

〈論 文〉

강소성 유한요소법을 이용한 자동차 판넬 성형공정의 평면 변형해석

양동열* · 정완진** · 송인섭* · 전기찬*** · 유동진*** · 이정우***

(1990년 10월 24일 접수)

Plane-Strain Analysis of Auto-Body Panel Using the Rigid-Plastic Finite Element Method

D.Y. Yang, W.J. Chung, I.S. Song, G.C. Jun, D.J. Yoo and J.W. Lee

Key Words : Rigid-Plastic Finite Element Method(강소성 유한요소법), Plane-Strain(평면 변형률), Skew Boundary Condition(경사면 경계조건), Normal Anisotropy(수직 이방성)

Abstract

A plane-strain finite element analysis of sheet metal forming is carried out by using the rigid-plastic FEM based on the membrane theory. The sheet material is assumed to possess normal anisotropy and to obey Hill's new yield criterion and its associated flow rule. A formulation of initial guess generation for the displacement field is derived by using the nonlinear elastic FEM. A method of contact treatment is proposed in which the skew boundary condition for arbitrarily shaped tools is successively used during iteration. In order to verify the validity of the developed method, plane-strain drawing with tools in analytic expression and with arbitrarily shaped tools is analyzed and compared with the published results. The comparison shows that the present method can be effectively used in the analysis of plane-strain sheet metal forming and thus provides the basis of approximate sectional analysis of panel-like sheet forming.

기 호 설 명	
d_i : Ferguson스플라인 곡선의 현 길이	r : 수직 이방성 계수
\bar{E}_1 : 라그랑지변형률의 불변량	$r(u)$: 3차 매개변수 다항식의 방정식
e_x, e_y : 경사좌표계의 축방향 단위벡터	r_0, r_1 : 3차 매개변수곡선의 양 끝 점에서의 위치벡터
F : 유체 압력을 제외한 외력에 의한 절점력	t_0, t_1 : 3차 매개변수곡선의 양 끝 점에서의 접선벡터
K : 강성행렬	t_0, t_{0+r} : 각 변형 단계에서의 변형의 시작과 끝 시간
m : HILL의 신이방성 이론에서의 계수	T : 좌표 변환 행렬
n : 가공경화 지수	U : 직교 좌표계에서 총합된 절점변위벡터
R : 불균형 힘 벡터	\bar{U} : 변환된 좌표계에서의 총합된 절점 변위 벡터

*정회원, 한국과학기술원 생산공학과

**정회원, 삼성 종합기술원 CAE센터

***기아 자동차 생산기술 연구팀

U_r	: 절점의 금형에 대한 상대변위
w_i	: 현 길이의 비
β	: 감속계수
$\Delta \bar{\epsilon}$: 한 변형단계에서의 유효 변형률 증분
$\bar{\sigma}$: 유효 응력
σ_n	: 금형표면에 수직인 방향의 접촉응력
ϕ	: 금형표면에 수직인 방향의 접촉간극

참 차

t_0	: 시간 t_0 에서의 상태
t_r	: 시간 t_r 에서의 상태

1. 서 론

자동차 산업에서 자동차의 각종 박판성형이 차지하는 비중은 매우 크며 자동차의 외관, 강성, 안전성 등에 영향을 미치고 있다. 우수한 박판성형품을 생산하기 위해서는 성형상의 특성을 적절히 고려한 공정설계와 이에 따르는 금형설계가 필수적이다. 박판금속의 가공은 재료의 물질특성, 금형의 기하학적인 형상, 금형과 재료간의 마찰, 가공방법 등의 여러가지 공정변수에 의해 복합적인 영향을 받는다. 또한 금속의 성형한계는 생산품의 품질에, 나아가서는 가공의 성패에 큰 영향을 끼친다. 이러한 변형의 복잡성과 성형한계에 대한 이해부족으로 지금까지의 금형설계는 주로 시행착오법에 의존하여 왔으며 따라서 오랜 시간의 경험축적을 필요로 하였다. 근래에 선진국에서는 이 분야의 효과적이고 체계적인 기술전달 및 축적 그리고 표준화문제등에 대하여 많은 연구를 하고 있으며 새로운 소재 및 관련 가공법의 개발, 공정 개발기간의 단축 그리고 품종의 다양화에 대응하기 위하여 역학적인 관점에서 박판 소성가공 공정에 대한 여러 공정 변수들의 영향을 규명하고 또 그 결과를 공정 설계에 이용하기 위한 연구가 활발히 진행되고 있다.

자동차 산업의 역사가 짧은 우리나라에서는 이 분야의 기술축적이 부족하기 때문에 생산현장에서의 경험에 따른 점진적인 기술축적과 병행하여 역학적 접근방법에 따른 단계별 시뮬레이션(simulation)을 공정설계에 응용하는 것이 효과적일 것이다.

역학적인 관점에서 볼 때 박판성형 공정은 박판 금속이 소성변형을 하고 성형중에서 형상변화 효과가 크므로 재료적으로 또 기하학적으로 비선형문제가

다. 또한 박판재료의 이방성도 박판변형에 큰 영향을 미친다. 이러한 역학적 특성 외에도 대부분의 제품이 3차원형상 이므로 금형과 박판과의 접촉과 마찰문제 그리고 금형의 기하학적 형상이 고려되어야 한다. 따라서 이에 대한 해를 해석적인 방법으로 구하기는 매우 어려우며 주로 수치적인 방법에 의존하고 있다.

