

〈論 文〉

유사 변환을 이용한 역대칭 앵글 플라이 적층 후판의 거동

이영신* · 양명석** · 나문수***

(1990년 9월 5일 접수)

Behaviors of Thick Antisymmetric Angle-Ply Laminate
Using the Affine Transformation

Y. S. Lee, M. S. Yang and M. S. Na

Key Words : Affine Transformation(유사변환), Antisymmetric Angle-Ply(역대칭 앵글 플라이), Simply Supported(단순지지), Thick Laminate(적층후판), Bending(굽힘), Buckling(좌굴), Vibration(진동)

Abstract

Affine transformation was used to analyze the bending, buckling and vibration behaviors of a thick antisymmetric angle-ply rectangular simply supported laminate. Introducing the generalized parameters, the comprehensive solutions are found. The generalized parameters are a generalized rigidity ratio (D^*), a generalized Poisson's ratio (ϵ) and a principal rigidity ratio (α). Hence, the transverse deflection decreases, the uniaxial buckling load and the fundamental frequency increase with increasing D^* and decreasing α , but the effect of ϵ is negligible. With decreasing the thickness ratio, the results by the classical plate theory are more erroneous. The transverse deflection is minimum, the uniaxial buckling load and the fundamental frequency are maximum if the fiber angle is 45° , and number of plies is more than 4. The time and efforts can be saved to understand the behaviors of composite laminates because these results can be applied to another composite material easily.

기 호 설 명

a, b : 적층판의 크기
 A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} : 적층판의 인장, 결합, 굽힘 강성 계수
 A_{mn}, B_{mn}, C_{mn} : 적층판의 변위 가정식 계수
 C_{ij} : 선형 대수 방정식의 계수 행렬
 D_{mn}, E_{mn} : 적층판의 단면 회전 가정식 계수
 D^* : 일반 강성비, $(Q_{12} + 2Q_{66}) / \sqrt{Q_{11} Q_{22}}$

E_1, E_2 : 단층의 탄성계수
 F_i, B_i : 유사강성비, $\bar{Q}_{ij} / \sqrt{Q_{11} Q_{22}}$
 G_{12}, G_{13}, G_{23} : 단층의 전단 계수
 h : 적층판의 두께
 k_x : 좌굴 계수
 K^2 : 전단 수정 계수, 5/6
 m, n : 모드 형태수
 M_x, M_y, M_{xy} : 적층판의 합모멘트
 N : 단층의 수
 N_x, N_y, N_{xy} : 적층판의 합력

* 정회원, 충남대학교 공과대학 기계 설계과

** 정회원, 국방과학연구소

*** 정회원, 국방과학연구소

- N : 적층판의 내평면 압축 하중
- P : 적층판의 횡방향 하중
- q_{mn} : Sine 형태 횡방향 하중의 강도
- Q_{1j}, \bar{Q}_{1j} : 축소 및 변환 축소 강성 계수
- Q_x, Q_y : 적층판의 횡방향 전단 합력
- S : 적층판의 대한 두꺼비, b/n
- t : 시간 변수
- u, v, w : Cartesian좌표계에서 적층판의 변위
- w_{max}, W^* : 적층판의 최대 변위 및 변위 계수
- x, y, z : 적층판의 좌표계
- Y : 상사 매개 변수, na/mb
- α : 주강성비, $\sqrt{Q_{22}/Q_{11}} = \sqrt{E_2/E_1}$
- ϵ : 일반 프와송 비, $Q_{12}/(Q_{12} + 2 Q_{66})$
- $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$: 적층판의 변형률 성분
- θ : 보강재(fiber) 적층 각도
- ν_{12}, ν_{21} : 단층의 내평면 프와송 비
- ρ : 적층판의 밀도
- $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$: 적층판의 응력 성분
- Ψ_x, Ψ_y : 적층판의 단면회전 가정식
- ω, Ω : 기본 진동수 및 진동수 계수

1. 서 론

복합 재료(composite material)는 내식성, 내마멸성이 우수하고 특히 비강성(specific stiffness), 비강도(specific strength)가 높으므로 중량이 주요 설계 변수로 고려되는 항공기 및 우주 구조물등 여러 공학 분야에 그 응용 범위가 확대되고 있다⁽¹⁾.

일반적으로 복합 재료는 보강재(fiber)와 기지(matrix)로 구성되어 있는데, 한 방향의 강성도가 큰 보강재로 인해 기존의 등방성 재료(isotropic material)와는 달리 인장과 굽힘, 비틀림 사이에 결합 특성(coupling)이 존재하고, 탄성 계수가 아주 작은 기지로 인해 적층판 강도에 미치는 횡방향 전단응력(τ_{xz} 와 τ_{yz})의 영향이 등방성 재료인 경우 보다 더 크게 작용하며 특히 판의 두께비가 작은 두꺼운 판일수록 더욱 그러하다^(2,3).

또 보강 섬유와 기지의 재료에 대한 활발한 연구로 수많은 종류의 복합 재료가 개발되고 있는데⁽⁴⁾, 이에 따라 서로 다른 복합 재료에 대한 해석이 요구되어 복합 재료 구조물 설계자는 임의의 복합 재료 적층판 거동을 이해하는데 많은 시간과 노력이

소요되는 난관에 직면하게 된다.

이 난점의 해소를 위해 Brunelle가 모든 종류의 복합 재료에 적용할 수 있는 개념을 도입하였는데, 이는 기존의 무차원화 개념과 유사하며 유사변환(affine transformation)이라 하였고, 이 개념이 다양한 복합 재료거동 연구에 매우 유용한 개념임을 입증하였다^(5,6). 더 나아가 Yang등은 유사 변환 개념을 도입하여 여러 조건에서 복합 재료 적층판의 거동을 규명함으로써 복합 재료 설계자들이 복합 재료 적층판의 거동을 이해하는데 용이하게 하였다⁽⁷⁻⁹⁾. 그러나 두꺼운 역대칭 앵글 플라이(angle-ply)적층판의 거동 연구에 이 유사 변환 개념을 도입한 예는 없었다.

본 연구에서는 4변이 단순 지지된 두꺼운 역대칭 앵글 플라이 적층판의 굽힘, 좌굴 및 진동 거동을 규명하였으며, 인장과 굽힘, 비틀림 사이의 결합 특성을 고려하였고, 전단 변형을 고려하였다. 또 유사 변환 개념을 도입하여 복합 재료 적층판의 거동을 일반화 하였다.

복합 재료 적층판의 거동을 일반화함으로써 본 연구 결과가 기지의 재료와 보강 섬유의 조합으로 구성되는 수많은 종류의 단순 지지된 두꺼운 역대칭 앵글 플라이 적층판의 거동 예측에 이용되도록 하여 다양한 복합 재료 적층판 거동 이해에 소요되는 많은 시간과 노력을 절감하였다.

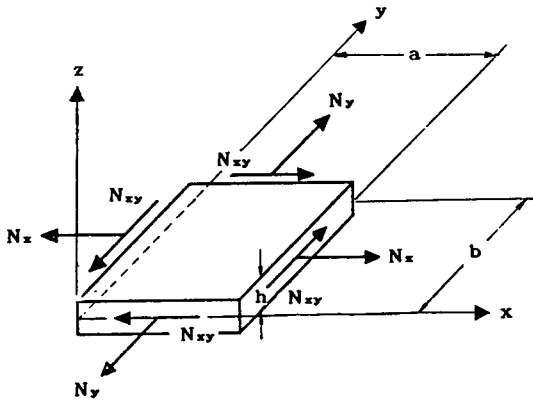
2. 수 식 화

본 연구에서 고려하는 복합 재료 적층판의 기하학적인 형상 및 좌표계는 Fig. 1과 같고 각 단층은 직교 이방성 재료이며 각 단층 사이에는 완전히 접착되어 있다고 가정한다. 경계 조건으로는 단순 지지 조건을 고려한다.

