大韓機械學會論文集 第 15 卷 第 1 號, pp. 61~68, 1991.

〈論 文〉

이동 하중의 질량효과를 고려한 보의 동적응답

최 교 준*·김 용 철**

(1990년 7월 25일 접수)

Dynamic Response of a Beam Including the Mass Effect of the Moving Loads

Kyo-Jun Choi and Yong-Chul Kim

Key Words: Constraint Condtion(구속조건), Dynamic Boundary Condition(동적 경계조건), Geometric Boundary Condition(기하학적 경계조건), Moving Load(이동하중), Normalization(정규화), Residual(오차), Virtual Displacement(가상변위), Virtual Work(가상일)

Abstract

The system such as railway bridge can be modelled as the restrained beam with intermediate supports. This kind of structures are subject to the moving load, which has a great effect on dynamic stresses and can cause severe motions, especially at high velocities. Therefore, to analyze the dynamic characteristics of the system due to the moving load is very important. In this paper, the governing equation of motion of a restrained beam subjected to the moving load is derived by using the Hamilton's principle. The orthogonal polynomial functions, which are trial functions and satisfying the geometric and dynamic boundary conditions, are obtained through simple procedure. The dynamic response of the system subjected to the moving loads is obtained by using the Galerkin's method and the numerical time integration technique. The numerical tests for various constraint, velocity and boundary conditions were preformed. Furthermore, the effects of mass of the moving load are studied in detail.

기 호 설 명

c : 하중의 이동속도
C_d : 보의 감쇠 계수
c_s : 이동질량 중 s번째 질량에 부착된 감쇠계수
e_s : 이동질량 중 첫번째 질량과 s번째 질량과의 거리
K : 탄성지반의 강성계수
K_s : 이동질량 중 s번째 질량에 부착된 스프링 상수
K_t, K_r : 병진 및 회전스프링 상수
K_0,K_L : $x=0$, $x=L$에서 회전스프링 상수
$\underline{L}$: 단위 길이당 Lagrangian
L_0 : $x=0$, $x=L$에서 Lagrangian
m : 보의 단위길이당 질량
m_{rs} : 보의 질량에 대한 s번째 이동질량의 비 ($m_{rs}=m_s/m_L$)
Q : 정현파 하중의 진폭
$\underline{T}$, $\underline{V}$: 단위 길이당 운동 및 위치 에너지
v : 보의 횡변위
v_0 : 단순지보의 $L/2$에서 하중 P_c에 의한 중앙점의 처짐($v_0=P_cL^3/48EI$)

*정회원, 영남대학교 대학원
**정회원, 영남대학교 공과대학 정밀기계공학과

x_{bl} : 1번째 중간지점의 위치
x_t, x_r : 병진 및 회전스프링의 위치
z_s : 이동질량 중 s번째 질량의 횡방향 변위
$\underline{\sigma v}$: 가상변위
$\underline{\sigma W_{nc}}$: 단위 길이당 비 보존 가상 일
ω_1 : 보의 최저차 고유진동수
ω_d : 보의 감쇠 고유진동수($C_d=2m\omega_d$)
ω_h : 정현파 하중의 기진주파수

1. 서 론

일반적인 구조물에 있어서 하중을 견디기 위하여 보가 많이 사용되고 있다. 간단한기계 구조물로 부터 교량, 자동차, 선박, 항공기에 이르기까지 보의 사용은 광범위하며 그 역할은 매우 중요하다고 할 수 있다. 따라서 보 요소에 대한 정확한 동적해석은 전체 시스템의 안정성 해석의 근거가 된다. 보를 해석하는데 있어서 일반적으로 복합 구조물 중에서 보 요소만을 선택하여 해석하는 경우도 있고, 철도, 교량 문제와 같은 경우에는 중간지지점이 있고 구속조건이 있는 보로 간주하여 문제를 해석할 수있다. 움직이는 하중이 작용할 경우는 정적하중이 작용하는 경우보다 일반적으로 더큰 응답과 응력이 발생하므로 이러한 구조물에 대한 동적응답을 정확히 추정하는 것이 무엇보다도 중요하다고 할 수 있다.

움직이는 하중에 대한 최근의 연구를 간단히 살펴보면 Fryba는 일정한 속도로 움직이는 여러가지 하중에 대하여 연구 결과를 정리하여 발표하였고[1], Hamada는 이중 Laplace 변환방법을 이용하여 동적응답을 구하였다[2]. Hino, Yoshimura, Konishi와 Ananthanarayana는 유한요소법을 이용하여 교량에 대한 연구를 수행하였고[3], 진폭이 큰 경우에 대하여 비선형항을 고려하여 Galerkin방법을 사용하여 동적응답을 구하였다[4]. Katz, Lee, Ulsoy와 Scott는 Galerkin방법을 사용하여 회전축에 움직이는 하중이 작용하는 경우에 대하여 동적 안정성과 동적응답을 연구하였고[5], 움직이는 하중이 작용하는 회전축을 모드 해석방법, Galerkin방법과 적분변환방법 등으로 해석하였다[6,7]. 그러나 구속조건이 있는 경우, 참고문헌 (8)과 (9)등에서는 회전스프링이 보의 중간 부분에 부착되어 있는 경우에 대한 운동방정식중 집중모멘트 항을 잘못 유도하여 사용한 경우가 있다.

