

(論 文)

선형 이방성 평면 균열에서의 J_k 계산

안 득 만*

(1991년 2월 12일 접수)

Evaluation of J_k -Integral for a Plane Crack in a Rectilinear Anisotropic Body

Deuk Man An

Key Words : Stress Intensity Factor(응력확대계수), Path Independent Integral(경로 독립인 적분), Compliance Matrix(컴플라이언스 행렬), Rectilinear Anisotropic body(선형 이방성 물체), Lekhnitskii's Elastic Potentials(레크니츠키 함수), Cauchy's Integral Formula(코시의 적분 정리)

Abstract

In this paper the path independent $J_k(k=1,2)$ integrals are evaluated in a rectilinear anisotropic body for two dimensional case. The relationship among elastic constants are examined. Using those relationship the expression of J_2 -Integral in terms of K_I and K_{II} is found to be very simple.

1. 서 론

균열을 가진 구조물에 하중이 작용할 때 균열 끝 부분에서의 응력해석은 매우 중요하다. 이는 파괴역학에 의한 설계시 중요한 변수인 응력확대계수가 균열 끝 부분에서의 응력해석으로 구해지기 때문이다. 최근 고강도 복합재료의 사용이 증가함에 따라 이방성 재료에서의 균열 끝 부분에서의 변형 해석에 대한 연구가 진행되고 있다⁽¹⁾. 균열 끝에서의 응력장을 해석적으로 구할 수 있는 경우는 구조물이 특별한 기하학 적 모양을 가진 것에 국한된다. 따라서 대개의 경우 수치해석에 의존한다. 그러나 균열 끝에서는 응력(stress)과 변형률(strain)의 절대치 뿐만 아니라 변화율이 매우 큰 부분이므로 수치해석으로 응력확대계수를 구하는 데 있어서 어려

움이 따른다. 이 문제를 해결하기 위해서는 응력확대계수를 균열 끝에서 멀리 떨어진 부분에 대한 장량(field quantities)으로 구할 수 있으며 된다. 이러한 방법에는 무게함수이론(weight function theory)⁽²⁾과 경로 독립인 적분(path independent integrals)⁽³⁾을 이용하는 것이 일반적으로 사용되고 있다. 재료가 선형탄성 이방성(rectilinear elastic anisotropic)이고 하중이 2차원 상태 일때 응력확대계수를 $J_k(k=1,2)$ 적분을 이용하여 구하는 것은 잘 알려져 있다^(4,5,6). J_k 적분을 이용하여 수치적으로 응력확대계수를 구하기 위하여서는 J_k 적분을 응력확대계수 K_I , K_{II} 로 표현하여야 한다. 그러나 선형탄성이방성 재료에서 J_k 적분과 응력확대계수와의 관계를 균열 끝에서의 선적분을 통해서 간단한 형태로 정확하게 구한 것은 아직 발표된 것이 없다. Cho와 Hong등⁽⁷⁾이 Cherepanov⁽⁸⁾에 의하여 제안된 적분 경로를 사용하여 J_k 와 응력확대계수와의 관계를 구하였다. 그러나 일부 적분 과정에

*정회원, 부산대학교 생산기계공학과, 기계기술연구소 파괴역학 연구실

오류가 있고 이방성 재료의 탄성계수 상호간의 관계를 고려하지 않아서 J_2 를 매우 복잡하게 표현하였다. 본 논문에서는 균열 끝을 포함하는 선 적분을 행하여 J_k 구한 다음 이방성 재료에서의 탄성계수 상호간의 관계를 이용하여 J_k 를 탄성계수와 응력확대계수 K_I, K_{II} 로 간단히 표현 하고자 한다. 이 결과는 선형탄성 이방성 재료에서 수치적으로 응력확대계수를 구하는 데 있어 기초 자료로 활용될 것으로 생각된다.