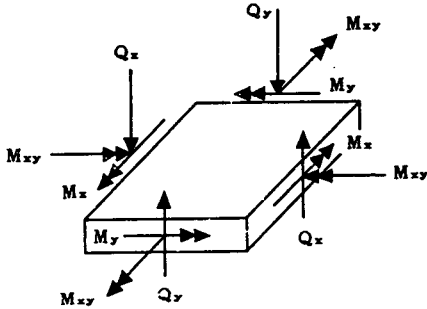
Fig. 1에서 내평면 하중, 합 모멘트, 전단 합력⁽¹⁾은

$$\begin{aligned}
 (N_x, N_y, N_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \tau_{xy}^{(k)}) dz \\
 (M_x, M_y, M_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \tau_{xy}^{(k)}) z dz \\
 (Q_x, Q_y) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}^{(k)}, \tau_{yz}^{(k)}) dz \quad (1)
 \end{aligned}$$

여기서 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ 는 응력 성분을 나타내며 k 번 째 단층에 대해 변형율과의 관계⁽¹⁾는 단층이 직교 이방성 재료일 때



(a) geometry and in-plane load of a plate



(b) Moment and transverse shear resultants

Fig. 1 Geometry and applied loads of a laminate

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (2)$$

여기서 \bar{Q}_{ij} ($i, j=1, 2, 4, 5, 6$)는 변환 축소 강성 계수 (transformed reduced stiffness)이며 \bar{Q}_{ij} 는

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})c^2s^2 + Q_{22}s^4 \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})c^2s^2 + Q_{12}(c^4 + s^4) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})c^3s + (Q_{12} - Q_{22} \\ &\quad + 2Q_{66})cs^3 \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})c^2s^2 + Q_{22}c^4 \quad (3.a) \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})cs^3 \\ &\quad + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})c^3s \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})c^2s^2 \\ &\quad + Q_{66}(c^4 + s^4) \\ \bar{Q}_{44} &= Q_{44}c^2 + Q_{55}s^2 \\ \bar{Q}_{55} &= Q_{44}s^2 + Q_{55}c^2, \quad c = \cos \theta, \quad s = \sin \theta \end{aligned}$$

여기서 Q_{ij} ($i, j=1, 2, 4, 5, 6$)은 축소 강성 계수 (reduced stiffness)로

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{66} &= G_{12} \\ Q_{44} &= G_{23}, & Q_{55} &= G_{13} \end{aligned} \quad (3.b)$$

여기서 E_1, E_2 는 단층의 보강 섬유 방향과 횡방향 탄성 계수, G_{12}, G_{23}, G_{13} 는 전단 계수, ν_{12}, ν_{21} 은 내평면 프와송 비 (Poisson's ratio)이다.

변형률-변위 관계⁽¹⁾와 식 (1), 식 (2)로부터 구성 방정식 (constitutive equation)은

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ v_y \\ u_{y,y} + v_{x,x} \\ \psi_{x,x} \\ \psi_{y,y} \\ \psi_{x,y} + \psi_{y,x} \\ w_{y,y} + \psi_y \\ w_{x,x} + \psi_x \end{Bmatrix} \quad (4)$$

여기서 u, v, w 는 x, y, z 방향의 변위, ψ_x, ψ_y 는 단면의 회전을 나타내며, A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} 는 인장, 결합, 굽힘 강성 계수 (extensional, coupling bending stiffness)를 나타내고 다음과 같이 정의 된다.

$$\begin{aligned} (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}^{(k)}(1, z, z^2) dz \\ &\quad (i, j=1, 2, 6) \\ (A_{ij}) &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}^{(k)} dz, \quad (i, j=4, 5) \end{aligned} \quad (5.a)$$

그런데 Tsai⁽¹⁰⁾에 의하면 역대칭 앵글 플라이 적층판일 때 단층의 수가 짝수이면 강성 계수, A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} 는

$$\begin{aligned} (A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{66}) &= h(\bar{Q}_{11}, \bar{Q}_{12}, \bar{Q}_{22}, \bar{Q}_{66}) \\ A_{16} &= A_{26} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= B_{12} = B_{22} = B_{66} = 0 \\
 (B_{16}, B_{26}) &= \frac{h^2}{2N} (\bar{Q}_{16}, \bar{Q}_{26}) \\
 (D_{11}, D_{12}, D_{22}, D_{66}) &= \frac{h^3}{12} (\bar{Q}_{12}, \bar{Q}_{12}, \bar{Q}_{22}, \bar{Q}_{66}) \\
 D_{16} &= D_{26} = 0 \\
 (A_{44}, A_{55}) &= K^2 h (\bar{Q}_{44}, \bar{Q}_{55})
 \end{aligned} \tag{5.b}$$

여기서 K^2 은 전단 수정 계수 (shear correction factor) 이다.

그리고 내평면 진동은 무시할 정도로 작고 물체력 (body force) 이 없다고 가정하면 Fig. 1에서 평판의 운동 방정식⁽¹⁰⁾은

$$\begin{aligned}
 N_{x,x} + N_{xy,y} &= 0 \\
 N_{xy,x} + N_{y,y} &= 0 \\
 M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x &= 0 \\
 M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_y &= 0 \\
 Q_{x,x} + Q_{y,y} + N_x w_{,xx} - \rho h w_{,tt} + P &= 0
 \end{aligned}$$

여기서 P 는 횡방향 하중을 나타내고 ρ 는 밀도를 나타낸다. 식 (4)를 식 (6)에 대입하면 두꺼운 역대칭 앵글 플라이 적층판의 지배 방정식은

$$\begin{aligned}
 A_{11}u_{,xx} + A_{66}u_{,yy} + (A_{12} + A_{66})v_{,xy} + B_{16} \\
 (\psi_{y,xx} + 2\psi_{x,xy}) + B_{26}\psi_{y,yy} &= 0 \\
 (A_{12} + A_{66})u_{,xy} + A_{66}v_{,xx} + A_{22}v_{,yy} + B_{16}\psi_{x,xx} \\
 + B_{26}(\psi_{x,yy} + 2\psi_{y,xy}) &= 0 \\
 D_{11}\psi_{x,xx} + (D_{12} + D_{66})\psi_{y,xy} + D_{66}\psi_{x,yy} + B_{16} \\
 (v_{,xx} + 2u_{,xy}) + B_{26}v_{,yy} - A_{55}(w_{,x} + \psi_x) &= 0 \\
 (D_{12} + D_{66})\psi_{x,xy} + D_{66}\psi_{y,xx} + D_{22}\psi_{y,yy} + B_{16} \\
 u_{,xx} + B_{26}(u_{,yy} + 2v_{,xy}) - A_{44}(w_{,y} + \psi_y) &= 0 \\
 A_{44}(w_{,yy} + \psi_{y,y}) + A_{55}(w_{,xx} + \psi_{x,x}) \\
 + N_x w_{,xx} - \rho h w_{,tt} + P &= 0
 \end{aligned} \tag{7}$$