최근에 박판 성형의 해석에 탄소성 유한요소법과 강소성 유한요소법이 성공적으로 적용되고 있다. 탄소성 유한요소법은 탄성 변형을 고려하고 응력적분을 수행하므로 해중(unloading)과 응력상태를 계산할 수 있으나 단점으로는 계산 시간의 과다를 들 수 있다. Shim등^(1,2)은 박막요소를 사용하고 Updated Lagrangian수식화를 이용하여 탄소성 유한요소법으로 정수압 벌징(hydrostatic bulging), 신장성형(stretch forming), 딥-드로잉(deep-drawing)등에 적용하였다. 강소성 유한요소법은 Kobayashi와 Kim⁽³⁾이 축대칭 박판 성형의 해석에 대한 수식을 유도하고 정수압벌징, 신장성형, 딥-드로잉등에 적용하였다. Toh와 Kobayashi⁽⁴⁾는 박판의 3차원 대변형에 대하여 강소성 유한요소 수식을 유도하고 이를 사각형 컵의 딥-드로잉에 적용하였다. Wang⁽⁵⁾은 한 변형단계 동안에 변형경로를 가정하여 에너지법으로 강소성 유한요소 수식화를 유도하고 정수압 벌징과 신장성형에 적용하였다. Yang과 Kim^(6,7)은 한 변형단계 동안의 변형 경로에 대한 가정과 주질점 좌표계를 사용하여 보다 일반적인 수식화를 이룩하고 정수압 벌징에 이를 적용하여 그 타당성을 보였다. 또 이를 평면 이방성 축의 회전을 고려하여 평면 이방성 재료에까지 확장하였으며 딥-드로잉의 플랜지 변형해석에 성공적으로 적용하였다⁽⁸⁾. Chung등⁽⁹⁾은 같은 방법을 사용하여 국부 질점좌표계를 도입하여 HILL의 신 이방성 이론을 따르는 재료에 대하여 강소성 유한요소법을 유도하고 알루미늄, 구리, 황동등의 타원형 격막의 정수압 벌징의 해석을 하였다.

위와 같이 3차원 예제의 박판 성형공정에도 잘 적용되고 있으나, 자동차 판넬과 같은 복잡한 형상에는 접촉, 마찰, 계산시간등과 같은 여러가지 문제점이 있다. 따라서 자동차 회사, 연구소등에서는 판넬등에 대한 신속한 공정해석을 위하여 판넬을 길이 방향에 따라 유한개의 단면(Section)에 대해 2차원 해석을 하여 이를 조합한 연구가 시행된 바 있다⁽¹⁰⁾.

본 논문에서는 평면 변형을 강소성 유한요소법을 이용하여 유한요소 수식화를 유도하고 금형이 해석적인 함수로 묘사되는 드로잉 공정을 해석하고, 금형이 해석적인 함수로 묘사되지 않는 실제적인 자동차 성형품의 드로잉 공정을 해석하여 기존의 결과와 비교하여 본 방법의 타당성을 검토하였다.

2. 이 론

2.1 평면 변형을 강소성 유한요소법

박판성형을 효과적으로 해석하기 위해서는 기하학적, 재료적 비선형성을 고려한 해석이 필수적이다. 위와 같은 점을 고려하여 Yang과 Kim⁽⁶⁾은 Hill의 2차 항복 이론을 이용하고 주 절점좌표계 (principal convected coordinate system)와 한 단계동간의 변형경로에 대한 가정을 사용하여 수직 이방성 (normal anisotropy)의 가정하에서 박막요소를 사용하여 3차원 박판성형에 대한 강소성 유한요소법을 수식화하였다. Chung⁽⁹⁾등은 Hill의 신이방성이론⁽¹¹⁾을 따르는 재료에 대하여 강소성 유한요소법을 유도하였다. 본 연구에서는 Chung등에 의해 개발된 유한요소법을 평면변형률 문제인 경우에 대하여 적용하였다.

변형속도에 무관한 재료가 Fig. 1과 같이 t 에서 $t + \tau$ 까지 변형할 때 두께 방향에 따르는 물리량의 변화를 무시하여 재료의 응력상태를 평면응력상태로 가정하면 변형속도에 무관한 비압축성 박판재료가 $t + \tau$ 에서 평형이 성립하기 위한 필요충분조건

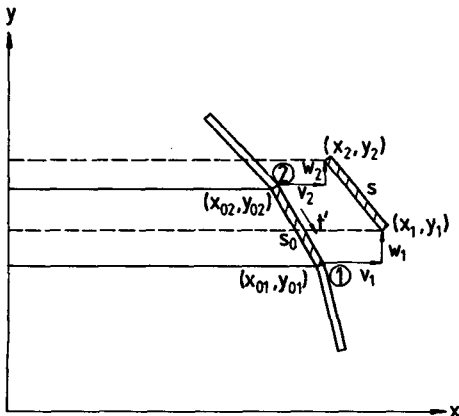


Fig. 1 Deformation of the line element in plane-strain finite element method

은 가상일원리에 의해 다음과 같이 주어진다. 이 가정은 두께에 비해서 폭변형이 큰 대부분의 박판변형에서는 매우 타당한 가정이라고 생각된다.

$$\int_{A_0}^r \bar{\sigma} \delta(\Delta \epsilon) t^0 dA^0 - \int_{sr} t \cdot \delta u dS^r = 0 \quad (1)$$

이때 식 (1)에서 r 동안의 유효변형률 증분은 주 절점 좌표계와 변형경로에 대한 가정으로부터 다음과 같이 불변량(invariant)의 함수로 나타낼 수 있다.

$$\Delta \bar{\epsilon} = \frac{[2(1+r)]^{1/m}}{4} \left[\frac{1}{(1+2r)^{1/(m-1)} + 1} \right]^{(m-1)/m} \phi^{1/2} \quad (2)$$

식 (2)에서 ϕ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \phi &= (\ln {}^r g_1 / {}^0 g_1)^2 \cong 4 \left(\bar{E}_1^2 - 2\bar{E}_1^3 + \frac{11}{3}\bar{E}_1^4 \right. \\ &\quad \left. - \frac{8}{3}\bar{E}_1^5 + \frac{16}{9}\bar{E}_1^6 \right) \\ &\cong 4 \left(\bar{E}_1^2 - 2\bar{E}_1^3 + \frac{11}{3}\bar{E}_1^4 \right) \quad (3) \end{aligned}$$