2. Lekhnitskii 함수

본 논문에서 다루는 물체는 선형탄성이방성이고 체적력은 작용하지 않는다고 가정한다. 하중이 평면 직각 좌표 (x, y) 에 대하여 변화하는 함수일 때 다음과 같은 경우 2차원 변형이 된다. 첫째, 얇은 판재에서 탄성 대칭면이 판재의 중앙면과 평형이고 판재의 아래 및 윗면에 하중이 작용하지 않을 때이고 둘째, 무한 원통형의 물체에서 원통축과 직각인 평면의 임의의 점에서 탄성 대칭면이 원통축에 직각이고 축 방향으로 변위가 없을 때이다. 첫번째 경우를 평면 응력이라 하고 두번째를 평면 변형도라 한다. 변위를 u, v, w 변형률을 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$ 응력을 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{yz}, \sigma_{ax}, \sigma_{xy}$ 로 나타내면 평면응력인 경우 다음과 같은 변형률 응력 관계를 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{16}\sigma_{xy} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_y = a_{21}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{26}\sigma_{xy} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \gamma_{xy} \\ &= a_{61}\sigma_x + a_{62}\sigma_y + a_{66}\sigma_{xy} \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 a_{ik} 는 이방성 컴플라이언스(compliance)계수이고 탄성에너지의 존재가정으로 부터 $a_{ik} = a_{ki}$ 이다. 평면 변형도에서는 a_{ik} 는

$$a^*_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{i3}a_{k3}}{a_{33}}; i, k = 1, 2, 6$$

가 되고 $a_{13}, a_{23}, a_{33}, a_{63}$ 등은 다음 관계에서 주어진다.

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \epsilon_z = a_{31}\sigma_x + a_{32}\sigma_y + a_{33}\sigma_z + a_{36}\sigma_{xy}$$

Lekhnitskii 이론을 따라 응력 및 변위를 해석함수

$\phi(z_1), \psi(z_2)$ 를 사용하여 나타내면 다음과 같다^(9,10)

$$\sigma_x = 2Re\{s^2_1\phi'(z_1) + s^2_2\psi'(z_2)\} \quad (4)$$

$$\sigma_y = 2Re\{\phi'(z_1) + \psi'(z_2)\} \quad (5)$$

$$\sigma_{xy} = -2Re\{s_1\phi'(z_1) + s_2\psi'(z_2)\} \quad (6)$$

그리고 변위는

$$u = 2Re\{p_1\phi(z_1) + p_2\psi(z_2)\} \quad (7)$$

$$v = 2Re\{q_1\phi(z_1) + q_2\psi(z_2)\} \quad (8)$$

로 되고 $p_j, q_j (j=1, 2)$ 는

$$p_j = a_{11}s_j^2 + a_{12} - a_{16}s_j \quad (9)$$

$$q_j = (a_{12}s_j^2 + a_{22} - a_{26}s_j) / s_j \quad (10)$$

이다. 여기서 $\phi'(z_1), \psi'(z_2)$ 는 독립변수 z_1 및 z_2 에 대한 미분을 나타내고 $z_j = x + s_j y$ 이고 s_j 는 아래 특이 방정식의 근이다.

$$\begin{aligned} a_{11}s^4 - 2a_{16}s^3 + (2a_{12} + a_{66})s^2 \\ - 2a_{26}s + a_{22} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

위에서 주어진 특이방정식은 모든 변형에 대하여 탄성에너지가 항상 양(positive)인 조건으로 인하여 실수근을 갖질 수 없다. 따라서 4개의 근은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$s_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \quad s_2 = \alpha_2 + i\beta_2$$

$$s_3 = \alpha_1 - i\beta_1, \quad s_4 = \alpha_2 - i\beta_2$$

여기서 $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ 는 실수 상수이고 $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$ 이다. 식 (11)를 만족하는 4개의 근이 s_1, s_2, s_3, s_4 이므로 식 (11)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$a_{11}(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4) = 0 \quad (12)$$

식 (11), (12)에서 같은 차수의 s 에 대한 항의 계수를 비교하면 직교 이방성인 경우 즉 $a_{16} = a_{26} = 0$ 일 때 근 s_1, s_2 는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$s_1 + s_2 = \text{purely imaginary number} \quad (13)$$

$$s_1 \cdot s_2 = \text{purely real number} \quad (14)$$

s_1 및 s_2 가 식 (11)를 만족하므로

$$\begin{aligned} a_{11}s_1^4 - 2a_{16}s_1^3 + (2a_{12} + a_{66})s_1^2 \\ - 2a_{26}s_1 + a_{22} = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} a_{11}s_2^4 - 2a_{16}s_2^3 + (2a_{12} + a_{66})s_2^2 \\ - 2a_{26}s_2 + a_{22} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

와 같이 쓸 수 있고 (16) 식에 $-s_1^2/s_2^2$ 를 곱하여 식 (15)과 합하면

$$a_{11} s_1^2 s_2^2 - a_{22} = \frac{2s_1 s_2}{s_1 + s_2} (a_{16} s_1 s_2 - a_{26}) \quad (17)$$