3. 유사 변환 및 해법

3.1 유사 변환

모든 복합 재료에 대한 해를 구하기 위해 Yang⁽⁹⁾의 유사 변환 개념을 도입하여 적층판의 지배 방정식을 변환하면 식 (7)과 식 (5.b)를 참고할때

$$\begin{aligned}
 F_1 u_{,xx} + F_6 u_{,yy} + (F_3 + F_6)v_{,xy} + \frac{h}{2N} B_1 \\
 (\psi_{y,xx} + 2\psi_{x,xy}) + \frac{h}{2N} B_2 \psi_{y,yy} &= 0 \\
 (F_3 + F_6)u_{,xy} + F_6 v_{,xx} + F_2 v_{,yy} + \frac{h}{2N} B_1 \psi_{x,xx} \\
 + \frac{h}{2N} B_2 (\psi_{x,yy} + 2\psi_{y,xy}) &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{F_1}{12} \psi_{x,xx} + \frac{F_3 + F_6}{12} \psi_{y,xy} + \frac{F_6}{12} \psi_{x,yy} \\
 + \frac{B_1}{2Nh} (v_{,xx} + 2u_{,xy}) + \frac{B_2}{2Nh} v_{,yy} \\
 - \frac{K^2}{h^2} F_5 (w_{,x} + \psi_x) &= 0 \\
 \frac{F_3 + F_6}{12} \psi_{x,xy} + \frac{F_6}{12} \psi_{y,xx} + \frac{F_2}{12} \psi_{y,yy} + \frac{B_1}{2Nh} u_{,xx} \\
 + \frac{B_2}{2Nh} (u_{,yy} + 2v_{,xy}) - \frac{K^2}{h^2} F_4 (w_{,y} + \psi_y) &= 0 \\
 K^2 F_4 (w_{,yy} + \psi_{y,y}) + K^2 F_5 (w_{,xx} + \psi_{x,x}) \\
 - \frac{N}{h\sqrt{Q_{11}Q_{22}}} w_{,xx} - \frac{\rho}{\sqrt{Q_{11}Q_{22}}} w_{,tt} \\
 + \frac{P}{h\sqrt{Q_{11}Q_{22}}} &= 0
 \end{aligned} \tag{8}$$

여기서 N 는 내평면 압축하중 (compression load) 이고

일반 매개 변수를 일반 강성비 (generalized rigidity ratio, D^*);

$$D^* = \frac{Q_{12} + 2Q_{66}}{\sqrt{Q_{11}Q_{22}}} \tag{9.a}$$

일반 프와송비 (generalized Poisson's ratio, ϵ);

$$\epsilon = \frac{Q_{12}}{Q_{12} + 2Q_{66}} \tag{9.b}$$

주강성비 (principal rigidity ratio, α);

$$\alpha = \sqrt{\frac{Q_{22}}{Q_{11}}} = \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \tag{9.c}$$

로 정의하면 식 (3.a)로부터 각 항의 계수는

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \bar{Q}_{11}/\sqrt{Q_{11}Q_{22}} = (1/\alpha - D^*) \cos^4 \theta \\
 &\quad + (\alpha - D^*) \sin^4 \theta + D^* \\
 F_2 &= \bar{Q}_{22}/\sqrt{Q_{11}Q_{22}} = (1/\alpha - D^*) \sin^4 \theta \\
 &\quad + (\alpha - D^*) \cos^4 \theta + D^* \\
 F_3 &= \bar{Q}_{12}/\sqrt{Q_{11}Q_{22}} = 0.5(1/\alpha + \alpha) - (1 - \epsilon) D^* \\
 &\quad + (D^* - 1/2\alpha - \alpha/2) (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\
 F_4 &= \bar{Q}_{44}/\sqrt{Q_{11}Q_{22}} = \alpha \{1 - (\epsilon D^*)^2\} (\alpha^* \cos^2 \theta \\
 &\quad + \alpha^* \sin^2 \theta) \\
 F_5 &= \bar{Q}_{55}/\sqrt{Q_{11}Q_{22}} = \alpha \{1 - (\epsilon D^*)^2\} (\alpha^* \cos^2 \theta \\
 &\quad + \alpha^* \sin^2 \theta) \\
 F_6 &= \bar{Q}_{66}/\sqrt{Q_{11}Q_{22}} = 0.5\{1/\alpha + \alpha - (1 + \epsilon) D^* \\
 &\quad + (2D^* - 1/\alpha - \alpha) (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)\} \\
 B_1 &= \bar{Q}_{16}/\sqrt{Q_{11}Q_{22}} = (1/\alpha - D^*) \sin \theta \cos^3 \theta \\
 &\quad - (\alpha - D^*) \sin^3 \theta \cos \theta \\
 B_2 &= \bar{Q}_{26}/\sqrt{Q_{11}Q_{22}} = (1/\alpha - D^*) \sin^3 \theta \cos \theta \\
 &\quad - (\alpha - D^*) \sin \theta \cos^3 \theta
 \end{aligned} \tag{10}$$

여기서 $\alpha_1^* = G_{13}/E_2$, $\alpha_2^* = G_{23}/E_2$ 로 전단 계수비

Table 1 The values of engineering constants and D^* , ϵ for various composite materials

No.	Fiber	Matrix	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12}	D^*	ϵ	E_1/E_2
1	T300	N5208	181.	10.3	7.17	0.28	0.397	0.168	17.573
2	T300	F934(13) mil cloth	206.8	5.17	2.58	0.25	0.197	0.2	40.
3	T300	Epoxy	138.	14.5	6.53	0.21	0.358	0.19	9.517
4	B(4)	N5505	207.	14.5	5.51	0.21	0.256	0.217	14.276
5	E-Glass	Epoxy	42.7	11.7	4.09	0.27	0.5	0.282	3.65
6	Kev49	Epoxy	76.	5.5	2.3	0.34	0.315	0.291	13.818
7	E-Glass	Al	124.	24.8	22.07	0.3	0.916	0.147	5.
8 ⁺	Carbon	Epoxy	117.8	6.78	4.23	0.27	0.363	0.179	17.375
9 ⁺⁺	-	-	203.4	203.4	79.29	0.287	1.	0.287	1.

⁺ Material made by HFG Co.(Pusan, Korea) and the constants obtained from the experiment in 1984.

⁺⁺ Isotropic material (cold rolled steel)

이다.

결국 지배 방정식은 유사 변환 개념을 도입하면 식 (8)로 변환할 수 있고 식 (10)을 참고할 때 일반 재료 상수 D^* , ϵ , α 로 표시할 수 있게 된다. 참고로 보강 섬유와 기지로 이루어진 복합 재료에 대해서 D^* , ϵ , α 를 구하면 Table 1과 같다. 그리고 D^* , ϵ , α 는 현재 알려진 모든 섬유 강화 복합 재료에 대해 어느 범위를 갖게 되는데⁽⁶⁾, $0 \leq D^* \leq 1$, $0.12 \leq \epsilon \leq 0.65$, $0 < \alpha \leq 1$ 이고 만일 등방성 재료이면 $D^* = 1$, $\epsilon = \nu$, $\alpha = 1$ 이다.