여기서 \bar{E}_1 는 다음과 같이 주어진다.

$$\bar{E}_1 = E_1^0 g^1 \quad (4)$$

식 (1)~(4)를 이용하고 유한요소 수식화 과정을 적용하면 다음과 같은 비선형 방정식을 얻는다.

$$Q(\tilde{U}) = P(\tilde{U}) + F \quad (5)$$

여기서 $P(\tilde{U})$ 는 압력에 의한 절점력을 나타내고 F 는 그 외의 힘에 의한 절점력을 나타내며 식 (1)의 첫째항에 해당하는 $Q(\tilde{U})$ 는 다음과 같다.

$$Q(\tilde{U}) = \sum_e \int_{A^{(e)}} {}^r \bar{\sigma}^0 g^1 \frac{\partial(\Delta \bar{\epsilon})}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial E_1} K_1 t^0 dA^0 \quad (6)$$

식 (5)는 비선형 방정식이므로 식 (7)과 같이 선형화하여 뉴턴-랩슨(Newton-Raphson)방법으로 해를 구한다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{U}^r} [Q(\tilde{U}) - P(\tilde{U})] |_{U=U^{(i-1)}} \cdot \Delta \tilde{U}^{(i)} &= F \\ - Q(\tilde{U}^{(i-1)}) + P(\tilde{U}^{(i-1)}) \quad (7) \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial \tilde{U}^r} &= \sum_e \int ({}^0 g^1)^2 \left[H' \left[\frac{\partial \Delta \bar{\epsilon}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial E_1} \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + {}^r \bar{\sigma} \frac{\partial^2 \Delta \bar{\epsilon}}{\partial \phi^2} \left[\frac{\partial \phi}{\partial E_1} \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + {}^r \bar{\sigma} \frac{\partial \Delta \bar{\epsilon}}{\partial \phi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial E_1^2} \right] K_1 K_1^T t^0 dA^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_i \int_0^{g^i \tau} \bar{\sigma} \frac{\partial \Delta \bar{\epsilon}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial E_1} \mathbf{B}_i t^0 dA^0 \\
\mathbf{K}_1 &= \mathbf{B}_1(\bar{\mathbf{X}} + \bar{\mathbf{U}}) \\
\delta \bar{E}_1 &= {}^0 g^i \delta E_1 = {}^0 g^i \delta \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{B}_1(\bar{\mathbf{X}} + \bar{\mathbf{U}}) \\
&= {}^0 g^i \delta \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{K}_1 \\
H' &= \partial^r \bar{\sigma} / \partial \Delta \bar{\epsilon}
\end{aligned}$$

여기서 i 는 반복계산 횟수를 나타낸다. 식 (7)로부터 다음과 같은 유한요소 방정식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{U} = \mathbf{R} \quad (8)$$

이때 매번의 반복계산후에 변위벡터는 다음 식에 의해 수정된다.

$$\bar{\mathbf{U}}_{(i)} = \bar{\mathbf{U}}_{(i-1)} + \beta \Delta \bar{\mathbf{U}}_{(i)} \quad (9)$$

여기서 β 는 감속계수로 0에서 1사이의 값을 가진다. 소재내의 변형이 어느정도 진행되면 변형의 국부화 현상이 생겨 소재내의 어느 일부분만 변형이 생기게 되고 다른부분에서는 해중이 일어나게 된다. 본 연구에서 사용하는 강소성 재료의 특성방정식은 해중의 경우 그 부분에서의 응력을 알 수 없어 해가 발산하게 된다. 이러한 어려움을 수치적으로 해결하기 위하여 Osakada등⁽¹²⁾이 사용한 방법을 채용하여 변형률 증분을 식 (10)과 같이 수정하여 사용하였다.

$$d\bar{\epsilon} = \sqrt{d\bar{\epsilon}^2 + d\bar{\epsilon}_0^2} \quad (10)$$

여기서, $d\bar{\epsilon}_0$ 는 $d\bar{\epsilon}$ 에 비하여 작은 상수이다.

이 방법으로 해중에 의한 실제적인 변형량을 결정할 수는 없지만 해중이 생기는 경우에도 그에 해당되는 유효응력을 근사적으로 구할 수 있어 해의 발산을 막을 수 있다. 이때 유효응력은 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{\sigma}_0}{\sqrt{d\bar{\epsilon}^2 + d\bar{\epsilon}_0^2}} d\bar{\epsilon} \quad (11)$$

2.2 경사면 경계조건을 이용한 접촉처리방법⁽¹³⁾

박막요소를 사용한 유한요소법에서 접촉문제를 고려할 때 요소내에서 수직응력을 구할 수 없으므로 절점단위로 접촉을 고려하는 것이 편리하다. Fig. 2와 같이 두 물체가 접촉할 때 $t_0 + \tau$ 에서 두 물체 사이의 수직간극을 ϕ , 수직응력을 σ_n 이라 하면 접촉조건을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_n \cdot \phi = 0 \quad (12.a)$$

$$\phi \geq 0 \quad (12.b)$$

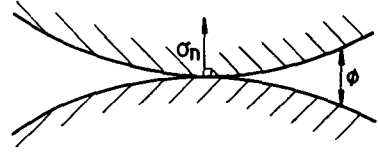


Fig. 2 Contact condition between two bodies

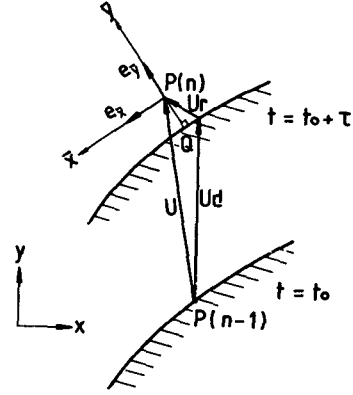


Fig. 3 Treatment of skew boundary condition

$$\sigma_n \leq 0 \quad (12.c)$$

본 연구에서는 경사좌표계를 사용하여 2차원형상의 금형에 의한 반판성형 해석시 접촉조건을 만족시켰다. 2차원 상의 임의의 곡면형상은 다음과 같이 매개변수 형태로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{r}(u) = X^s(u) \mathbf{e}_x + Y^s(u) \mathbf{e}_y \quad (13)$$