본 논문에서는 스프링힌지, 클램프, 단순지지, 탄성지반, 다수의 병진 및 회전스프링 그리고 중간지지점의 조합으로 구성되어 있는 보에 대하여 우선 Hamilton원리에 의하여 정확한 보의 특성방정식을 유도하고 모든 경계조건을 만족하는 직교다항식을 구한 후, 스프링, 댐퍼로 구성된 여러개의 질량이 일정한 속도로 이동할 경우에 대하여 Galerkin방법과 수치적분 방법을 사용하여 동적응답을 구하였다. 또한 구속조건 및 경계조건이 변함에 따라 동적응답에 미치는 영향을 연구하였다.

2. 문제의 정식화

철로 또는 철도 교량(railway bridge)과 같은 구조물은 중간지지점이 있고, 보의양단에 구속조건이 있는 보로 간주하여 동적해석을 수행할 수 있다. 철로가 지반 위에 설치되어 있기 때문에 탄성 및 감쇠(damping)영향을 고려하여야 하며 양단에서 완전 자유(free)조건 또는 완전고정(clamped)조건이라 볼 수 없다. 따라서 양단에서 어느 정도의 전단응력 및 굽힘 모멘트를 고려하여야 하기 때문에 병진스프링과 회전스프링을 부착하여 모델링(modelling)할 수 있다. 또한 중간지지점의 유무에 따라서 시도함수의 선택이 크게 달라지며 중간지지점에서도 회전스프링을 고려해야 한다. 이와같은 구조물의 운동방정식을 유도하기 위하여 Fig. 1과 같은 형태의 이상화된 시스템을 생각하기로 한다. 탄성지반은 Winkler형태의 지반이라고 가정하고 보는 세장형이고 회전관성효과 및 전단변형을 무시한다. 이와 같이 탄성지반 위에 놓여 있고 m개의 중간지지점 및 p개의 병진스프링, q개의 회

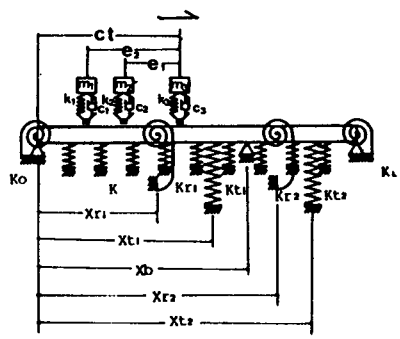

Fig. 1 The restrained beam with an intermediate support

전스프링이 부착되어 있고, 하중이 이동하는 경우에 대한 보의 운동방정식은 Hamilton 원리를 이용하여 다음과 같이 유도된다.

$$\int_{t1}^{t2}\left\{\int_0^L[\underline{\delta L}+\underline{\delta W_{nc}}]dx+\underline{\delta L_0}\right\}dt=0 \quad (1)$$

$$\underline{L}=\frac{1}{2}m\dot{v}^2-\frac{1}{2}EIv''^2-\frac{1}{2}Kv^2$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}K_{ti}\delta(x-x_{ti})v^2$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{q}K_{rj}\delta(x-x_{rj})v'^2$$
$$L_0=-\frac{1}{2}K_0v'^2\Big|_{x=0}-\frac{1}{2}K_Lv'^2\Big|_{x=L}$$
$$\underline{\delta W_{nc}}=-C_d\dot{v}\underline{\delta v}+P_t\delta(x-Ct)\underline{\delta v}$$
$$P_t=P_c+Q\sin(\omega_ht)$$

여기서 δ는 Dirac delta함수, $\cdot$는 시간에 대한 미분, $'$는 x에 대한 미분을 나타내고, 이동하중 P_t는 정적성분(P_c)과 기진주파수가 ω_h인 동적성분($Q\sin(\omega_ht)$)으로 구성되어 있다. 식 (1)을 정리하면 다음과 같다.

$$\int_{t1}^{t2}\Big\{\int_0^L[-m\ddot{v}-EIv^{iv}-Kv-\sum_{i=1}^{p}$$
$$K_{ti}\delta(x-x_{ti})v+\sum_{j=1}^{q}K_{rj}(\delta(x-x_{rj})v')'$$
$$-C_dv'+P_t\delta(x-ct)]\underline{\delta v}dx-EIv''\underline{\delta v'}\Big|_0^L$$
$$+EIv'''\underline{\delta v}\Big|_0^L-K_0v'\underline{\delta v'}\Big|_{x=0}$$
$$-K_Lv'\underline{\delta v'}\Big|_{x=L}\Big\}dt=0 \quad (2)$$

윗 식으로 부터 다음과 같은 운동방정식과 경계조건을 구할 수 있다.

$$m\ddot{v}+EIv^{iv}+Kv+\sum_{i=1}^{p}K_{ti}\delta(x-x_{ti})v$$
$$-\sum_{j=1}^{q}K_{rj}(\delta(x-x_{rj})v')'+C_d\dot{v}=P_t\delta(x-ct) \quad (3)$$
$$EIv''-K_0v'=0 \text{ at } x=0 \quad (4)$$
$$EIv''+K_Lv'=0 \text{ at } x=L$$
$$v=0 \quad \text{at } x=0,\ L$$
$$v=0 \text{ at } x=x_{bI}\ (I=1,\ 2,\cdots,\ m)$$