3.2 상사해

경계 조건은 단순 지지(S3⁽¹⁾)일 때 $x=0, a$ 에서

$$u=w=\phi_x=M_x=N_{xy}=0 \quad (11.a)$$

이고 $y=0, b$ 에서

$$v=w=\phi_x=M_y=N_{xy}=0 \quad (11.b)$$

식 (11)을 만족하는 변위 및 단면의 회전을 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= A_{mn} \sin(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b) e^{i\omega t} \\ v(x, y, t) &= B_{mn} \cos(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) e^{i\omega t} \\ w(x, y, t) &= C_{mn} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\phi_x(x, y, t) = D_{mn} (m\pi/a) \cos(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) e^{i\omega t}$$

$$\phi_y(x, y, t) = E_{mn} (n\pi/b) \sin(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b) e^{i\omega t}$$

여기서 m, n 은 반파장수이고 ω 는 자유 진동수를

나타내며 $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}, E_{mn}$ 은 상수이다. 횡방향 하중 P 를

$$P(x, y, t) = q_{mn} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) e^{i\omega t} \quad (13)$$

라하고 상사 매개 변수(similarity parameter, $Y = na/mb$)⁽⁶⁾, 두께에 대한 길이의 비(thickness ratio, $S = b/h$)를 사용하고 식 (12), 식 (13)을 식 (8)의 지배 방정식에 대입하면 다음과 같은 선형 대수 방정식을 얻게 된다.

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{55} & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{mn} \\ B_{mn} \\ C_{mn} \\ D_{mn} \\ E_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ C_{55} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

여기서 행렬 $[C_{ij}]$ 의 각 요소는 부록에 나타낸 바와 같다.

(1) 횡방향 변위

순수하게 횡방향 하중만 작용한다고 가정하면 내평면 하중 \bar{N} 와 자유 진동수 ω 가 0이므로 식 (14)에서

$$C_{mn} = C_{55} \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad (15)$$

이다. 여기서

$$\Delta = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} \\ C_{51} & C_{52} & K^2(F_4 Y^2 + F_5) & C_{54} & C_{55} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{14} & C_{15} \\ C_{21} & C_{22} & C_{24} & C_{25} \\ C_{31} & C_{32} & C_{34} & C_{35} \\ C_{41} & C_{42} & C_{44} & C_{45} \end{vmatrix} \quad (16)$$

따라서 변위 계수 (deflection coefficient), $W^{*(9)}$ 는

$$W^* = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \frac{\sqrt{Q_{11}Q_{22}}}{q_{mn}} w_{\max} = Y^2 \left[\frac{n\pi}{S}\right]^2 \frac{\Delta}{\Delta_1} \quad (17)$$

(2) 단축 좌굴

순수하게 내평면 하중만 작용한다면 q_{mn} 과 ω 는 0이고 식 (14)가 nontrivial해를 가지려면 행렬식이 0이어야 하므로

$$\frac{\bar{N}}{h\sqrt{Q_{11}Q_{22}}} = K^2 (F_4 Y^2 + F_5) - K^2 \frac{F_5 \Delta_2 - Y^2 F_4 \Delta_3}{\Delta_1} \quad (18)$$

여기서

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{15} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{25} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{35} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{45} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{vmatrix} \quad (19)$$

따라서 좌굴 계수 (buckling coefficient), $k_x^{(9)}$ 는

$$k_x = \frac{12\bar{N}}{h^3 \sqrt{Q_{11}Q_{22}}} \left[\frac{b}{\pi}\right]^2 = 12 K^2 \left[\frac{S}{\pi}\right]^2 (F_4 Y^2 + F_5 - \frac{F_5 \Delta_2 - Y^2 F_4 \Delta_3}{\Delta_1}) \quad (20)$$

(3) 자유 진동

횡방향 진동만 고려하면 q_{mn} 과 \bar{N} 은 0이고 식 (14)가 non-trivial해를 가지려면 행렬식이 0이어야 하므로

$$\frac{\rho\omega^2}{\sqrt{Q_{11}Q_{22}}} \left[\frac{a}{m\pi}\right]^2 = K^2 (Y^2 F_4 + F_5) - K^2 \frac{F_5 \Delta_2 - Y^2 F_4 \Delta_3}{\Delta_1} \quad (21)$$

따라서 진동수 계수 (frequency coefficient), $\Omega^{(9)}$ 는

$$\Omega^2 = \frac{12\rho\omega^2}{h^2 \sqrt{Q_{11}Q_{22}}} \left[\frac{b}{\pi}\right]^4 = 12 \frac{K^2}{Y^2} \left[\frac{ns}{\pi}\right]^2 (Y^2 F_4 + F_5 - \frac{F_5 \Delta_2 - Y^2 F_4 \Delta_3}{\Delta_1}) \quad (22)$$

4. 수치예 및 고찰

본 연구의 타당성 입증을 위하여 기존의 연구에서 사용한 graphite/epoxy (Table 1에서 No.2)로 이루어진 복합 재료 적층판의 해석 결과를 비교 검토하였는데 재료의 물성치중 $G_{13}=0.5 E_2$, $G_{23}=0.6 E_2$ 이며 복합 재료 적층판의 각 단층의 두께와 밀도가 동일하다고 가정하였고 전단 수정 계수는 5/6를 채택하였다.

단순 지지된 두꺼운 역대칭 앵글 플라이 적층판에 대하여 Table 2에서는 두께비에 따른 굽힘 거동을 비교하였고, Table 3에서는 총횡비에 따른 좌굴 거동을 비교하였으며 Table 4에서는 모드 수에 따른 진동 거동을 비교하였는데 기존의 연구 결과와 거의 일치하고 있다.

따라서 본 연구의 타당성이 입증되어 단순 지지

Table 2 Deflection coefficients for thick antisymmetric angle-ply square simply supported laminate

($N=2$, $[45^\circ/-45^\circ]$, $K^2=5/6$)

Thickness ratio(S)	Present	Whitney, Pagano ⁽³⁾
10	3.560	3.60
20	3.048	3.06
30	2.954	2.96
40	2.921	2.93
50	2.905	2.90

Table 3 Buckling coefficients for thick antisymmetric angle-ply rectangular simply supported laminate

($[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ]$, $K^2=5/6$, $S=10$)

Aspect ratio (a/b)	N=2			N=6		
	Present	Khdeir ⁽¹¹⁾	Putcha ⁽¹²⁾	Present	Khdeir ⁽¹¹⁾	Putcha ⁽¹²⁾
0.5	3.622	3.620	3.620	6.232	6.230	6.230
1.0	3.371	3.369	3.369	6.232	6.230	6.230
1.5	3.309	3.307	3.307	6.232	6.230	6.230
2.0	3.351	3.350	3.350	6.232	6.230	6.230
2.5	3.304	3.302	3.302	6.232	6.230	6.230
3.0	3.309	3.307	3.307	6.270	6.230	6.230

Table 4 Frequency coefficients for various mode number for thick antisymmetric angle-ply square simply supported laminate $([45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ], K^2=5/6, S=10, n=1)$

Mode No.(m)	Present	Khdeir ⁽¹³⁾
1	2.585	2.574
2	4.890	4.863
3	7.617	7.568
4	10.601	10.540
5	13.671	13.600

된 두꺼운 역대칭 앵글 플라이 적층판에 대해 두께비, 단층의 수, 상사 매개 변수, 보강 섬유 방향, 일반 강성비, 탄성 계수비, 일반 프와송비 등이 굽힘, 좌굴 및 진동 거동에 미치는 영향을 일반화된 식 (17), 식 (20), 식 (22)에 의거하여 조사하였다.