Fig. 3에서 접촉면상의 접촉점 P 에 가까운 점 Q 는 P 와 Q 사이의 거리를 최소화함으로써 얻어진다.

$$\begin{aligned}
|\overline{QP}|^2 &= [(X(P) - X^s(u))^2 + (Y(P) \\
&\quad - Y^s(u))^2]^{\frac{1}{2}} \quad (14)
\end{aligned}$$

Fig. 3과 같이 금형표면위의 점 Q 에서의 금형바깥방향의 수직벡터의 방향을 \mathbf{e}_y , 절점 P 의 편치에 대한 상대변위 \mathbf{U}_r 이 \mathbf{e}_y 에 수직인 성분벡터의 방향을 \mathbf{e}_x 로 한다. \mathbf{e}_x 와 \mathbf{e}_y 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_x &= \frac{\mathbf{U}_r - (\mathbf{U}_r \cdot \mathbf{e}_y) \mathbf{e}_y}{|\mathbf{U}_r - (\mathbf{U}_r \cdot \mathbf{e}_y) \mathbf{e}_y|} \\
\mathbf{e}_y &= \frac{\mathbf{n}(Q)}{|\mathbf{n}(Q)|} \quad (15)
\end{aligned}$$

여기서 \mathbf{U}_r 은 절점의 금형에 대한 상대변위를 나타낸다. 이 때 변환행렬 \mathbf{T} 는 다음과 같다.

$$\Delta U = T \Delta \bar{U} \quad (16)$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\bar{X}, X) & \cos(\bar{Y}, X) \\ \cos(\bar{X}, Y) & \cos(\bar{Y}, Y) \end{bmatrix} \quad (17)$$

식 (17)의 변환행렬을 이용하여 접촉절점에 대하여 유한요소 방정식 (8)을 원래의 직교좌표계 (X, Y)로 부터 경사좌표계 (\bar{X} , \bar{Y})로 변환한다.

$$\bar{K} \Delta \bar{U} = \bar{R} \quad (18)$$

여기서, $\bar{K} = T^T K T$, $\bar{R} = T^T R$ 이다.

Fig. 3에서의 $Y(Q)$ 를 식 (18)에 $\Delta U_x(P)$ 로 하여 제한조건을 부여한다. 매번의 반복계산에서 변환행렬은 새로 구해지며, e_y 는 금형에 수직인 방향을 계속 유지한다. 따라서 반복계산이 진행됨에 따라, 해가 수렴한다면 금형과 박판의 간극은 급격히 줄어들게 된다. 이때 반복계산중에 금형내부로 파고드는 절점은 접촉상태로 상태를 변경하여 같은 과정을 밟는다. Coulomb마찰조건을 만족시키기 위해 마찰력을 경사좌표계에서 절점력으로 다음과 같이 표시하였다.

$$(F_s)_i = -\frac{2}{\pi} \mu (F_y)_i \tan^{-1}(k |U_{\bar{x}}|) \quad (19)$$

$$U_{\bar{x}} = U_x - (U \cdot e_y) e_y \quad (20)$$

여기서 k 는 큰 상수이다. 식 (19)에 의해 생기는 강성행렬에 기여하는 항들은 좌표변환후에 계산되었다. 접촉조건중에서 식 (12.c)를 만족하기 위해서는 접촉절점과 금형사이에 작용하는 절점력이 압축력이어야 한다. 따라서 접촉중인 절점의 바깥방향의 수직력이 음이면(접촉→비접촉) 상태전환을 하여 반복계산 한다. 이때 절점력은 근사적으로 다음과 같이 구해진다.

$$P_y = \sum_{j=1}^n (\Delta U_j K_{yy}) - R_y \quad (21)$$

식 (12.a)~(12.c)의 접촉조건을 만족시키기 위한 자세한 알고리즘은 참고문헌 (12)에 나와 있다. 만일 P_y 가 음이면(접촉→비접촉) 절점의 접촉상태를 변경하고 변위벡터를 수정하지 않고 다시 계산한다. 이때 강성행렬 K 는 마찰력에 의한 부분만 제외하고는 다시 계산할 필요가 없다. 이 방법에 의하면 계산중에(접촉→비접촉) 상태전환이 된 절점이 다시(비접촉→접촉) 상태전환을 일으키는 경우가 있다. 이 경우 접촉상태가 반복해서 계속적으로 바뀔 수가 있다. 이러한 현상을 안정화시키기 위하여 반복계산중에 접촉상태가 바뀌는 횟수를 일정회

수 내로 제한하였다. 또한 반복 계산마다 절점력 부호판별에 의한 상태변환(접촉→비접촉)은 1회로 제한하였다.

2.3 초기 변위장 생성 수식화

강소성 유한요소법에서는 수렴성이 초기 변위장에 크게 의존한다. 따라서 초기 변위장을 잘 설정하는 것이 필수적이다.

본 연구에서는 비선형 탄성 유한요소법을 이용하여 초기 변위장을 생성하였는데 수식화는 다음과 같다.

