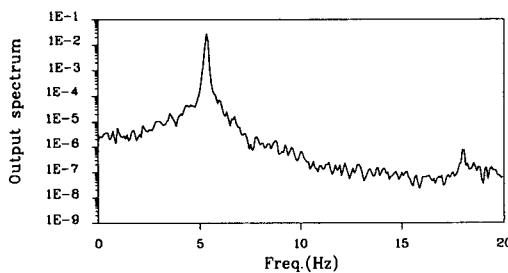
Fig. 8은 입력 및 출력의 스펙트럼을 표시하고 있다. 출력 스펙트럼으로부터 5Hz와 18Hz 부근에서 피크가 존재함을 알 수 있으나 5Hz 부근에서 파워가 집중되어 있으므로 관심 주파수를 5Hz부근(3Hz~7Hz)으로 하였다. Fig. 9는 [case 1]에 대한 입력들 사이의 기여도 및 부분 기여도 함수를 나타내고 있는데 관심 주파수에서 기여도 함수의 크기가 부분 기여도 함수보다 더 크게 나타남을 알 수 있다. 따라서 이 경우에는 입력  $y_1(t)$ 가 출력에 더 많은 관련성이 있게 나타나게 된다. 다음은  $v_1(t)$ 에 대한  $n_1(t)$ 의 rms비를 17.5%,  $v_2(t)$ 에 대한  $n_2(t)$ 의 rms비를 0%, 선형 구조물을 통과한



(a) Input 1 spectrum ( $G_{y_1y_1}(f)$ )

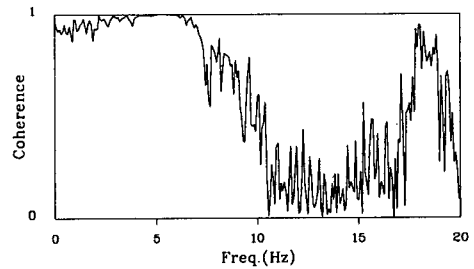


(b) Input 2 spectrum ( $G_{y_2y_2}(f)$ )

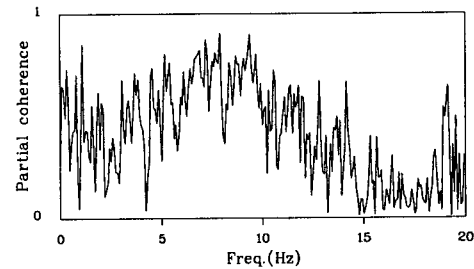


(c) Output spectrum ( $G_{yy}(f)$ )

Fig. 8 The power spectrums of inputs and output



(a) Coherence function ( $\gamma_{yy}^2(f)$ )



(b) Partial coherence function ( $\gamma_{yy, y_1}^2(f)$ )

Fig. 9 Coherence and partial coherence function [case 1]

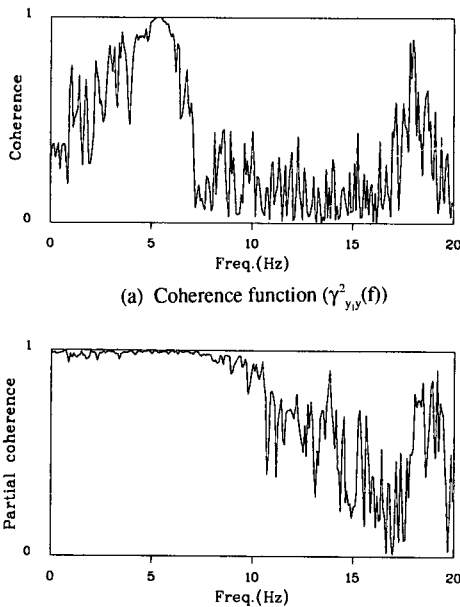


Fig. 10 Coherence and partial coherence function [case 2]

신호들과  $n(t)$ 의 rms비를 1.59%로 하여 기여도 및 부분 기여도 함수를 구하여 보았다[case 2]. Fig.10은 [case 2]에 대한 기여도 및 부분 기여도 함수를 나타내고 있는데 관심 주파수 부근에서 부분 기여도 함수의 크기가 기여도 함수보다 크게 나타남을 알 수 있다. 즉 입력  $y_2(t)$ 가 출력신호에 더 많은 관련성이 있는 것처럼 나타나게 됨을 알 수 있다.