가 된다. 따라서 식 (9), (10)의 p_j, q_j 의 정의를 사용하면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$q_1 - p_2 s_1 = \frac{s_1 - s_2}{s_1 + s_2} (a_{16} s_1 s_2 - a_{26}) \quad (18)$$

$$q_2 - p_1 s_2 = \frac{s_2 - s_1}{s_1 + s_2} (a_{16} s_1 s_2 - a_{26}) \quad (19)$$

식 (18)과 (19)를 더하면

$$p_1 s_2 + p_2 s_1 = q_1 + q_2 \quad (20)$$

가 된다. 그리고 직교 이방성일 때에는 식 (17)로부터

$$a_{22} = a_{11} s_1^2 s_2^2 \quad (21)$$

이 된다. Fig. 1에서 곡선 AB의 오른쪽에서 작용하는 x 및 y 방향 면력 X, Y 를 Lekhnitskii 함수를 사용하여 표현하면 다음과 같다.

$$X + iY = \int_A^B (X_n + iY_n) ds = -i[P(z_1, z_2)]_A^B \quad (22)$$

여기서 아래첨자 n 은 미소선분 ds 에서 바깥으로 향하는 법선을 나타내고 $P(z_1, z_2)$ 는

$$P(z_1, z_2) = (1 + is_1) \phi(z_1) + (1 + i\bar{s}_1) \overline{\phi(z_1)} + (1 + is_2) \psi(z_2) + (1 + i\bar{s}_2) \overline{\psi(z_2)} \quad (23)$$

이다.

3. 응력 확대 계수

Fig. 1과 같이 균열이 음의 x 축 방향으로 나있고 균열 끝의 좌표를 원점으로 할 때 유한탄성에너지

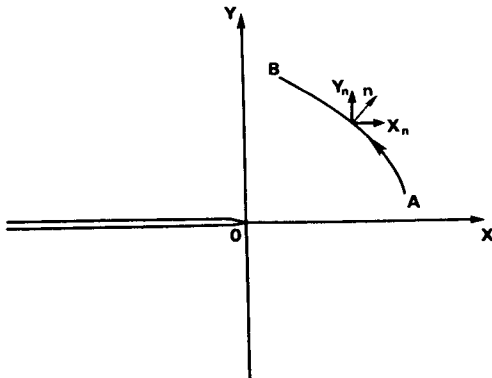


Fig. 1 Orientation of arc AB

와 균열의 기하학적 고려로부터 Lekhnitskii 함수의 균열 끝부분에서의 거동은 점근적으로 (asymptotically) 다음과 같다⁽¹¹⁾.

$$\phi(z_1) = a_r \sqrt{z_1} \quad (24)$$

$$\psi(z_2) = b_r \sqrt{z_2} \quad (25)$$

여기서 제곱근의 가지(branch)는 양의 x 축에서 제곱근이 양의 값을 가지는 것을 택한다. 그리고 a_r, b_r 은 복소 상수이다. 이들 상수는 균열 끝부분에 있는 균열 면에는 면력이 없다는 조건에 의하여 다음의 관계가 있다.

$$(1 + is_1) a_r - (1 + i\bar{s}_1) \bar{a}_r + (1 + is_2) b_r - (1 + i\bar{s}_2) \bar{b}_r = 0 \quad (26)$$

위에 주어진 조건은 아래식을 만족하는 두개의 실수 상수 K_I, K_{II} 를 사용하면 자동적으로 만족한다.

$$a_r + b_r = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \quad (27)$$

$$a_r s_1 + b_r s_2 = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}} \quad (28)$$

식 (27), (28)에서 a_r, b_r 을 K_I, K_{II} 를 사용하여 표현하면

$$a_r = \frac{s_2 K_I + K_{II}}{\sqrt{2\pi} (s_2 - s_1)} \quad (29)$$

$$b_r = \frac{s_1 K_I + K_{II}}{\sqrt{2\pi} (s_1 - s_2)} \quad (30)$$

와 같이 되고 K_I, K_{II} 를 응력확대계수라 한다.