평면 변형률하에서 내부에너지 (W)는 다음과 같이 표현된다.

$$W = \int_{A^0} \sigma_1 \epsilon_1 t^0 dA^0 = \int_{A^0} \frac{E}{(1-\nu^2)} \epsilon_1^2 t^0 dA^0 \\ = \sum_{\epsilon} \int_{A^0, \epsilon} \frac{E}{(1-\nu^2)} \epsilon_1^2 t^0 dA^0 \quad (22)$$

여기서,

$$\epsilon_1 = \ln({}^r L / {}^0 L) = \frac{1}{2} \ln({}^r g_1 / {}^0 g_1)$$

식 (22)에 변분을 취한후 비선형 방정식으로 정리하면 다음과 같다.

$$\delta W \equiv \delta \bar{U}^T Q(\bar{U}) \\ Q(\bar{U}) = \sum_{\epsilon} \int_{A^0, \epsilon} \frac{2E}{(1-\nu^2)} (\epsilon_0 + \epsilon_1) \\ \frac{\partial \epsilon_1}{\partial {}^r g_1} \frac{\partial {}^r g_1}{\partial \bar{U}} t^0 dA^0 \quad (23)$$

위의 비선형 방정식을 뉴턴-랩슨(Newton-Raphson) 방법으로 방정식의 해를 구한다. 본 수식화에서는 수렴성을 위하여 ϵ_1 대신에 $\epsilon_1 + \epsilon_0$ 로 대처하였다. 여기서 ϵ_0 는 충분히 작은 상수이다.

본 연구에서는 다음과 같이 두 단계로 나누어서 초기 변위장을 생성하였다. 첫 단계에서는 접촉 조건을 무시하고 가장 먼저 박판과 접촉하는 절점에 수직 방향의 변위를 조금 준 후 변위장을 생성한다. 두번째 단계에서는 첫 단계에서 얻어진 변위장을 원하는 변위 만큼 증폭시키고 접촉조건을 고려한 후 실제적인 초기 변위장을 생성한다.

2.4 일반적인 금형형상에의 적용

금형의 형상을 해석적인 몇 개의 곡선함수로 분할하여 박판성형 문제를 해석하는 경우에는 여러가지 장점이 있으나 이러한 방법은 금형의 형상이 바

필 때마다 이에 따른 프로그램을 새로 작성해야 하는 불편이 따른다. 실제 금형 형상은 CAD프로그램에서 매개변수 곡선요소들로 나타내질 수 있다. 이러한 CAD프로그램으로부터 생성되는 일반적인 곡선 표현방법을 사용하여 금형의 형상을 나타내면 일반적인 금형형상에 대해 접촉문제를 해결할 수 있다.

일반적인 곡선요소는 매개변수 형태(parametric form)로 나타낼 수 있으며 이러한 곡선은 여러가지가 있으며 CAD프로그램마다 동일하지 않다. 따라서 매개변수 형으로 나타내지는 모든 곡선요소에 적용할 수 있는 일반적인 알고리즘이 필요하다. 이 알고리즘은 본 연구에서 제안한 접촉처리방법을 사용하여 이 알고리즘에 따라 프로그램을 작성하고 Ferguson의 3차 매개변수 곡선(parametric cubic curve)⁽¹⁴⁾에 대하여 적용하여 보았다. Ferguson의 3차 매개변수 곡선은 다음과 같은 형태로 표시된다.

Fig. 4와 같이 공간상의 두 점 r_0, r_1 을 지나고 양 끝 점에서 접선 벡터가 t_0, t_1 인 곡선의 방정식을 3차 매개변수(cubic parametric spline curve) 다항식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 r(u) &= (x(u), y(u), z(u)) \\
 &= [0 \quad u \quad u^2 \quad u^3] \\
 &\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ t_0 \\ t_1 \end{bmatrix} = USC
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

여기서, u 는 0과 1사이의 값을 가지는 매개변수이다.

이것을 일반적으로 점 데이터의 갯수가 n 개인 경우에 위와같은 방식으로 전체적으로 부드러운 곡선을 얻으면 일반적인 Ferguson 스플라인(spline)이 된다.

Fig. 5에서 보는 바와 같이 주어진 점 P_1, P_2, \dots, P_n 을 지나고 양 끝 점에서의 접선 벡터가 각각 t_1, t_n 인 곡선을 구하면 접선 벡터가 주어지지 않은 내부점에서의 접선 벡터를 구할 수 있다.

d_i 와 w_i 를 다음과 같이 놓으면

$$\begin{aligned}
 d_i &= |P_{i+1} - P_i|, \quad i=1, 2, 3, \dots, n-1 \\
 w_i &= d_i/d_{i-1}, \quad i=2, 3, \dots, n-1 \\
 w_1 &= 1
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

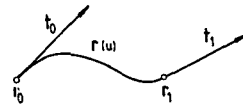


Fig. 4 Cubic parametric polynomial curve through two points

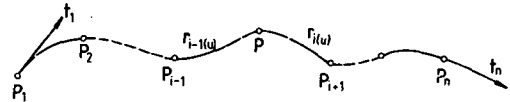


Fig. 5 Ferguson spline curve

모든 내부점에 곡률 연속조건(curvature continuity condition)을 이용하여 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 w_{i-1}w_i^2t_{i-1} + 2w_i(1+w_i)t_i + t_{i+1} \\
 = -3w_i^2P_{i-1} + 3(w_i^2-1)P_{i+1}, \\
 i=2, 3, \dots, n-1
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

Ferguson 스플라인을 얻는 방법을 요약하면 다음과 같다.

- (1) n 개의 측정점 P_1, P_2, \dots, P_n 을 입력한다.
- (2) 양 끝 점에서의 접선 벡터 t_1 과 t_n 을 입력한다.
- (3) 식 (25)를 이용하여 현 길이의 비 w_i 를 계산한다.
- (4) 식 (26)의 연립 방정식을 풀어서 t_2, \dots, t_{n-1} 을 계산한다.