(1) 굽힘거동

Fig. 2에서 상사 매개 변수와 두께비의 변화에 따른 변위 계수의 변화를 알 수 있는데, 상사 매개 변수가 커질수록 변위 계수는 증가함을 알 수 있

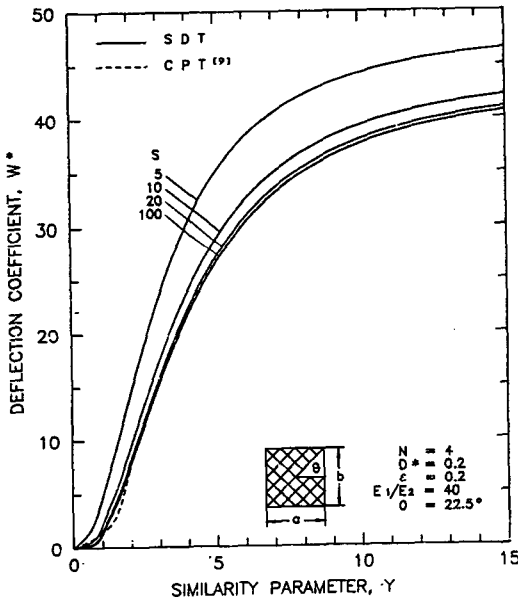


Fig. 2 Effects of thickness ratio on the bending behavior of thick antisymmetric angle-ply rectangular simply supported laminate under sinusoidal transverse load

다. 그런데 상사 매개 변수가 na/mb 로 정의되었으므로 상사 매개 변수의 변화는 종횡비의 변화를 의미한다. 또 Whitney⁽³⁾와 같이 고전 판이론에 의한 결과는 두께비가 작을수록 차이가 크고 두께비가 큰 얇은 판일 경우 잘 맞음을 알 수 있다.

Fig. 3은 보강 섬유 방향과 단층 수의 변화에 따른 변위 계수의 변화를 나타내는데, Whitney⁽³⁾의 결과와 마찬가지로 변위 계수는 단층의 수가 2이면 보강 섬유의 각도가 $0^\circ, 90^\circ$ 일 때 최소이고, 단층의 수가 4이상이면 보강 섬유의 각도가 45° 일 때 변위 계수가 최소이었다. 또 Whitney⁽²⁾의 결과와 같이 단층의 수가 2이면 결합 특성의 영향이 아주 크고 단층의 수가 많아지면 결합 특성의 영향이 줄어들어 직교 이방성 해와 거의 일치함을 알 수 있다.

Fig. 4는 탄성 계수비와 일반 강성비의 변화에 따른 변위 계수의 변화를 보여 주고 있는데 탄성 계수비와 일반 강성비가 증가(주강성비는 감소) 할수록 변위 계수는 감소함을 알 수 있다.

(2) 좌굴거동

Fig. 5는 종횡비와 두께비의 변화에 따른 좌굴 계수의 변화를 나타내는데 종횡비가 증가할수록 등방성 재료⁽¹⁴⁾와 마찬가지로 각각 일정한 값으로 점

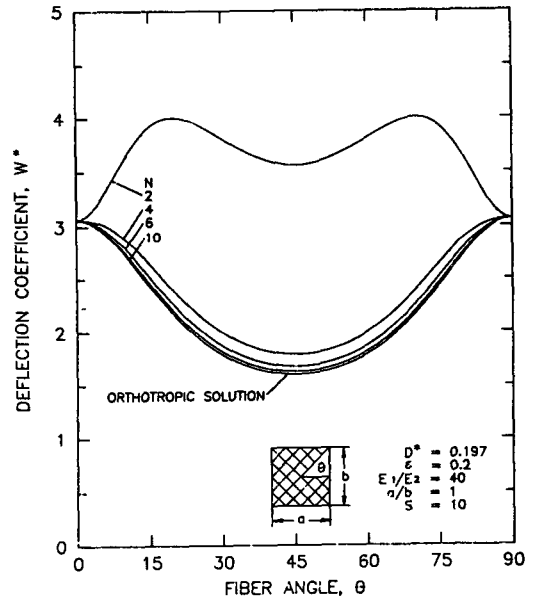


Fig. 3 Effects of number of plies on the bending behavior of thick antisymmetric angle-ply square simply supported laminate under sinusoidal transverse load

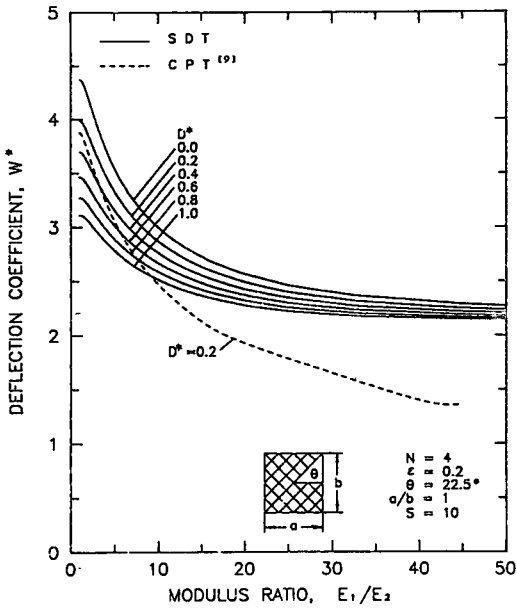


Fig. 4 Deflection coefficients vs. modulus ratio for thick antisymmetric angle-ply square simply supported laminate under sinusoidal transverse load

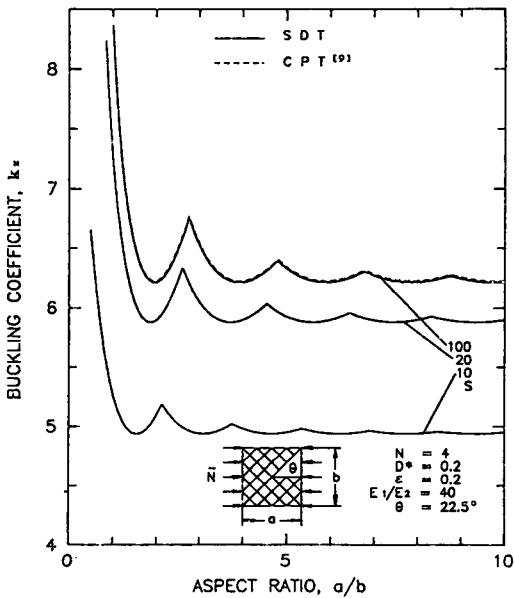


Fig. 5 Effects of thickness ratio on the buckling behavior of thick antisymmetric angle-ply rectangular simply supported laminate

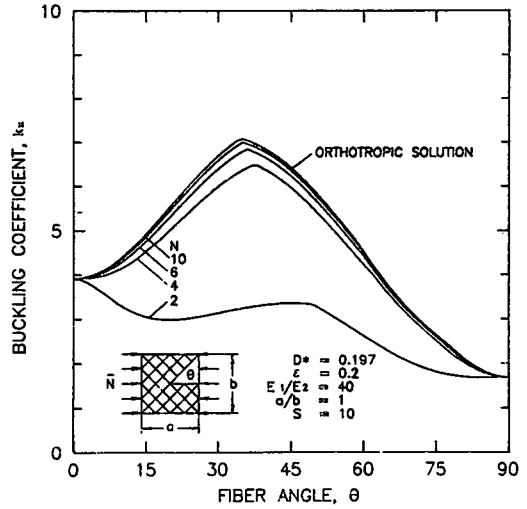


Fig. 6 Effects of number of plies on the buckling behavior of thick antisymmetric angle-ply square simply supported laminate

