

(論 文)

경계요소법 (BEM) 에 의한 복합재료의 응력확대계수 해석

이갑래* · 조상봉** · 최응식***

(1990년 4월 30일 접수)

An Analysis of Stress Intensity Factors of Composite Materials by Boundary Element Method (BEM)

K.R. Lee, S.B. Cho and Y.S. Choy

Key Words : BEM(경계요소법), Composite Material(복합재료), Characteristic Root(특성근), Stress Intensity Factor(응력확대계수), Fundamental Solution(기본해)

Abstract

Composite materials are generally treated as anisotropic or an orthotropic materials. Unlike isotropic materials, the orthotropic materials can divided three groups depending upon the relationship of the four material constants or depending upon the characteristic roots of orthotropic materials. In particular, the fundamental solutions of two dimensional BEM for composite materials (orthotropic or anisotropic material) generally have a singularity in the conventional method when the characteristic roots are equal. In consideration of this singularity in the conventional method when the characteristic roots are equal. In consideration of this singular problems, in this paper, the fundamental solutions of BEM are systematically analysed for orthotropic materials. And the stress and displacement fields for a crack in an orthotropic materials are singular when the characteristic roots of orthotropic materials are equal. Therefore, these fields for a crack in an orthotropic materials are analysed by the analogous method to isotropic materials when the characteristic roots are equal.

1. 서 론

최근에 구조물의 강도 및 경량화를 위하여 신소재의 개발이 활발히 이루어지고 있는 실정이다. 신소재 연구의 중요한 관심중 하나가 복합재료의 개발이며, 복합재료를 이용한 구조물이 많이 만들어지고 있다. 복합재료는 일반적으로 기지재료를 보강할 수 있는 첨가재료 또는 보강섬유를 이용하여 만들어 지기 때문에 복합재료의 응력해석은, 이방

성 (anisotropics) 또는 직교이방성 (orthotropics)의 성질이 고려되는 것이 보통이다.

구조물의 응력해석으로써, 공학적으로 많이 사용되는 방법 중 하나가 유한요소법(FEM) 이지만, 구조물이 복잡하거나, 정밀한 결과를 필요로 하는 경우는 요소분할이 많아지는 단점이 있다⁽¹⁾. 최근 구조물의 응력해석 방법으로, 적은 요소(element)의 분할로써 정밀한 해석결과를 얻을 수 있는 경계요소법(BEM)이 많이 발달되고 있다. 경계요소법에서는 기본해가 필요하며, 이방성 또는 직교이방성 재료를 해석할 때, 기본해에 특성방정식의 근을 사용하게 되는데, 특성근의 형태에 따라, 특이성과 같은 몇가지 문제점이 발생한다^(2~4).

*정회원, 성균관대학교 대학원

**정회원, 경남대학교 공과대학 기계설계학과

***정회원, 성균관대학교 공과대학 기계공학과

특히, 직교이방성 재료의 특성근은 3가지의 형태로 분류될 수 있다⁽²⁻⁵⁾. 즉, 첫째, 특성근이 실수부와 허수부로 구성되어있고 서로 다른 경우, 셋째, 순허수이며 특성근이 같은 경우이다. 종래의 직교이방성 재료에 대한 BEM의 해석은, 주로 첫째 경우에 대한 것이었다. 그러나, 직교이방성 재료 중에는 둘째와 셋째의 경우도 존재할 수 있기 때문에, 이런 경우에 대한 BEM해석도 고려되어야 하지만, 구체적으로 해석된 연구가 거의 없는 실정이다.

둘째 경우에서의 특성근은 실수부와 허수부가 존재하므로, 첫째 경우의 해석결과를 이용할 수 없기 때문에, 이방성 문제의 해석에서 사용된 기본해가 적용되어야 할 것이다. 셋째 경우에 대해서 종래의 해석결과를 이용한다면, 특이성이 나타나 해석이 매우 곤란하다. 본 연구자들은 이에 대한 기본해를 등방성의 경우에 상사한 방법을 이용하여 구한 바 있으며, 해석결과는 직교이방성 성질을 잘 만족하였다⁽⁶⁾.

이상의 해석적인 결과를 통하여, 본 연구에서 이방성 및 직교이방성 재료에 대한 경계요소법의 기본해를 체계적으로 정리하고, 이를 이용하여 응력 해석을 수행할 수 있는 프로그램을 개발하고자 한다.