4. J_k 적분의 계산

적분경로에 독립인 $J_k (k=1, 2)$ 적분은 다음과 같이 정의 된다.

$$J_1 = \int_c W dy - \int_c (X_n \frac{\partial u}{\partial x} + Y_n \frac{\partial v}{\partial x}) ds \quad (31)$$

이고 J_2 는

$$J_2 = \int_c W dx - \int_c (X_n \frac{\partial v}{\partial y} + Y_n \frac{\partial u}{\partial y}) ds \quad (32)$$

이다. 여기서 W 는 단위 체적당 탄성에너지이다. J_1 및 J_2 적분이 적분경로에 독립이므로 적분경로 c 는 W 에 대한 적분이 무시할 만큼 작게되는 경로를 택한다⁽⁸⁾. 그리고 J_2 적분은 J_1 적분과 같은 의

미에서의 경로 독립이 아니므로⁽¹²⁾ 식 (32)의 값은 균열 끝을 포함하는 극한 경로에 대하여 구한다. 즉 J_1 에서는 Fig. 2에 주어진 경로 C_1 의 극한 L_1 사용하고 J_2 인 경우에는 Fig. 3에서 주어진 경로 C_2 의 극한 L_2 를 사용한다. 따라서 J_1, J_2 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
 J_1 &= -\lim_{\substack{R \rightarrow 0 \\ \delta \rightarrow 0}} \int_{C_1} \left(X_n \frac{\partial u}{\partial x} + Y_n \frac{\partial v}{\partial x} \right) ds \\
 &= -\int_{L_1} \left(X_n \frac{\partial u}{\partial x} + Y_n \frac{\partial v}{\partial x} \right) ds \\
 J_2 &= -\lim_{\substack{R \rightarrow 0 \\ \delta \rightarrow 0}} \int_{C_2} \left(X_n \frac{\partial u}{\partial x} + Y_n \frac{\partial v}{\partial x} \right) ds \\
 &= -\int_{L_2} \left(X_n \frac{\partial u}{\partial x} + Y_n \frac{\partial v}{\partial x} \right) ds
 \end{aligned}$$

여기서

$$X_n \frac{\partial u}{\partial x} + Y_n \frac{\partial v}{\partial x} = \text{Re} \left\{ (X_n - iY_n) \frac{\partial}{\partial x} (u + iv) \right\}$$

와 같이 되고 식 (22)를 점 B 에 대하여 미분하여 공액(conjugate)을 취하면

$$(X_n - iY_n) ds = idP$$

와 같이 되어 식 (23)으로 주어진 P 의 정의를 사용하면 J_1 은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 J_1 &= -2\text{Re} \left\{ \int_{L_1} \left(s_1 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\psi \right. \\
 &\quad \left. + \left(s_2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\psi \right\} \quad (33)
 \end{aligned}$$

같은 방법으로 J_2 적분도 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
 J_2 &= -2\text{Re} \left\{ \int_{L_2} \left(s_1 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\psi \right. \\
 &\quad \left. + \left(s_2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\psi \right\} \quad (34)
 \end{aligned}$$

식 (7), (8)을 식 (33)에 대입하면 J_1 은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
 J_1 &= -2\text{Re} \left\{ \int_{L_1} (s_1 p_1 - q_1) \phi' d\psi + (s_1 p_2 - q_2) \psi' d\psi \right. \\
 &\quad + (s_1 \bar{p}_1 - \bar{q}_1) \bar{\phi}_1 d\psi + (s_1 \bar{p}_2 - \bar{q}_2) \bar{\psi}' d\psi \\
 &\quad + (s_2 \bar{p}_1 - \bar{q}_1) \bar{\phi}_1 d\psi + (s_2 \bar{p}_2 - \bar{q}_2) \bar{\psi}' d\psi \\
 &\quad \left. + (s_2 p_1 - q_1) \phi_1 d\psi + (s_2 p_2 - q_2) \psi' d\psi \right\}
 \end{aligned}$$

따라서 J_1 을 구하기 위하여 다음과 같은 8개의 적분치를 구하여야 한다.

즉,

$$I_1 = \int_{L_1} \phi' d\psi, \quad I_2 = \int_{L_1} \psi' d\psi, \quad I_3 = \int_{L_1} \bar{\phi}' d\psi, \quad I_4 = \int_{L_1} \bar{\psi}' d\psi$$