식 (3)은 이동하중의 질량효과를 고려하지 않은 방정식이다. 스프링과 댐퍼로 이루어진 r개의 질량이 이동하는 경우, 중력을 고려한 이동물체와 보의 운동방정식은 P_t를 대치하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$m\ddot{v}+EIv^{iv}+Kv+\sum_{i=1}^{p}K_{ti}\delta(x-x_{ti})v$$
$$-\sum_{i=1}^{q}K_{rj}(\delta(x-x_{rj})v')'+C_d\dot{v}=\sum_{s=1}^{r}$$
$$(m_sg-m_s\ddot{z}_s)\delta(x-ct+e_s) \quad (5)$$
$$m_s\ddot{z}_s+c_s(\dot{z}_s-\dot{v})+K_s(z_s-v)=0$$
$$at\ x=ct-e_s\ (s=1,\ 2,\ \cdots,\ r) \quad (6)$$

여기서 m_s,c_s,K_s,z_s는 s번째 이동물체의 질량, 감쇠계수, 스프링상수 및 횡방향변위를 나타낸다. 식 (5), (6)과 경계조건 및 초기조건을 설정하여 해를 구할 수 있다.

3. 다지지점이 있는 보의 시도함수

Galerkin방법을 사용하기 위한 시도함수는 기하학적 경계조건 뿐만 아니라 동적 경계조건도 만족하여야 한다. 다지지점이 있는 보(multi-span beam)에 대한 시도함수를 구하기 위하여 우선 $x^*=x/L, S_0=K_0L/EI, S_L=K_LL/EI, \Phi_k^*=\Phi_k/L$ 로 무차원화 시킨다. 여기서 S_0 및 S_L은 양단에서 무차원화된 회전 스프링의 강성계수를 나타내며, Φ_k는 k차 시도함수를 의미한다. 중간지지점이 m개인 경우, 최저차 시도함수는 다음과 같이 가정한다.

$$\Phi^*_1(x^*)=A_{m+4}x^{*m+4}+A_{m+3}x^{*m+3}$$
$$+\cdots+A_2x^{*2}+A_1x^{*1}$$
$$\Phi^*_1(0)=\Phi^*_1(1)=0$$
$$\Phi^*_1(x^*_{bI})=0(I=1,\ 2,\cdots,\ m)$$
$$\Phi^*_1{}''(0)=S_0\Phi^*_1{}'(0)$$
$$\Phi^*_1{}''(1)=-S_L\Phi^*_1{}'(1)$$

위의 조건식을 대입하면 아래와 같은 연립방정식을 얻는다.

$$\begin{cases} A_{m+4}+A_{m+3}+\cdots+A_2+A_1=0 \\ A_{m+4}x^*_{bI}{}^{m+4}+A_{m+3}x^*_{bI}{}^{m+3}+\cdots+ \\ \quad A_2x^*_{bI}{}^2+A_1x^*_{bI}=0 \\ \quad (I=1,\ 2,\ ,\ m) \\ 2A_2=S_0A_1 \\ (m+4)(m+3)A_{m+4}+(m+3)(m+2)A_{m+3} \\ \quad +\cdots+6A_3+2A_2=-S_L((m+4) \\ \quad A_{m+4}+(m+3)A_{m+3}+\cdots+2A_2+A_1) \end{cases}$$

윗 식으로 부터 $\Phi^*_1(x^*)$를 구할 수 있으며, 고차 시도함수 $\Phi^*_n(x^*)$은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Phi^*_n(x^*)=A_{n,n+m+3}x^{*n+m+3}+A_{n,n+m+2}x^{*n+m+2}$$
$$+\cdots+A_{n,2}x^{*2}+A_{n,1}x^*$$

각 계수는 경계조건 외에 다음과 같은 직교조건을 부가하여 구할 수 있다.

$$\int_0^1 m(x^*)\Phi^*_i(x^*)\Phi^*_j(x^*)dx^*=C_i\delta_{ij}$$
$$(i,\ j=1,\ 2.\cdots,\ n)$$

여기서 $\Phi^*_1(x^*),\Phi^*_2(x^*),\cdots,\Phi^*_n(x^*)$을 다음과 같이 정규화하여 $\phi_1(x^*),\phi_2(x^*),\cdots,\phi_n(x^*)$을 구한다.

$$\phi_i(x^*)=\left\{\int_0^1 m(x^*)\Phi^{*2}_i(x^*)dx^*\right\}^{-1/2}\Phi^*_i(x^*)$$
$$(i=1,\ 2,\cdots,\ n)$$

위와 같은 방법으로 구한 시도함수는 기하학적 경계조건 뿐만 아니라 동적 경계조건도 만족한다. 그러나 참고문헌 (13)과 (14)에서와 같이 Gram-Schmidt직교화 과정을 이용하여 구한 시도함수는 기하학적 경계조건만 만족한다. 단순지지보인 경우에는 위의 과정에서 $S_0=0,S_L=0$로 두어서 구할 수 있고, 양단고정보(clamped beam)는 동적 경계조건을 $\Phi^*_1{}'(0)=\Phi^*_1{}'(1)=0$의 기하학적 경계조건으로 대치하여 시도함수를 구할 수 있다. 양단고정보인 경우는 기하학적 경계조건만으로 이루어져 있으므로 위의 방법과 Gram-Schmidt직교화 과정을 이용해서 구한 시도함수는 서로 일치한다.