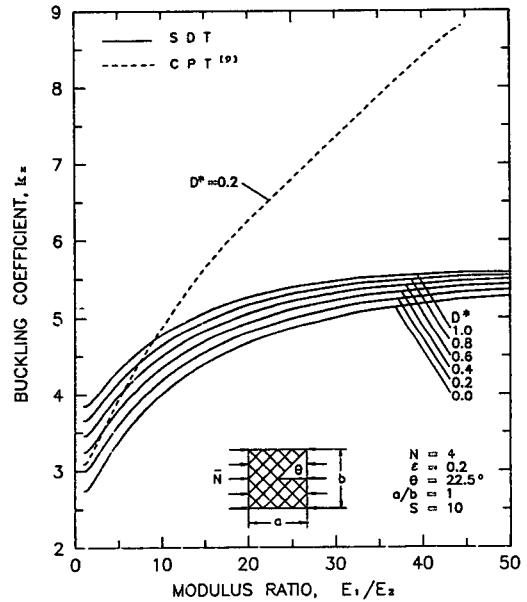


Fig. 7 Buckling coefficients vs. modulus ratio for thick antisymmetric angle-ply square simply supported laminate

근한다. 또 굽힘 거동과 마찬가지로 고전 판이론을 이용하여 구한 좌굴 계수는 두께비가 작으면 크게 차이 나며 두께비가 큰 얇은 판일 때 잘 맞음을 알 수 있다.

Fig. 6은 보강 섬유 방향과 단층수의 변화에 따

른 좌굴 계수의 변화를 보여 주는데, 좌굴 계수는 단층수가 4이상이면 보강 섬유 방향의 각도가 45° 부근에서 최대이고 90°일 때 최소이다. 보강 섬유의 각도가 45° 부근일 때 발생한 특이한 현상은 모우드의 변화에 따른 현상으로 보강 섬유의 각도가

45°보다 크면 복합 재료 적층판의 좌굴에 대처하는 보강 섬유의 기여도가 작아지기 때문이다. 또 Whitney⁽²⁾와 마찬가지로 단층수가 2이면 결합 특성의 영향이 크고 단층의 수가 많아지면 결합 특성의 영향이 줄어들어 직교 이방성 해와 거의 일치

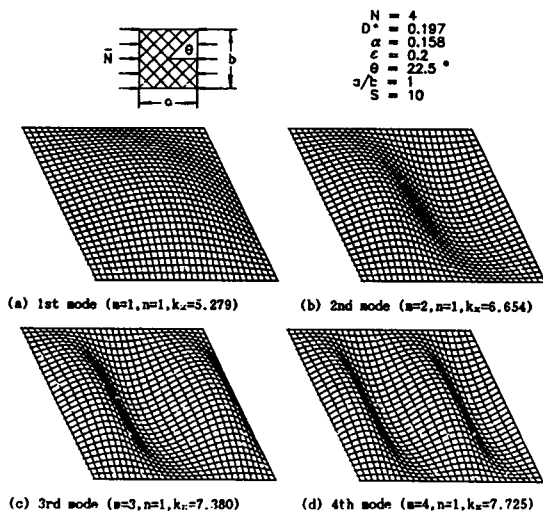


Fig. 8 Uniaxial buckling mode shapes for thick antisymmetric angle-ply square simply supported laminate

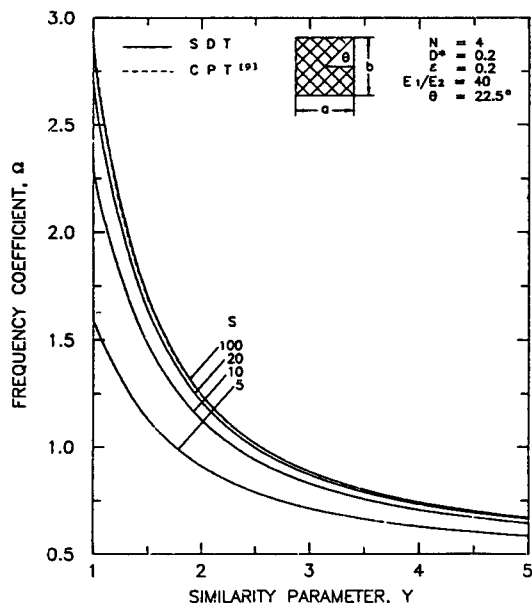


Fig. 9 Effects of thickness ratio on the free vibration behavior of thick antisymmetric angle-ply rectangular simply supported laminate

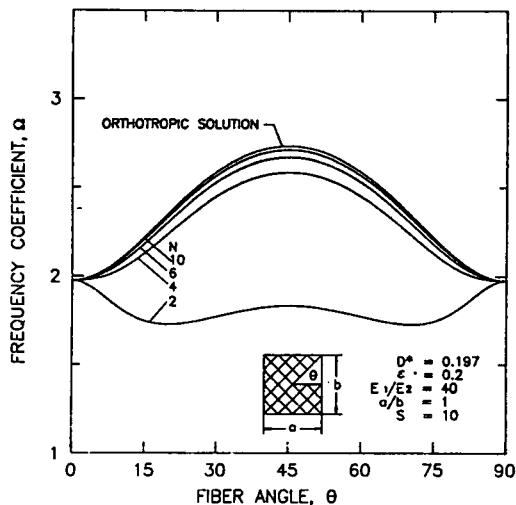


Fig. 10 Effects of number of plies on the free vibration behavior of thick antisymmetric angle-ply square simply supported laminate

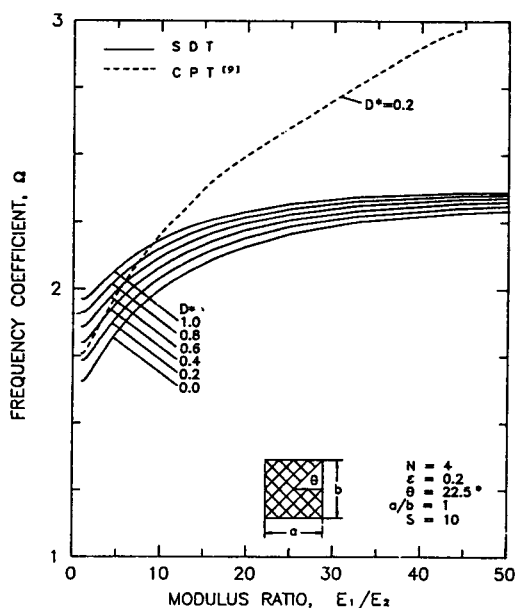
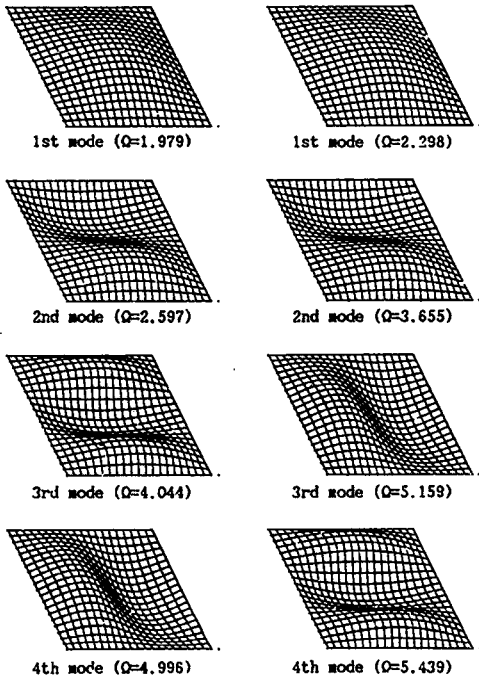
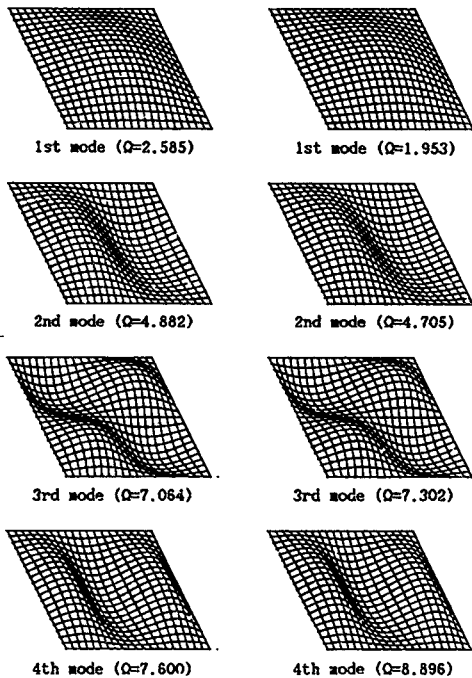