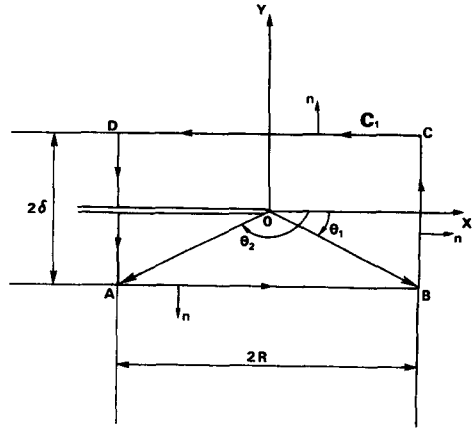


Fig. 2 Contour C_1

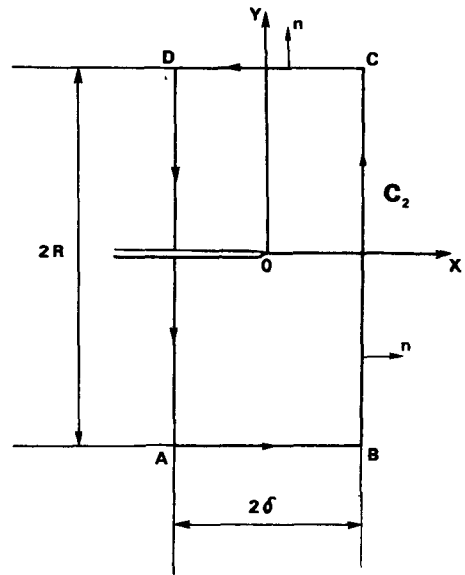


Fig. 3 Contour C_2

$$I_5 = \int_{L_1} \phi' d\psi, \quad I_6 = \int_{L_1} \psi' d\psi, \quad I_7 = \int_{L_1} \bar{\phi}' d\psi, \quad I_4 = \int_{L_1} \bar{\psi}' d\psi$$

와 같다. 적분을 수행하는 곳이 균열 끝 부분이므로 $\phi(z_1), \psi(z_2)$ 는 식 (24), (25)로 주어진다. Appendix에 있는 I_k 적분 결과를 사용하면 J_1 은

$$\begin{aligned}
 J_1 &= -\text{Re} \left\{ (s_1 p_1 - q_1) a_r^2 \pi i + (s_2 p_2 - q_2) b_r^2 \pi i \right. \\
 &\quad \left. + (s_1 p_2 - q_2 + s_2 q_1 - q_1) a_r b_r \pi i \right\}
 \end{aligned}$$

와 같이 되고 식 (20)에 주어진 컴플라이언스계수 상호간의 관계를 사용하면

$$J_1 = -\text{Re} \left\{ (s_1 p_1 - q_1) a_r^2 \pi i + (s_2 - q_2) b_r^2 \pi i \right\}$$

이 된다. a_r, b_r 대신 식 (29), (30)를 사용하여 J_1 을 K_I, K_{II} 로써 나타내면 아래와 같다.

$$J_1 = \alpha_{11}K_I^2 + \alpha_{12}K_I K_{II} + \alpha_{13}K_{II}^2 \quad (36)$$

여기서

$$\alpha_{11} = -\frac{a_{22}}{2} I_m \frac{s_1 + s_2}{s_1 s_2} \quad (37)$$

$$\alpha_{12} = -\frac{a_{22}}{2} I_m \frac{1}{s_1 s_2} + \frac{a_{11}}{2} I_m (s_1 s_2) \quad (38)$$

$$\alpha_{13} = -\frac{a_{11}}{2} I_m (s_1 + s_2) \quad (39)$$

이다. 같은 방법으로 J_2 인 경우 식 (7), (8)를 식 (34)에 대입하면

$$\begin{aligned} J_2 = & -2Re\{ \int_{L_2} s_1 (s_1 q_1 - q_1) \phi' d\phi + s_2 (s_2 p_2 - q_2) \psi' d\psi \\ & + \bar{s}_1 (s_1 \bar{p}_1 - \bar{q}_1) \bar{\phi}' d\phi + \bar{s}_2 (s_2 \bar{p}_2 - \bar{q}_2) \bar{\psi}' d\psi \\ & + s_1 (s_2 p_1 - q_1) \phi' d\psi + s_2 (s_2 p_2 - q_2) \psi' d\phi \\ & + \bar{s}_1 (s_2 \bar{p}_1 - \bar{q}_1) \bar{\phi}' d\psi + \bar{s}_2 (s_2 \bar{p}_2 - \bar{q}_2) \bar{\psi}' d\phi \} \end{aligned}$$

이 된다. 여기서

$$\begin{aligned} I_1' &= \int_{L_2} \phi' d\phi, \quad I_2' = \int_{L_2} \psi' d\psi, \quad I_3' = \int_{L_2} \bar{\phi}' d\phi, \quad I_4' = \int_{L_2} \bar{\psi}' d\psi \\ I_5' &= \int_{L_2} \phi' d\psi, \quad I_6' = \int_{L_2} \psi' d\phi, \quad I_7' = \int_{L_2} \bar{K} d\phi, \quad I_8' = \int_{L_2} \bar{K} d\psi \end{aligned}$$