4. 해석방법

다지지점이 있는 보 및 이동질량의 무차원화된 운동방정식, 경계조건, 초기조건은 다음과 같다.

$$\frac{L^4m}{EI}\ddot{v}^*+2\omega_d\frac{L^4m}{EI}\dot{v}^*+v^{*iv}+\frac{L^4K}{EI}v^*$$
$$=\sum_{i=1}^{p}\frac{L^3K_{ti}}{EI}\delta^*(x^*-x_{ti}^*)v^*$$
$$-\sum_{j=1}^{q}\frac{LK_{rj}}{EI}(\delta^*(x^*-x_{rj}^*)v^{*\prime})'$$
$$=\sum_{s=1}^{r}\left(48\frac{m_{rs}}{m_{r1}}-\frac{L^4m}{EI}m_{rs}\ddot{z}^*_s\right)$$
$$\delta(x^*-\omega t/\pi+e^*_s) \qquad (7)$$

$$\frac{L^4m}{EI}m_{rs}\ddot{z}^*_s+2\zeta_s\omega_{ms}\frac{L^4m}{EI}m_{rs}(\dot{z}^*_s-\dot{v}^*)$$
$$+\frac{L^3K_s}{EI}(z^*_s-v^*)=0$$
$$\text{at } x^*=\omega t/\pi-e^*_s \quad (s=1,\ 2,\cdots,\ r) \qquad (8)$$

$$v^{*\prime\prime}=\ S_0v^{*\prime} \quad \text{at } x^*=0 \qquad (9)$$
$$v^{*\prime\prime}=-S_Lv^{*\prime} \quad \text{at } x^*=1$$
$$v^*=0 \quad \text{at } x^*=0,\ 1$$
$$v^*=0 \quad \text{at } x^*=x^*_{bI}$$
$$(I=1,\ 2,\cdots,\ m)$$
$$v^*=\dot{v}^*=z^*_s=\dot{z}^*_s=0 \text{ when } t=0$$

여기서 $v_0=m_1gL^3/EI,v^*=v/v_0,\delta^*=\delta\times L,C_d=2m\omega_d,c^*=c/L=\omega/\pi,z^*=z/v_0,m_{rs}=m_s/mL,\zeta_s=c_s/2(K_sm_s)^{1/2},\omega_{ms}=(K_s/m_s)^{1/2}$이다. (이하 무차원을 의미하는 기호 *생략)

보의 횡방향 변위는 앞서 구한 시도함수를 이용하여 전개하면,

$$v^n(x,t)=\sum_{k=1}^{n}\phi_k(x)\,Y_k(t) \qquad (9)$$

로 나타낼 수 있고, 식 (9)를 식 (8)에 대입하면 다음과 같다.

$$G\ m_{rs}\ddot{z}_s+2\zeta_s\omega_{ms}Gm_{rs}[\dot{z}_s$$
$$-\sum_{k=1}^{n}\phi_k(\omega t/\pi-e_s)\dot{Y}_k(t)]$$
$$+S_s[z_s-\sum_{k=1}^{n}\phi_k(\omega t/\pi-e_s)\,Y_k(t)]=0$$
$$(s=1,\ 2,\cdots,\ r) \qquad (10)$$

식 (9)를 식 (7)에 대입하면, 오차함수는 다음과 같다.

$$R(v^n,x)=\sum_{k=1}^{n}\phi_k{}^{iv}Y_k+G\sum_{k=1}^{n}\phi_k\ddot{Y}_k$$
$$+2\omega_dG\sum_{k=1}^{n}\phi_k\dot{Y}_k+S\sum_{k=1}^{n}\phi_kY_k+\sum_{i=1}^{p}$$
$$S_{ti}\delta(x-x_{ti})\sum_{k=1}^{n}\phi_kY_k-\sum_{j=1}^{q}$$
$$S_{rj}(\delta(x-x_{rj})\sum_{k=1}^{n}\phi_{k'}Y_k)'-\sum_{s=1}^{r}$$
$$\left(48\frac{m_{rs}}{m_{r1}}-Gm_{rs}\ddot{z}_s\right)\delta(x-\omega t/\pi+e_s)$$

여기서, $G=\frac{L^4m}{EI}$, $S=\frac{L^4K}{EI}$, $S_{ti}=\frac{L^3K_{ti}}{EI}$, $S_{rj}=\frac{LK_{rj}}{EI}$, $S_s=\frac{L^3K_s}{EI}$이다.

Galerkin방법을 이용하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$(\phi_m,R)=\int_0^1\phi_mRdx$$
$$=G\sum_{k=1}^{n}\int_0^1\phi_k\phi_mdx\ddot{Y}_k+2\omega_dG\sum_{k=1}^{n}$$
$$\int_0^1\phi_k\phi_mdx\dot{Y}_k+\sum_{k=1}^{n}\left\{-\phi_{k''}\phi_{m'}\Big|_0^1\right.$$
$$+\int_0^1\phi_{k''}\phi_{m''}dx+S\int_0^1\phi_k\phi_mdx$$
$$\left.+\sum_{i=1}^{p}S_{ti}\phi_k\phi_m\Big|_{x=x_{ti}}+\sum_{j=1}^{q}S_{rj}\phi_{k'}\phi_{m'}\Big|_{x=x_{rj}}\right\}Y_k$$
$$-\sum_{s=1}^{r}\left(48\frac{m_{rs}}{m_{r1}}-Gm_{rs}\ddot{z}_s\right)\phi_m\Big|_{x=\omega t/\pi-e_s}=0$$
$$(m=1,\ 2,\cdots,\ n)$$