이로부터 입력으로 간주한 선형 구조물의 측정점의 진동량은 일정함에도 불구하고 잡음/신호비의 크기에 따라 출력에 더 많은 관련성이 있는 입력은 변화하여 나타남을 알 수 있다.

## 7. 결 론

계가 선형인 경우에 대해 선형계를 통과한 신호들을 이용하여 다중입력/단일출력 신호해석법을 적용함으로써 소음/진동원을 규명할 때 나타나는 결과를 이론적으로 해석하였다. 선형구조물의 여러 지점에서 측정된 신호들을 입력으로 하고 관측자의 입장에서의 신호를 출력으로 하는 통상의 다중입력/단일출력 모형에 선형계에 가해진 가상의 힘을 함께 고려함으로써 새로운 모형을 세운 뒤 기여도 및 부분 기여도 함수를 수식으로 유도하였다. 또한

기여도 및 부분 기여도 함수에 관한 파라미터 연구를 통해 이들 함수에 미치는 잡음/신호비의 영향을 정량화하였다. 이로부터 선형계를 통과한 신호들에 외부잡음이 존재하지 않는 경우, 즉 이상적인 경우에는 입력들 사이의 기여도 함수는 1이 되어 다중입력/단일출력 모형이 아닌 단일입력/단일출력 모형이 되어야 하며 만약 입력과 출력신호에 외부잡음이 존재하게 되면 신호해석상 외부잡음이 선형계를 통과하는 것처럼 나타나게 되어 기여도 및 부분 기여도 함수는 잡음/신호비의 함수들로 구성됨을 알 수 있었다. 따라서 선형 구조물에 가해진 가상의 힘이 하나일 때 순수한 선형 구조물을 통과한 신호들에 대해 다중입력/단일출력 모형을 세운 뒤 부분 기여도 함수를 적용하여 나타나는 결과를 비교함으로써 소음/진동원을 규명하는 것은 외부자음으로 인한 결과만을 비교하게 되는 것임을 알 수 있었다.

## 참고문헌

- (1) Alfredson, R.J., 1977, "The Partial Coherence Technique for Source Identification on a Diesel Engine," J.Sound and Vib., Vol.55, No.4, pp.487~494.
- (2) Trethewey, M.W. and Evenson, H.A., 1981, "Identification of Noise Source Forge Hammers during Production : An Application of Residual Spectrum Technique to Transients," J. Sound and Vib., Vol.77, No.3, pp.357~374.
- (3) Wang, M.E. and Crocker, M.J., 1983, "On the Application of Coherence Techniques for Source Identification in a Multiple Noise Source Environment," J. Acoust. Soc. Am., Vol.74, No.3, pp. 861~872.
- (4) Braun, S. and Shulman, D., 1984, "The Use of Signal Analysis and Identification Methods for Correction of Unbalance Computations," Transactions ASME, J. Vib. Acoust. Stress and Reliability in Design, Vol.106, Jan, pp.53~58.
- (5) Bendat, J.S., 1980, "Modern Analysis Procedures for Multiple-Input/Output Problems," J. Acoust. Soc. Am., Vol.68, No.2, pp.498~503.
- (6) Bendat, J.S. and Piersol, A.G., 1986, "Random Data : Analysis and Measurement Procedures,"

- 2nd ed., Wiley, New York.
- (7) Bendat, J.S. and Piersol, A.G., 1980, "Engineering Application of Correlation and Spectral Analysis," Wiley, New York.
- (8) Tweed, L.W., 1985, "Fundamental Aspects of Multiple Input/Output Problem," ASME, No. 85-DET-152, pp.1~12.