라 두고 Appendix에 있는 I_k' 의 적분 결과를 사용하면 J_2 는

$$J_2 = -Re\{s_1 p_1 - q_1\} a_r^2 \pi i + s_2 (s_2 p_2 - q_2) b_r^2 \pi i \quad (40)$$

와 같이 되고 식 (9), (10)에서주어진 p_j, q_j 의 정의와 a_r, b_r 대신 응력확대계수 K_I, K_{II} 를 사용하면 최종적으로 J_2 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$J_2 = \beta_{11}K_I^2 + \beta_{12}K_I K_{II} + \beta_{13}K_{II}^2 \quad (41)$$

여기서

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= \frac{a_{16}}{2} I_m \frac{s_1^2 s_2^2}{s_1 + s_2} \\ &= \frac{a_{26}}{2} I_m \frac{s_1 s_2}{s_1 + s_2} \quad (42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{12} &= a_{11} I_m \{s_1 s_2 (s_1 + s_2)\} \\ &\quad - a_{16} I_m s_1 s_2 \quad (43) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{13} &= \frac{a_{11}}{2} I_m (s_1 + s_2)^2 \\ &\quad - \frac{a_{16}}{2} I_m (s_1 + s_2 + \frac{s_1 s_2}{s_1 + s_2}) \\ &\quad + \frac{a_{26}}{2} I_m \frac{1}{s_1 s_2} \quad (44) \end{aligned}$$

이다. 재료가 직교 이방성일 때에는 식 (13), (14),

(21)에 의하여 J_1, J_2 는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} J_1 &= -\frac{a_{11}}{2} s_1 s_2 I_m (s_1 + s_2) K_I^2 \\ &\quad + \frac{a_{11}}{2} I_m (s_1 + s_2) K_{II}^2 \quad (45) \end{aligned}$$

$$J_2 = a_{11} s_1 s_2 I_m (s_1 + s_2) K_I K_{II} \quad (46)$$

만약 재료가 등방성이면 $s_1 = s_2 = -i$, $a_{11} = a_{22} = E^{-1}$ 가 되므로

$$J_1 = \frac{1}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (47)$$

$$J_2 = -\frac{2}{E} K_I K_{II} \quad (48)$$

가 되어 이미 알려져 있는 등방성 재료에서의 평면 응력 상태에서의 결과와 일치 함을 보여준다⁽¹²⁾.

5. 결 론

수치해석으로 응력확대계수를 구하고자할 때 많이 쓰이는 방법이 경로 독립인 적분을 이용하는 것이다. 본 논문에서는 평면 선형이방성 균열인 경우 경로 독립인 J_1 및 J_2 적분 값을 균열 끝부분을 포함하는 미소 사각형 경로 적분을 행하여 구하고 그 결과를 선형탄성이방성 재료의 컴플라이언스 계수 상호간의 관계를 이용하여 응력확대계수 K_I, K_{II} 로 나타내었다. 결과는 식 (36), (41)로 주어지고 J_1 및 J_2 를 재료의 컴플라이언스 계수와 특이방정식의 근의 합 $s_1 + s_2$ 및 곱 $s_1 s_2$ 에 관한 함수로 표현할 수 있음을 보여준다.

참고문헌

- (1) Hoeing, A., 1982, "Near-Tip Behavior of a Crack in a Plane Anisotropic Elastic Body," Engineering Fracture Mechanics, Vol.16, No.3, pp.393~403.
- (2) Bueckner, H.F., 1973, "Field Singularities and Related Integral Representation," in Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems, Edited by G.C. Sih, Noordhoff International Publishing, Leiden, pp. 239~314.
- (3) Knowles, J.K. and Sternberg, E., 1972, "On a Class of Conservation Laws in Linearized and Finite Elastostatics," Archive of Rational

Mechanics and Analysis, Vol.44, pp.187~211.