위와 같은 절차에 따라서 내부점에서의 접선 벡터를 구하여 임의의 구간 i 에서, 곡선의 방정식은 다음과 같은 형태를 가진다.

$$\begin{aligned}
 r_i(u) &= UCS_i, \quad i=1, 2, \dots, n-1 \\
 S_i^T &= [P_i \quad P_{i+1} \quad w_i t_i \quad t_{i+1}]
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

3. 예제 및 토론

지금까지 본 연구에서 사용한 평면 변형률 유한 요소 수식화에 대해서 알아 보았으며, 유도한 수식화에 따라 평면 변형률 드로잉 문제를 해석하였다. 해석의 타당성을 검증하기 위하여 기존 결과와 비교하여 타당성을 비교 검토하였다.

3.1 해석적인 함수로 묘사되는 금형을 가진 드로잉

Fig. 6과 같은 형상의 금형으로 드로잉 공정을 해석하여 이미 발표된 해석 결과⁽¹⁵⁾와 비교 검토하였다. 해석에 사용된 재료는 다음과 같다.

- 응력-변형률 곡선 : $\sigma = 482.6(\bar{\epsilon})^{0.2} \text{MPa}$
- 수직 이방성 계수(Lankford Value) : $R=1.0$
- Hill의 신 이방성 항복식 계수 : $m=2.0$
- 재료의 초기두께 : $t=1.0\text{mm}$
- Coulomb 마찰계수 : $\mu=0.02$

해석에 사용된 유한요소 격자를 39개의 등간격 선형요소로 분할하였다. 해석은 펀치의 변위가 20mm일때까지 수행하여 Wang과 Tang⁽¹⁴⁾의 해석 결과와 비교하였다. 매 계산단계에서의 최대 유효 변형률은 0.025이내로 제한되도록 계산단계의 크기를 조정하였다.

우측의 끝 절점에 단위 폭당 250N/mm의 제한력(restraining force)을 가하여 그절점의 내부 절

점력의 반경 방향성분이 제한력보다 적을 때는 우측 끝 절점을 고정시키고, 제한력보다 커지면 그 절점이 안으로 빨려들어 오도록하여 드로잉공정을 해석하였다. 초기에는 우측 끝 절점의 좌표가 44mm였으나 펀치 변위가 20mm인 경우에는 그 절점의 좌표가 32.84mm였다. 이 결과는 Wang과 Tang의 결과가 33.6mm인 경우와 비교하여 잘 일치함을 알 수 있다. 또한 20mm인 경우에 변형률 분포는 Fig. 7과 같다. Wang과 Tang의 결과와 비교하여 잘 일치하고 있다. 평면 변형률 드로잉 해석의 경우에 본 연구의 수식화가 타당함을 확인 할 수 있었다.

3.2 임의의 형상의 금형을 갖는 드로잉

Fig. 8과 같은 형상의 금형을 사용하여 평면 변형률 드로잉 공정을 해석하였다. 금형의 형상과 실험 데이터는 참고문헌 (16)에 있는 것을 사용하였다. 해석에 사용된 재료는 다음과 같다.

- 응력-변형률 곡선 : $\sigma = 51.915(\bar{\epsilon})^{0.247} \text{kgf/mm}^2$
- 수직 이방성 계수(Lankford value) : $R=1.6$
- Hill의 신 이방성 항복식 계수 : $m=2.0$
- 재료의 초기 두께 : $t=0.8\text{mm}$
- Coulomb 마찰계수 : $\mu=0.2$

해석에 사용된 유한요소 격자를 81개의 선형요소로 분할하였다. 매 계산단계에서의 최대 유효 변형도는 0.025이내로 제한되도록 계산 단계의 크기를 조정하였다. 초기변위장은 본 논문에서 제안한 방법을 사용하여 구하였다. 초기 박판의 형상은 Fig. 8에서 보는 바와 같이 두개의 직선 AF와 FE로 묘사하여, 그 상태에서 유한요소 격자를 분할하였다.

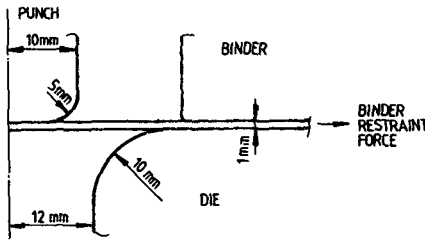


Fig. 6 Geometry of the tooling

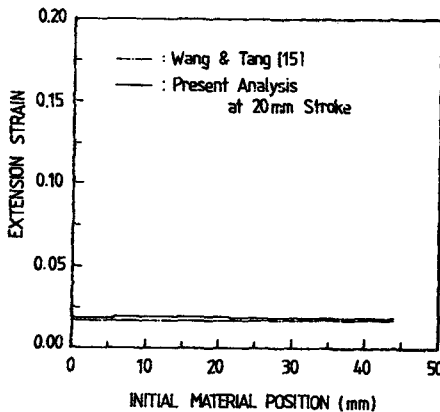


Fig. 7 Comparison of the strain distribution between the computed results and the reported results

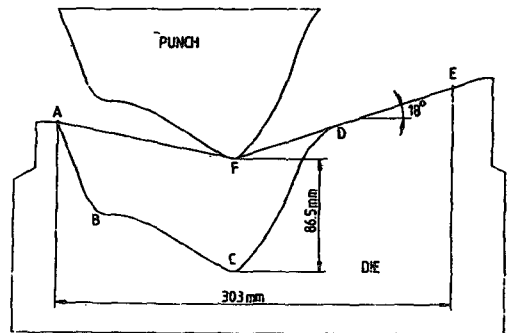


Fig. 8 Geometry of the tooling(arbitrarily-shaped tools)