여기서,

$$K_{km}=-\phi_{k''}\phi_{m'}\Big|_0^1+\int_0^1\phi_{k''}\phi_{m''}dx$$
$$+S\delta_{km}+\sum_{i=1}^{p}S_{ti}\phi_k\phi_m\Big|_{x=x_{ti}}$$
$$+\sum_{j=1}^{q}S_{rj}\phi_{k'}\phi_{m'}\Big|_{x=x_{rj}}$$

라 하면, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{G\delta_{km}(\ddot{Y}_k+2\omega_d\dot{Y}_k)+K_{km}Y_k\right\}$$
$$=\sum_{s=1}^{r}\left(48\frac{m_{rs}}{m_{r1}}-Gm_{rs}\ddot{z}_s\right)\phi_m\Big|_{x=\omega t/\pi-es}$$
$$(m=1,\ 2,\cdots,\ n) \qquad (11)$$

최종적으로 식 (10), (11)을 연립하여 다음과 같은 미분방정식을 얻을 수 있으며, 이 식을 수치적분하여 동적응답을 구할 수 있다.

$$G\begin{bmatrix}[M]_{11} & [M]_{12}\\ [0] & [M]_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\ddot{Y}\}\\ \{\ddot{z}\}\end{Bmatrix}$$
$$+2G\begin{bmatrix}[C]_{11} & [0]\\ [C]_{21} & [C]_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\dot{Y}\}\\ \{\dot{z}\}\end{Bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix}[K] & [0]\\ [K]_{21} & [K]_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{Y\}\\ \{z\}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{F\}\\ \{0\}\end{Bmatrix} \qquad (12)$$

여기서 각 행렬의 요소는 다음과 같다.

$$[M_{km}]_{11}=\delta_{km}(k,m=1,2,\cdots,n)$$
$$[M_{km}]_{12}=m_{rm}\phi_k\Big|_{k=\omega t/\pi-e_m}$$
$$(k=1,\ 2,\cdots,\ n,\ \ m=1,\ 2,\cdots,\ r)$$
$$[M_{km}]_{22}=\delta_{km}m_{rk}(k,m=1,\ 2,\cdots,r)$$
$$[C_{km}]_{11}=\delta_{km}\omega_d(k,m=1,\ 2,\cdots,\ n)$$
$$[C_{km}]_{21}=-\omega_{mk}m_{rk}\zeta_k\phi_m\Big|_{x=\omega t/\pi-e_k}$$
$$(k=1,\ 2\cdots,\ r,\ \ m=1,\ 2,\cdots,\ n)$$
$$[C_{km}]_{22}=\delta_{km}\omega_{mk}m_{rk}\zeta_k$$
$$(k,\ m=1,\ 2,\cdots,\ r)$$
$$[K_{km}]_{21}=-S_k\phi_m\Big|_{x=\omega t/\pi-ek}$$
$$(k=1,\ 2,\cdots,\ r,\ \ m=1,\ 2,\cdots,\ n)$$
$$[K_{km}]_{22}=\delta_{km}S_k$$
$$(k,\ m=1,\ 2,\cdots,\ r)$$
$$\{F_k\}=\sum_{s=1}^{r}\left(48\frac{m_{rs}}{m_{r1}}\right)\phi_k\Big|_{x=\omega t/\pi-e_s}$$
$$(k=1,\ 2,\cdots,\ n)$$
$$\{Y\}^T=[Y_1,\ Y_2,\cdots,\ Y_n],$$
$$\{z\}^T=[z_1,\ z_2,\ \cdots,z_r]$$

이러한 해석방법은 구조물의 비선형 요소로 인하여 비선형 해석을 수행할 경우에도 그대로 적용할 수 있는 장점이 있다.

5. 수치해석 결과 및 고찰

본 논문에서 사용한 방법을 검증하기 위하여 완전해가 존재하는 경우(질량효과를 고려하지 않은 하중이 단순지지보에서 이동하는 경우)에 대하여 참고문헌 (1)에서 구한 완전해와 본 논문의 방법으로 구한 해를 비교하였다(Fig. 2). 여기서 결과를 무차원 변수로 나타내기 위하여 속도인자 $\alpha=\omega/\omega_1$, 감쇠인자 $\beta=\omega_d/\omega_1$, 기진인자 $\gamma=\omega_h/\omega_1$를 정의한다. Figs. 2~4는 단순지지보에서 하중 $P_t=P_c+Q\sin(\omega_h t)$인 경우로서 Fig. 2는 $P_c=0$, $\alpha=0.1$, $\beta=0.15$, $\gamma=1$, 즉 하중의 기진주파수가 보의 최저차 고유진동수와 공진을 일으키며 이동하는 경우이다. 여기서 완전해와 Galerkin방법으로 구한 해가 단지 한개의 모드만 사용하여 계산하여도