- (4) Wang, S.S., Yau, J.F. and Corten, H.T., 1980 "A Mixed-Mode Crack Analysis of Rectilinear Anisotropic Solids Using Conservation Laws of Elasticity," International Journal of Fracture, Vol.15, No.3, pp.247~259.
- (5) Soni, M.L. and Stern, M., 1976, "On the Computation of Stress Intensity Factors in Fiber Composite Media Using a Contour Integral Method," International Journal of Fracture, Vol.12, No.3, pp. 331~344.
- (6) Valaire, B.T., Yong, Y.W., Suhling, J., Jang, B. Z. and Zhang, S.Q., 1990, "Application of the J-Integral to Mixed Mode Fracture Analysis of Orthotropic Composites," Engineering Fracture Mechanics, Vol.36, No.3, pp.507~514.
- (7) Chu, S.J. and Hong, C.S., 1990, "Application of the J_k -Integral to Mixed Mode Crack Problems for Anisotropic Composite Laminates," Engineering Fracture Mechanics, Vol.35, No.6, pp. 1093~1103.
- (8) Chrepanov, G.P., 1973, "Mechanics of Brittle Fracture," McGraw-Hill, New York.
- (9) Lekhnitskii, S.G., 1963, "Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body," Holden-day, Inc., San Francisco.
- (10) Savin, G.N., 1961, "Stress Concentration around Holes," Pergamon Press, New York.
- (11) An, D., 1987, "Weight Function Theory for a Rectilinear Anisotropic Body," International Journal of Fracture, Vol.34, pp. 85~109.
- (12) Herrmann, A.G. and Herrmann, G., 1981, "On Energy-Release Rates for a Plane Crack," Journal of Applied Mechanics, Vol.48, pp. 525~528.

부록

함수 $\phi(z_1)$, $\psi(z_2)$ 가 균열 끝 부근에서 식 (24), (25)로 주어지므로 I_1 은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$I_1 = \lim_{c_1 \rightarrow L_1} \frac{a_r^2}{4} \oint_{c_1} \frac{dz_1}{z_1}$$

따라서 Cauchy의 적분 정리로 부터 I_1 은 $a_r^2\pi/2$ 가 되고 같은 방법으로 I_6 는 $b_r^2\pi/2$ 이다. I_2 는

$$I_2 = \lim_{c_1 \rightarrow L_1} \frac{a_r b_r}{4} \oint_{c_1} \frac{dz_1}{\sqrt{z_1 z_2}}$$

와 같이 쓸 수 있고 Fig. 2에서 $\delta/R \Rightarrow 0$ 이므로 폐 곡선 c_1 에서 구간 AB 와 CD 만 생각하면 된다. 구간 AB 에서의 적분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow 0} \int_A^B \frac{dz_1}{\sqrt{z_1 z_2}} &= \lim_{R \rightarrow 0} \int_A^B \frac{dx}{x} = \lim_{R \rightarrow 0} \log x \Big|_A^B \\ &= \lim_{R \rightarrow 0} (\theta_1 - \theta_2) i = \{0 - (-\pi)\} i = \pi i \end{aligned}$$

구간 CD 에서도 같은 방법으로

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_C^D \frac{dz_1}{\sqrt{z_1 z_2}} = \pi i$$

가 되어 I_2 는 $a_r b_r \pi i / 2$ 이 된다. 같은 방법으로 I_5 도 $a_r b_r \pi i / 2$ 가 된다. 다음 I_3, I_4, I_7, I_8 은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$I_3 = \lim_{c_1 \rightarrow L_1} \frac{\bar{a}_r a_r}{4} \oint_{c_1} \frac{dz_1}{\sqrt{z_1} \sqrt{z_2}}$$

$$I_4 = \lim_{c_1 \rightarrow L_1} \frac{a_r \bar{b}_r}{4} \oint_{c_1} \frac{dz_1}{\sqrt{z_1} \sqrt{z_2}}$$

$$I_7 = \lim_{c_1 \rightarrow L_1} \frac{\bar{a}_r b_r}{4} \oint_{c_1} \frac{dz_1}{\sqrt{z_1} \sqrt{z_2}}$$

$$I_8 = \lim_{c_1 \rightarrow L_1} \frac{b_r \bar{b}_r}{4} \oint_{c_1} \frac{dz_1}{\sqrt{z_1} \sqrt{z_2}}$$

앞에서와 마찬가지로 여기서도 적분구간 AB 와 CD 만 고려하면 된다. Fig. 4에서 점 z' 는 점 z 와 원점에 대하여 대칭되는 점이다. 여기서 z 를 극좌표계 ρ, θ 를 사용하여 $z = \rho \exp(i\theta)$ 라 두고 θ 의