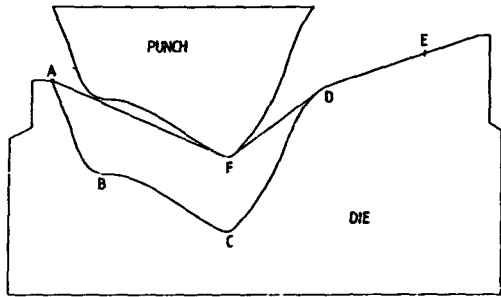


Fig. 9 Deformed pattern at 30mm punch displacement (arbitrarily-shaped tools)

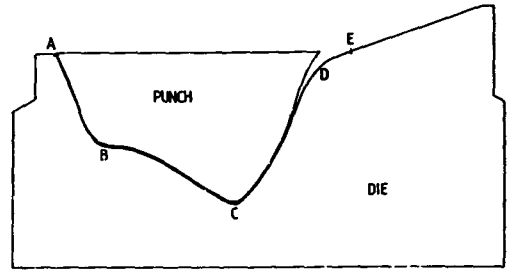


Fig. 12 Deformed pattern at 85mm punch displacement (arbitrarily-shaped tools)

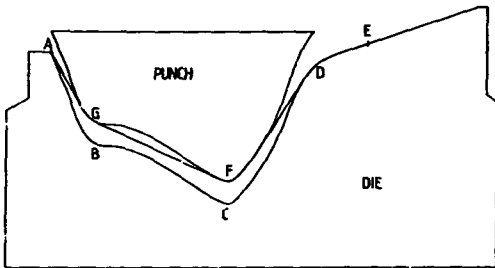


Fig. 10 Deformed pattern at 70mm punch displacement (arbitrarily-shaped tools)

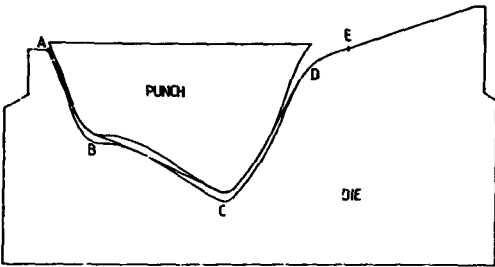


Fig. 11 Deformed pattern at 80mm punch displacement (arbitrarily-shaped tools)

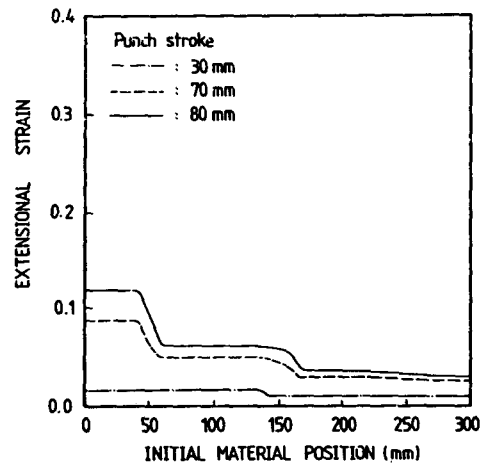


Fig. 13 Strain distribution at 30mm, 70mm, 80mm punch displacement (arbitrarily-shaped tools)

펀치 변위가 각각 30mm, 70mm, 80mm, 85mm 인 경우에 각각 변형형상은 Fig. 9~Fig. 12와 같다. Fig. 9에서 보는 바와 같이 변형의 초기 단계에는 펀치의 F부분만 접촉하여 변형이 진행되므로 박판의 전 영역에 걸쳐서 Fig. 13에서 보는 바와 같이 변형률 분포가 거의 비슷한 경향을 보이고 있다. 변형이 진행되어 Fig. 10과 같이 펀치의 F부분과 G부분이 함께 접촉하게 되면서 변형률 분포는 Fig. 13과 같이 AG부분이 가장 크고 GF부분 그리

고 FDE부분 순이다.

Fig. 11은 펀치 변위가 80mm인 경우에 변형형상을 나타내는데 그림에서 보는 바와같이 다이의 BC 부분이 박판과 접촉하게 된다. 이 경우에도 본 논문에서 제안한 경사면 경계조건이 잘 적용되어 별 무리없이 성형이 진행됨을 알 수 있다. 이 경우에 변형률 분포는 Fig. 13과 같이 앞의 경향이 더욱 심화되어 나타남을 알 수 있다. Fig. 12는 펀치 변위가 85mm인 경우에 변형형상을 나타냈으며 거의 성형이 완성되었음을 알 수 있다. 이 경우 변형률 분포는 Fig. 14와 같으며 참고문헌 (15)의 결과와 비교하여 나타내었다. 본 논문에서 제안된 결과가 에너지를 최소화시키는 방법⁽¹⁶⁾, 실험결과⁽¹⁵⁾와 잘 일치하고 있음을 알 수 있었다.

이 경우에 우측 절점에 단위폭당 15kgf/mm의

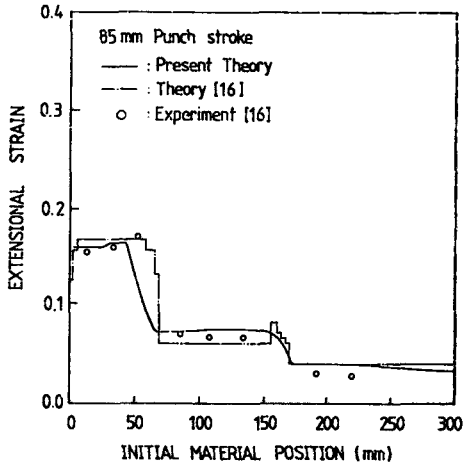


Fig. 14 Comparison of the strain distribution between the computed results and the reported results (arbitrarily-shaped tools)

제한력(restraining force)을 가하여 그 절점을 고정시켰다가 놓아주어 그 절점이 안으로 빨려들어 가도록 하였다. 평면변형을 드로잉 문제의 경우에 기하학적인 구속조건이 없어서 강소성 유한요소법에서는 강제운동이 발생하게 된다. 강제운동이 발생하게 되면 수렴성이 급격히 악화되어 식 (11)에서 ϵ_0 의 값을 어느 정도 크게 하여야 해가 수렴하게 되므로 보다 안정된 강제운동 처리 알고리즘이 요구된다.