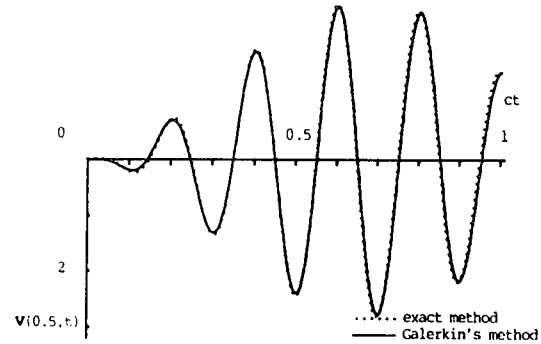

Fig. 2 The dynamic response of the beam at $x=0.5$

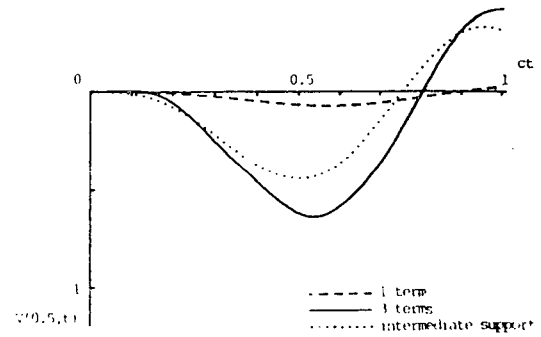

Fig. 3 The effects of the translational spring

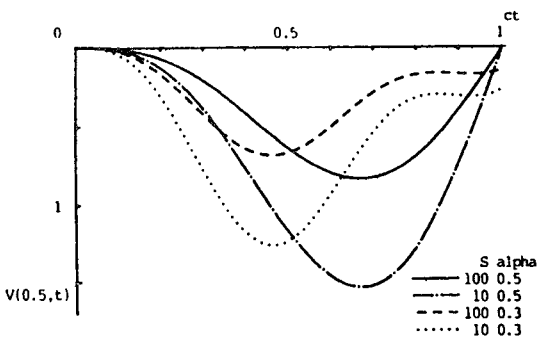

Fig. 4 The effects of the elastic foundation

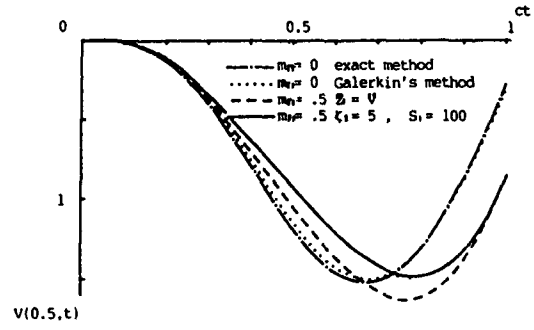

Fig. 5 The effects of the mass with or without a spring and damper

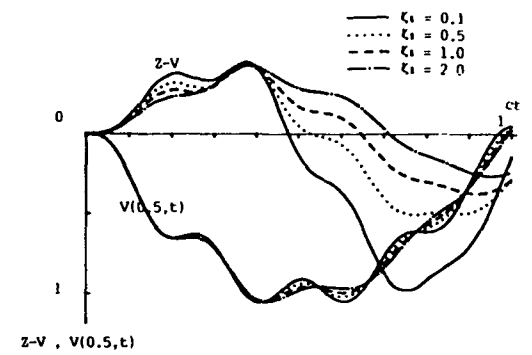

Fig. 6 The effects of the damper attached to the moving mass

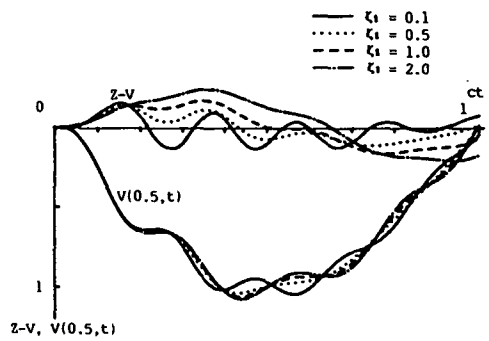

Fig. 7 The effects of the damper when the natural frequency of the moving mass is high