Fig. 11 Frequency coefficients vs. modulus ratio for thick antisymmetric angle-ply square simply supported laminate



(a) GFRP, [0°/-0°/0°/-0°] (b) GFRP, [22.5°/-22.5°/22.5°/-22.5°]



(c) GFRP, [45°/-45°/45°/-45°] (d) Isotropic material

Fig. 12 Vibration mode shapes for thick antisymmetric angle-ply simply supported laminate as fiber angle (GFRP, $S=10$, $K^2=5/6$, $[\theta^\circ/-\theta^\circ/\theta^\circ/-\theta^\circ]$)

함을 알 수 있다.

Fig. 7은 탄성 계수비와 일반 강성비의 변화에 따른 좌굴 계수의 변화를 보여 주고 있는데 탄성 계수비와 일반 강성비가 증가(주강성비는 감소) 할 수록 좌굴 계수는 증가함을 알 수 있다.

그리고 Fig. 8에서는 단순 지지된 두꺼운 역대칭 앵글 플라이적층 정사각판의 단축 방향 좌굴 형상을 알 수 있다.

(3) 진동거동

Fig. 9는 상사 매개 변수와 두께비의 변화에 다

Table 5 Effects of generalized Poisson's ratio on the behaviors of thick antisymmetric angle-ply square simply supported laminate

([22.5°/-22.5°/22.5°/-22.5°], $S=10$, $K^2=5/6$)

Material constant		Similarity solution		
D^*	ϵ	W^*	k_x	Ω
0.0	0.2	2.315	5.183	2.277
	0.3	2.315	5.183	2.277
	0.4	2.315	5.183	2.277
	0.5	2.315	5.183	2.277
0.2	0.2	2.273	5.281	2.298
	0.3	2.273	5.279	2.298
	0.4	2.274	5.278	2.297
	0.5	2.274	5.277	2.297
0.4	0.2	2.232	5.375	2.318
	0.3	2.234	5.372	2.318
	0.4	2.235	5.369	2.317
	0.5	2.236	5.366	2.316
0.6	0.2	2.195	5.468	2.338
	0.3	2.197	5.463	2.337
	0.4	2.199	5.458	2.336
	0.5	2.201	5.452	2.335
0.8	0.2	2.159	5.557	2.357
	0.3	2.162	5.550	2.356
	0.4	2.165	5.543	2.354
	0.5	2.168	5.534	2.352
1.0	0.2	2.126	5.645	2.376
	0.3	2.129	5.635	2.374
	0.4	2.133	5.625	2.372
	0.5	2.138	5.612	2.369

Table 6 The behaviors for various thick antisymmetric angle-ply square simply supported laminate

$$(G_{12} = G_{13} = \frac{5}{6} G_{23}, N=4, [22.5^\circ / -22.5^\circ / 22.5^\circ / -22.5^\circ], S=10, K^2=5/6)$$

Material				Behaviors of a plate					
No ⁺	Q ₁₁ (GPa)	Q ₂₂ (GPaj)	E ₁ /E ₂	Deflection (W*)		Buckling (k _x)		Vibration (Ω)	
				++	+++	++	+++	++	+++
3	138.6	14.57	9.517	2.8	2.857	4.2	4.199	2.1	2.049
4	207.6	14.54	14.276	2.6	2.793	4.6	4.296	2.1	2.073
5	43.6	11.94	3.649	3.3	3.348	3.7	3.584	1.9	1.893
7	126.3	25.25	5	2.8	2.708	4.3	4.431	2.1	2.015
8	118.3	6.81	17.39	2.5	2.395	4.8	5.011	2.2	2.239

⁺ Selection in Table 1.

⁺⁺ Results read directly from Fig.4, Fig.7, Fig.11

⁺⁺⁺ Results calculated according to each material constants.

른 진동수 계수의 변화를 나타내는데 상사 매개 변수가 증가할수록 즉 종횡비가 증가 할수록 진동수 계수는 감소함을 보이고, Whitney⁽⁹⁾와 같이 고전 판이론을 이용하여 구한 진동수 계수는 두께비가 작으면 크게 차이나며 두께비가 큰 얇은 판일 때 잘 맞음을 알 수 있다.

Fig. 10에서는 보강 섬유 방향과 단층 수의 변화에 따른 진동수 계수의 변화를 알 수 있는데, 진동수 계수는 단층의 수가 4이상이면 보강 섬유 방향의 각도가 45°일 때 최대이고 단층의 수가 2이면 0°, 90°일 때 최대이었다. 또 Whitney⁽²⁾와 마찬가지로 단층의 수가 2이면 결합 특성의 영향이 크고 단층의 수가 많아지면 결합 특성의 영향이 줄어들어 직교 이방성 해와 거의 일치함을 알 수 있다.

Fig. 11에서는 탄성 계수비와 일반 강성비의 변화에 따른 진동수 계수의 변화를 보여 주는데 탄성 계수비와 일반 강성비가 증가(주강성비는 감소) 할수록 진동수 계수는 증가함을 알 수 있다.

Fig. 12에서는 단층의 수가 4이고, 등방성 재료 및 서로 다른 보강 섬유 각도의 복합 재료로 이루어진 두꺼운 역대칭 앵글 플라이 적층 정사각판이 단순 지지 되었을 때 자유 진동 모드를 알 수 있다.

(4) 토 의

Table 5는 본 연구에서 정의된 일반 매개 변수가 단순 지지된 두꺼운 역대칭 앵글 플라이 복합 재료 적층판의 거동에 미치는 영향을 보이는데 일반 강성비의 변화에 거의 선형적으로 변화하고, 일

반 프와송비의 영향은 아주 작음을 알 수 있다. 또 Fig. 4, Fig. 7, Fig. 11에서 탄성 계수비(주강성비)의 영향을 알 수 있어 본 연구에서 정의된 일반 매개 변수중 일반 강성비와 탄성 계수비(주강성비)가 주요 매개 변수임을 알 수 있다.

또 본 연구의 유용성을 검토하기 위하여 Table 1의 재료들 중 5종을 택하고 본 연구 결과인 Fig. 4, Fig. 7, Fig. 11에서 보간법으로 직접 구한 값과 각각의 재료 상수들을 고려하여 구한 값을 Table 6에서 비교하였다. 이때 전단 계수중 G₁₃는 G₁₂와 같고 G₂₃는 (6/5)G₁₂이라 가정하였다. Table 6의 결과로부터 단순 지지된 두꺼운 역대칭 앵글 플라이 복합 재료 적층판에 대한 중앙에서의 변위, 단축 방향 좌굴 하중, 자유 진동수는 식 (17), 식 (20), 식 (22)를 이용하여 계산하면 구해진다. 따라서 본 연구 결과를 이용하면 보강 섬유의 방향이 하중 방향과 22.5°를 이루고 단층의 수가 4일 경우 단순 지지된 두꺼운 역대칭 앵글 플라이 복합 재료 적층판의 굽힘, 좌굴 및 진동 거동을 쉽게 이해할 수 있어 많은 시간, 노력을 절감할 수 있다.