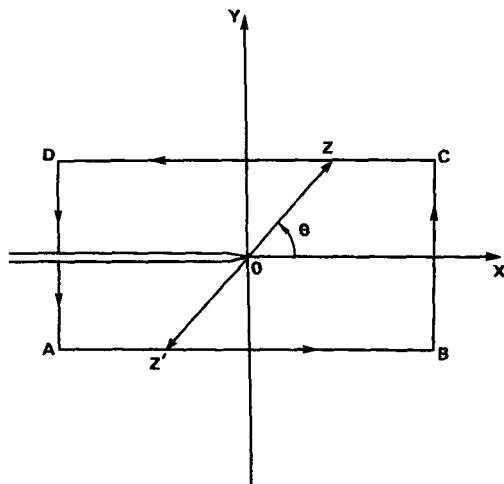


Fig. 4 Representations of the points z and z'

가지를 $-\pi \leq \theta \leq \pi$ 로 택한다. $z_j (j=1, 2)$ 는 정의에 의하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} z_j &= x + s_j y = x + (a_j + i\beta_j)y \\ &= x + a_j y + i\beta_j y = c_j \exp(id_j) \end{aligned}$$

여기서 $c_j = |z_j|$ 이고 θ 가 0일 때 $d_j = 0$ 이다. z_j 가 x, y 에 대하여 연속이고 $\beta_j > 0$ 이므로 $0 < \theta < \pi$ 일 때 $0 < d_j < \pi$ 이고 θ 가 π 이면 d_j 도 π 가 된다. 그리고 $-\pi < \theta < 0$ 일 때 $-\pi < d_j < 0$ 이 되고 $\theta = -\pi$ 이면 $d_j = -\pi$ 이다. 따라서 $\sqrt{z_j} = \sqrt{c_j} \exp(id_j/2)$ 는 직선 구간 AB 와 CD 에서 유일하게 정의된다. 여기서 점 z 의 θ 가 0보다 큰 양수일 때 $d_j = \omega_j$ 라 두면 점 z' 에서는 $z'_j = -x - a_j y - i\beta_j y = -z_j$ 가 되어 $d_j = \omega_j - \pi$ 이 된다. 따라서 $\sqrt{z'_j} = \exp(-i\pi/2) \sqrt{z_j} = -i\sqrt{z_j}$ 가 되고 $\sqrt{z'_j} = i\sqrt{z_j}$ 이 된다. 위와 같은 이유로 아래의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\sqrt{z'_j} \sqrt{z'_m} = \sqrt{z_j} \sqrt{z_m} \quad (j, m=1, 2) \tag{A.1}$$

여기서 $dz'_j = -dz_j$ 이고 식 (A.1)으로부터 서로 반대되는 점에서의 적분해야할 함수(Integrand) 값이 같으므로 I_3, I_4, I_7, I_8 의 값들은 0가 된다. I_1 '는

$$I_1' = \lim_{c_2 \rightarrow L_2} \frac{a_r^2}{4} \int_{c_2} \frac{dz_1}{z_1}$$

와 같이 되어 Cauchy의 적분 정리로부터 $a_r^2 \pi i / 2$ 이 된다. 같은 방법으로 I_6' 은 $b_r^2 \pi i / 2$ 이 된다. I_2' 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$I_2' = \lim_{c_2 \rightarrow L_2} \frac{a_r b_r}{4} \int_{c_2} \frac{dz_1}{\sqrt{z_1 z_2}}$$

Fig. 3에서 $\delta/R \Rightarrow 0$ 이므로 폐곡선 c_2 에서 적분구간 DA 와 BC 만 I_2' 의 값에 기여하게 된다. 구간 BC 에서의 적분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow 0} \int_B^C \frac{dz_1}{\sqrt{z_1 z_2}} &= \lim_{R \rightarrow 0} \int_B^C \frac{1}{\sqrt{z_1 z_2}} \frac{dz_1}{dy} dy \\ &= \lim_{R \rightarrow 0} \sqrt{\frac{s_1}{s_2}} \log y \Big|_B^C \\ &= \sqrt{\frac{s_1}{s_2}} \pi i \end{aligned}$$

같은 방법으로 구간 DA 에서의 적분을 수행하면 위의 결과와 같게 된다. 따라서 $I_2' = \frac{a_r b_r}{2} \sqrt{\frac{s_1}{s_2}} \pi i$ 가 되고 같은 방법으로 I_5' 을 구하면 $I_5' = \frac{a_r b_r}{2} \sqrt{\frac{s_2}{s_1}} \pi i$ 이 된다. 그리고 의 값들은 식 (A. 1)에 의하여 0가 된다.