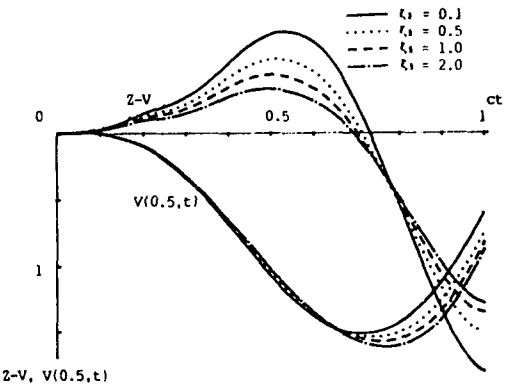

Fig. 8 The effects of the damper when the speed of the moving mass is high

두 결과가 거의 일치되는 것을 알 수 있다. Fig. 3은 $Q=0$, $\alpha=0.4$이고 $x_{t1}=0.9$위치에 병진스프링이 부착된경우($S_{t1}=10000$)를 나타낸다. 스프링 상수가 큰 경우에는 한개의 모드를 사용하여 계산한 결과는 커다란 오차를 나타내지만, 모드 수를 증가시켜서 계산하면 정확한 결과를 얻을 수 있다. Fig. 4는 $Q=0$인 경우, α와 탄성지반의 스프링상수가 동적응답에 미치는 영향을 나타낸다. 스프링 상수가 클수록 동적응답이 적어지는 것을 알 수 있다. 하중의 이동속도가 적은 경우 ($\alpha=0.3$)는 최대 응답은 하중이 보의 중간 부분에 도달할 때 일어나지만 이동속도가 커질수록 중간 이후 부분에서 일어난다. Fig. 5는 단순지지보에서 $\alpha=0.5$, $\beta=0.1$인 경우의 완전해와 근사해를 비교하였고, $m_{r1}=0.5$로서 식 (3)에서 $P_t=m_1g-m_1\partial^2v/\partial t^2$를 대입하여 질량효과를 고려한 근사해와 식 (12)에 $\zeta_1=5$, $S_1=100$를 대입하여 스프링과 댐퍼를 가지고 운동하는 질량의 효과를 서로 비교하였다. 보와 같이 운동하는 이동질량의 경우[$z_1=v(ct,t)$]는 응답은 지연되고 최대응답은 커진다. 스프링과 댐퍼로 구성된 이동질량의 경우는 응답이 지연되고 최대응답의 변화는 거의 없음을 알 수 있다. Figs. 6~8는 단순지지보에서 질량에 부착된 댐퍼의 영향으로서 보의 중간점에서의 변위 및 이동질량의 보에 대한 상대 변위를 나타낸다. Fig. 6은 $c/L=0.4\ \text{sec}^{-1}$, $m_{r1}=0.2$ 그리고 $S_1=1$인 경우로서 감쇠계수가 증가하면 동적응답이 감소하는 것을 알 수 있다. Fig. 7은 Fig. 6의 경우에서 $S_1=10$으로서 이동질량의 국부 고유진동수가 증가할 때 $\zeta_1=1$, 2에서는 감쇠계수를 증가하면 동적응답이 증가하는 것을 알 수 있다. Fig. 8은 Fig. 7의 경우에서 $c/L=2\ \text{sec}^{-1}$로 증가한 경우로서 감쇠계수가 증가하면 동적응답이 감소하는 것을 알 수 있다. 참고문헌 (1)에서는 이동속도에 따라 부착된 댐퍼의 계수가 증가할 때 동적응답이 증가하는 특이한 범위가 존재하는 것을 언급하였지만 본 논문에서는 이동