5. 결 론

인장과 굽힘, 비틀림 사이의 결합 특성과 전단 변형을 고려하여 단순 지지된 두꺼운 역대칭 앵글 플라이 복합 재료 적층 사각판의 굽힘, 좌굴 및 진동 거동을 조사하였다. 이 때 모든 복합 재료에 적

용이 가능하도록 유사변환 과정을 도입하여 해를 구하였으며 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 고전 파이론을 이용한 해석 결과는 두께비가 작을수록 전단 변형 이론을 이용한 해석 결과와 차이가 컸으며, 두께비가 큰 얇은 판일 경우 잘 맞음을 확인하였다.

(2) 인장과 굽힘 사이의 결합 영향은 단층의 수가 증가할수록 급격히 감소하였는데 층수가 6 이상이면 거의 무시할 정도로 작았고, 단층수가 4 이상이면 보강 섬유와 각도가 45°일 때 횡방향 변위는 최소이고, 좌굴 하중 및 기본 진동수는 최대이었다.

(3) 복합 재료 적층판의 거동을 일반 강성비, 탄성 계수비(주강성비), 일반 프와송비로 일반화 하였는데, 그 영향은 일반 강성비와 탄성 계수비가 증가(주강성비는 감소) 할수록 적층판의 최대 변위는 감소하고 좌굴 하중 및 자유 진동수는 증가하였고 일반 프와송비의 영향은 거의 없었다.

(4) 재료 상수들을 일반화 하였으므로 본 연구의 결과들은 모든 복합 재료에 확장, 적용이 가능하여 복합 재료로 구성된 역대칭 앵글 플라이 적층 두꺼운 판의 거동을 이해 하는데 소요되는 많은 시간과 노력을 절감할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

(1) Jones, R.M., 1975, "Mechanics of Composite Materials", McGraw-Hill Book Co., N.Y.
 (2) Whitney, J.M., 1969, "Bending-Extensional Coupling in Laminated Plates under Transverse Loading", J. of Composite Materials, Vol. 3, pp. 20~28.
 (3) Whitney, J.M. and Pagano, N.J., 1970, "Shear Deformation in Heterogeneous Anisotropic Plates", J. of Applied Mechanics, Vol. 37, pp. 1031~1036.
 (4) Weeton, J.W., Peters, D.M. and Thomas, K.L., 1987, "Engineers' Guide to Composite Materials", American Society for Metals, Metals Park.
 (5) Brunelle, E.J., 1983, "Generic Buckling Curves for Specially Orthotropic Rectangular Plates", AIAA Journal, Vol. 21, pp. 1150~1156
 (6) Brunelle, E.J., 1985, "Fundamental Constants of Orthotropic Affine Slab/Plate Equations", AIAA Journal, Vol. 23, pp. 1957~1961.
 (7) Yang, I.H. and Shieh, J.A., 1987, "Vibrations of Initially Stressed Thick, Rectangular, Orthotropic Plates", J. of Sound and Vibration, Vol. 119, pp.

545~558.
 (8) Kuo, W.S. and Yang, I.H., 1989, "Generic Non-linear Behavior of Antisymmetric Angle-ply Laminated Plates", Int. J. of Mechanical Science, Vol. 31, pp. 131~143.
 (9) Yang, I.H., 1989, "Bending, Buckling and Vibration of Antisymmetrically Laminated Angle-ply Rectangular Simply Supported Plates", Aeronautical Journal, Aug/Sep, pp. 265~271.
 (10) Tsai, S.W., 1980, "Introduction to Composite Materials", Technomic Publishing Co., Dayton.
 (11) Khdeir, A.A., 1989, "Stability of Antisymmetric Angle-ply Laminated Plates", J. of Engineering Mechanics, Vol. 115, pp. 952~962.
 (12) Putcha, N.S. and Reddy, J.N., 1986, "Stability and Natural Vibration Analysis of Laminated Plates by Using a Mixed Element Based on a Refined Plate Theory", J. of Sound and Vibration, Vol. 104, pp. 285~300.
 (13) Khdeir, A.A., 1989, "Comparison between Shear Deformable and Kirchhoff Theories for Bending, Buckling and Vibration of Antisymmetric Angle-ply Laminated Plates", Composite Structures, Vol. 13, pp. 159~172.
 (14) Timoshenko, S.P. and Woinowsky-Krieger, S., 1959, "Theory of Plate and Shells", McGraw-Hill Kogakusha Ltd., Tokyo.

부 록

선형 대수 방정식의 계수 C_{ij} 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= F_1 + F_6 Y^2, & C_{12} &= (F_3 + F_6) Y, \\
 C_{13} &= 0, & C_{14} &= \frac{n \pi}{N S} B_1, \\
 C_{15} &= \frac{1}{2} \frac{n \pi}{N S} (B_1 + B_2 Y^2), \\
 C_{21} &= (F_3 + F_6) Y, & C_{22} &= F_6 + F_2 Y^2, \\
 C_{23} &= 0, & C_{24} &= \frac{1}{2} \frac{1}{Y} \frac{n \pi}{N S} (B_1 + B_2 Y^2), \\
 C_{25} &= Y \frac{n \pi}{N S} B_2, \\
 C_{31} &= \frac{Y^2}{N} \frac{S}{n \pi} B_1, \\
 C_{32} &= \frac{1}{2} \frac{Y}{N} \frac{S}{n \pi} (B_1 + B_2 Y^2), \\
 C_{33} &= K^2 Y^2 \left[\frac{S}{n \pi} \right]^2 F_5, \\
 C_{34} &= \frac{F_1}{12} + \frac{F_6}{12} Y^2 + K^2 Y^2 \left[\frac{S}{n \pi} \right]^2 F_5,
 \end{aligned}$$

$$C_{35} = \frac{F_3 + F_6}{12} Y^2,$$

$$C_{41} = \frac{1}{2} \frac{Y}{N} \frac{S}{n \pi} (B_1 + B_2 Y^2),$$

$$C_{42} = \frac{Y^2}{N} \frac{S}{n \pi} B_2,$$

$$C_{43} = K^2 Y^3 \left[\frac{S}{n \pi} \right]^2 F_4,$$

$$C_{44} = \frac{F_3 + F_6}{12} Y,$$

$$C_{45} = \frac{F_6}{12} Y + \frac{F_2}{12} Y^3 + K^2 Y^3 \left[\frac{S}{n \pi} \right]^2 F_4,$$

$$C_{51} = 0, \quad C_{52} = 0,$$

$$C_{53} = K^2 Y^2 F_4 + K^2 F_5 - \frac{\bar{N}}{h \sqrt{Q_{11} Q_{22}}} \\ - \frac{\rho \omega^2}{\sqrt{Q_{11} Q_{22}}} \left[\frac{a}{m \pi} \right]^2,$$

$$C_{54} = K^2 F_5,$$

$$C_{55} = K^2 Y^2 F_4,$$

$$C_{56} = \frac{q_{mn}}{h \sqrt{Q_{11} Q_{22}}} \left[\frac{a}{m \pi} \right]^2$$