4. 결 론

수직 이방성과 Hill의 신 이방성 이론을 따르는 재료에 대하여 평면변형을 박판 성형 문제를 해석할 수 있는 강소성 유한요소 수식화를 제안하였다. 강소성 유한요소법에서 수렴성에 필수적인 초기 변위장 생성 수식화를 비선형 탄성 유한요소법으로 제안하였다.

보다 일반적인 형상의 금형에 대하여 경사면 경계조건을 이용한 접촉처리 방법을 제안하였으며 기존의 CAD프로그램에서 생성되는 일반적인 곡선 표현방법을 사용하여 금형을 나타내면 일반적인 금형에 대해 접촉문제를 해결할 수 있어서 CAD프로그램과의 접목을 가능하게 하였다.

실제적으로 3차원 형상의 판넬을 길이 방향에 유한개의 단면으로 나누어 각 단면에 대해 2차원 해

석을 한후 이를 조합하여 신속하게 공정해석에 적용할 수 있도록 하였다.

따라서 본 수식화가 일반적인 형상의 금형을 가진 평면 변형을 문제로 근사화될 수 있는 박판 성형 공정에 대하여 효과적으로 적용될 수 있는 방법임을 입증하였다. 그러나 강소성 유한요소법에서 강제운동 처리에 대한 보다 안정된 알고리즘의 개발이 필요하다.

후 기

본 논문은 기아자동차(주)의 연구비 지원으로 이루어졌으며, 이에 관계제위께 감사드립니다.

참 고 문 헌

- (1) 심현보, 정완진, 양동열, 1990, "탄소성 유한요소법에 의한 박판 성형 공정의 해석 (I) : 유한요소 수식화 및 정수압 벌징에의 응용", 대한기계학회논문집, 제14권, 제4호, pp. 810~817.
- (2) 심현보, 정완진, 양동열, 1990, "탄소성 유한요소법에 의한 박판 성형 공정의 해석 (II) : 접촉 조건을 가지는 박판 성형 공정의 해석", 대한기계학회논문집, 제14권 제5호, pp. 1129~1137.
- (3) Kobayashi, S. and Kim, J.H., 1978, "Deformation Analysis of Axi-Symmetric Sheet Metal Forming Process By Rigid-Plastic Finite Element Method", Mechanics of Sheet Metal Forming (Edited by D.P. Koistinen and N.M. Wang), Plenum Press, New York, pp. 341~366.
- (4) Toh, C.H. and Kobayashi, S., 1983, "Finite Element Process of Sheet Metal Forming of General Shapes", Proc. Int. Symp. Fundamentals of Metal Forming Technique-State and Trend, Springer-Verlag, West Germany, 13~14, October, pp. 39~57.
- (5) Wang, N.M., 1984, "A Rigid-Plastic Rate Sensitive Finite Element Method for Modelling Sheet Metal Forming Processes", Numerical Analysis of Forming Processes, John Wiley & Sons, Chichester, pp. 117~164.
- (6) Kim, Y.J., Yang, D.Y., 1985, "A Rigid-Plastic Finite Element Formulation Considering the Effect of Geometric Change and Its Application to Hydrostatic Bulging", Int. J. Mech. Sci., Vol. 27, pp. 453~463.
- (7) Yang, D.Y. and Kim, Y.J., 1987, "Analysis of Hydrostatic Bulging of Anisotropic Rectangular

- Diaphragms by the Rigid-Plstic Finite Element Method", J. Engng. Ind., Trans. ASME, Vol. 109, pp. 148~154.
- (8) Yang, D.Y. and Kim, Y.J., 1986, "A Rigid-Plastic Finite Element Formulation for the Analysis of General Deformation of Planar Anisotropic Sheet Metals and Its Applications", Int. J. Mech. Sci., Vol. 28, pp. 825~840.
- (9) Chung, W.J., Kim, Y.J. and Yang, D.Y., 1989, "Rigid-Plastic Finite Element Analysis of Hydrostatic Bulging of Elliptic Diaphragms using Hill's New Yield Criterion", Int. J. Mech. Sci., Vol. 31, pp. 193~207.
- (10) Frey, W.H. and Wenner, M.L., 1987, "Development and Applications of a One-Dimensional Finite Element Code for Sheet Metal Forming Analysis", GMR-5982, General Motors Research Laboratories; Interdisciplinary Issues in Materials Processing and Manufacturing, S. Samanta et al. eds.
- (11) Hill, R., 1979, "Theoretical Plasticity of Textured Aggregates", Math. Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 85, pp. 179~191.
- (12) Osakada, K., Nakano, J. and Mori, K., 1982, "Finite Element Method for Rigid-Plastic Analysis of Metal Forming formulation for Finite Deformation", Int. J. Mech. Sci., Vol. 24, pp. 459~468.
- (13) 양동열, 정완진, 김용환, 1989, "접촉을 고려한 3차원 형상의 금형에 의한 박판성형의 강소성 유한요소해석", 대한기계학회논문집, 제13권, 제6호, pp. 1092~1103.
- (14) 최병규, 1989, "NC절삭 가공과 CAM시스템", 청문각.
- (15) Wang, N.M. and Tang, S.C., 1988, "Analysis of Bending Effects in Sheet Forming Operations", Int'l J. for Numerical Methods in Engineering, Vol. 25, pp. 253~267.
- (16) 전기찬, 유동진, 이정우, 1989, "차체판넬 프레스성형 공정의 평면 변형해석", 대한기계학회추계학술대회, pp. 275~278.