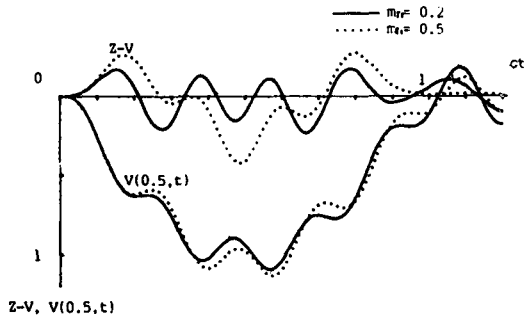

Fig. 9 The effects of the moving mass

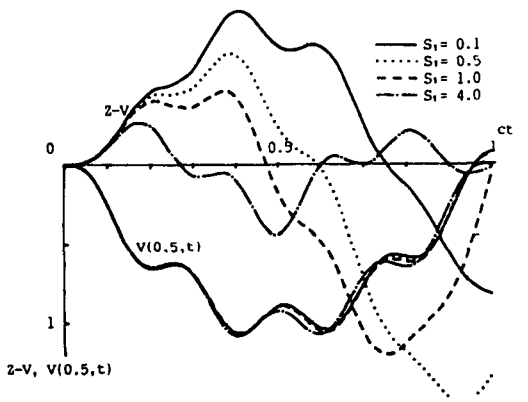

Fig. 10 The effects of the spring attached to the moving mass

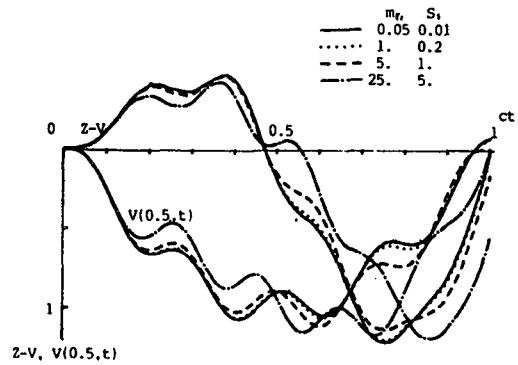

Fig. 11 The effects of the variations of mass and spring with the same ratio

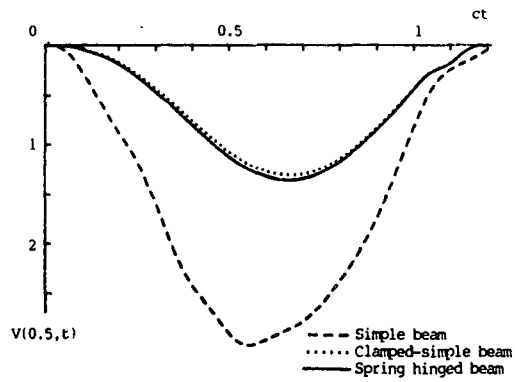

Fig. 12 The effects of the rotational spring at $x=0$

속도뿐만 아니라 이동 질량의 고유진동수에 따라서 그러한 범위가 존재하는 것을 알 수 있다. Fig. 9는 단순지지보에서 보의 질량에 대한 하중의 질량비의 효과로서 $c/L=0.4\,\mathrm{sec}^{-1}$, $\zeta_1=0$ 그리고 $S_1=10$이다. 질량비가 클수록 동적응답은 증가한다. Fig. 10은 단순지지보에서 질량에 부착된 스프링의 영향으로서 $c/L=0.4\,\mathrm{sec}^{-4}$, $m_{r1}=0.2$그리고 $\zeta_1=0$인 경우로서 스프링 상수가 증가하면 동적응답이 감소하는 것을 알 수 있다. Fig. 11은 단순지지보에서 이동질량의 고유진동수를 일정하게 질량과 스프링을 변화시킨 경우로서 $c/L=0.4\,\mathrm{sec}^{-1}$ 그리고 $\zeta_1=0$이다. 이 경우는 질량 및 스프링상수가 낮은 값에서는 동적응답 인자의 변화가 거의 없음을 알 수 있다. Fig. 12는 $c/L=0.4\,\mathrm{sec}^{-1}$, $\zeta_{1,2,3}=0.1$, $e_{2,3}=0.1, 0.2$, $m_{r1,2,3}=0.2$ 그리고 $S_{1,2,3}=10$인 경우단순지지보, 고정(clamped)—단순지지보 그리고 $x_{r1}=0$에서 $S_0=100$인 회전스프링이 부착된 스프링 힌지-단순지지보의 동적응답을 나타내었다. 이 경우 고정 경계조건은 강성계수가 큰 회전스프링으로 대치하여 계산하여도 비교적 정확한 결과를 얻을 수 있었다.

6. 결 론

이상과 같은 수치해석 결과로 부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) 보의 중간지지점, 고정 경계조건 등은 강성계수가 큰 병진 및 회전스프링으로 대치하여 계산할 수 있다.

(2) 일반적으로 일차 모드만을 사용하여 계산하여도 비교적 정확한 동적응답을 구할 수 있으나 스프링 상수가 큰 경우는 고차 모드를 포함하여 계산하여야 한다.

(3) 하중의 이동속도가 클수록 최대 변위는 하중의 위치가 보의 중간 이후 부분에 도달할 때 나타난다.

(4) 일반적인 경우에서 댐퍼의 영향으로 동적응답은 감소하지만 이동 질량에 부착된 댐퍼의 경우 이동 질량의 국부 고유진동수 또는 이동속도에 따라서 동적응답이 증가하는 경우도 있다.

(5) 구속 조건이 많고 다지지된 보(multi-span beam)에서 움직이는 하중에 대한 동적응답 해석은 본 논문의 방법으로 효과적으로 수행할 수 있다.

참 고 문 헌

(1) Fryba, L., 1972, "Vibration of Solids and Structures under Moving Loads", Groningen : Noordhoff International Publishing.

(2) Hamada, T.R., 1981, "Dynamic Analysis of a Beam under a Moving Force : A Double Laplace Transform solution", Journal of Sound and Vibration, Vol. 74, pp. 221~233.

(3) Hino, J., Yoshimura, T., Konishi, K., and Ananthanarayana, N., 1984, "A Finite Element Method Prediction of the Vibration of a Bridge Subjected to a Moving Vehicle Load", Journal of sound and Vibration, Vol. 96, pp. 45~53.

(4) Yoshimura, T., Hino, J., and ananthanarayana, N., 1986, "Vibration analysis of a Non-linear Beam subjected to Moving Loads by Using the Galerkin Method", Journal of sound and Vibration, Vol. 104, pp. 179~186.

(5) Katz, R., Lee, C.W., Ulsoy, A.G., and Scott, R.A., 1987, "Dynamic Stability and Response of a Beam Subject to a Deflection Dependent Moving Load", Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, Vol. 109, pp. 361~365.

(6) Lee, C.W., Katz, R., Ulsoy, A.G., and Scott, R.A., 1988, "Modal Analysis of a Distributed Parameter rotating Shaft", Journal of Sound and Vibration, Vol. 122, pp. 119~130.

(7) Katz, R., Lee, C.W., Ulsoy, A.G., and Scott, R.A., 1988, "The Dynamic Response of a Rotating Shaft Subject to a Moving Load", Journal of Sound and Vibration, Vol. 122, pp. 131~148.

(8) Jacquot, R.G., and Gibson, J.D., 1972, "The Effects of discrete Masses and Elastic Supports on Continuous Beam Natural Frequencies", Journal of Sound and Vibration, Vol. 23, pp. 237~244.

(9) Ercoli, L. and Laura, P.A.A., 1987, "Analytical and Experimental Investigation on Continuous Beams Carrying elastically Mounted Masses", Journal of Sound and Vibration, Vol. 114, pp. 519~533.

(10) Sasaki, M., and Chonan, S., 1986, "Parametric Instability of Elastically Supported Multi-span Beams", Journal of sound and Vibration, Vol. 109, pp. 181~191.

(11) Cai, C.W., Cheung, Y.K., and Chan, H.C., 1988, "Dynamic Response of Infinite Continuous Beams Subjected to a Moving Force-an Exact Method", Journal of sound and Vibration, Vol. 123, pp. 461~472.

(12) Meirovitch, L., 1980, "Compational Methods in Structural Dynamics", Sijthoff & Noordhoff International Publishers, The Netherlands.

(13) Kim, C.S., and Kkickinson, S.M., 1988, "On the Analysis of Laterally Vibrating Slender Beams Subject to Various Complicating Effects", Journal of Sound and Vibration, Vol. 122, pp. 441~455.

(14) Bhat, R.B., 1986, "Transverse Vibrations of a Rotating Uniform Cantilever Beam with Tip Mass as Predicted by Using Beam Characteristic Orthogonal Polynomials in the Rayleigh-Ritz Method", Journal of Sound and Vibration, Vol. 105, pp. 199~210.