그리고, 이방성 및 직교이방성 재료내의 균열 끝(carack tip)근방에서의 응력장과 변위장은 Sih⁽⁷⁾ 등에 의해 구해졌으며, 또한 평면응력상태에서의 물성치가 응력장에 미치는 영향에 대해서 이역섭⁽⁸⁾ 등의 연구가 있으나, 특성근이 같은 경우는 특이성을 가지기 때문에 종래의 해석에서는 구할 수 없게 된다. 이에 대해 본 연구에서는 특성근이 같은 경우의 기본해 유도에서 사용하였던 상사방법을 이용하여, 균열끝 부근의 응력장과 변위장을 나타내고자 한다.

위의 해석을 바탕으로 개발한 프로그램의 정도에 대하여 검증하고, 이 프로그램을 복합재료 내의 균열 문제에 응용하여 응력확대계수에 관한 자료를 계산하고, 그 유용성을 검토하고자 한다.

2. 이방성 및 직교이방성 재료에 대한 특성방정식

일반적인 이방성재료(anisotropic material)에 대한 평면응력상태의 Hooke의 법칙⁽¹⁰⁾은

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (1)$$

여기서

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1/E_{xx}, & a_{22} &= 1/E_{yy}, \\ a_{12} &= -\nu_{xy}/E_{xx} = -\nu_{yx}/E_{yy} \\ a_{21} &= a_{12}, & a_{66} &= 1/G_{xy}, \\ a_{16} &= \eta_{xy}, & x/E_{xx} &= \eta_{x,xy}/G_{xy} \\ a_{26} &= \eta_{xy,y}/E_{yy} = \eta_{y,xy}/G_{xy}, \\ a_{16} &= a_{61}, & a_{26} &= a_{62} \end{aligned}$$

이며, E_{ii} 는 i 방향에 대한 영율(Young's modulus), G_{xy} 는 전단계수, ν_{xy} 는 프와송비이며, 평면변형률 상태인 경우에는 $a_{ij}^* = a_{ij} - (a_{i3}a_{j3}/a_{33})$ 가 되고, $i, j=1, 2, 6$ 이다⁽¹⁰⁾. 윗 식에서 $\eta_{i,i} (= \epsilon_i/\gamma_{ii})$ 와 $\eta_{i,i} (= \gamma_{ii}/\epsilon_i)$ 는 각각 제1종 상호영향인자 및 제2종 상호영향계수이다⁽¹⁰⁾. 평행방정식을 만족하는 응력성분을 Airy의 응력함수, U 로 나타내면

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad (2)$$

이며, 식 (1)과 (2)를 적합방정식(compatibility equation)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} a_{22} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} - 2a_{26} \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} \\ - 2a_{16} \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} + a_{11} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

식 (3)을 만족시키는 특성근을 $S_j (j=1, 2, 3, 4)$ 라 하면 S_j 는 다음의 특성방정식의 근이 된다.

$$\begin{aligned} a_{11}S^4 - 2a_{16}S^3 + (2a_{12} + a_{66})S^2 \\ - 2a_{26}S + a_{22} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

근 S_j 는 복소수 또는 순 허수이며⁽⁹⁾. 식 (5)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} S_1 &= \alpha_1 + i\beta_1, & S_2 &= \alpha_2 + i\beta_2, \\ S_3 &= \bar{S}_1, & S_4 &= \bar{S}_2 \end{aligned} \quad (5)$$

여기에서, $\alpha_j, \beta_j (j=1, 2)$ 는 실수이다. 그리고, S_1 과 S_2 의 허수부는 양이며, S_3 과 S_4 는 각각 S_1, S_2 의 공액이다.

직교이방성의 경우에는 식 (4)에서 $a_{16} = a_{26} = 0$ 이므로 식 (4)를 무차원 인수(parameter) λ 와 ρ 를 이용하면

$$\lambda S^4 + 2\rho\sqrt{\lambda}S^2 + 1 = 0 \quad (6)$$

으로 나타나며, 여기서

$$\lambda = \frac{a_{11}}{a_{22}}, \quad \rho = \frac{2a_{12} + a_{66}}{2\sqrt{a_{11}a_{22}}} \quad (7)$$

이다. 만약 $\lambda=1$, $\rho=1$ 이면 등방성의 경우가 된다.

다음식에서 n 과 m 이 실수가 되기 위하여는 $-1 < \rho < \infty$ 이어야 하며, 식 (6)의 근은 ρ 에 따라

$$S_1 = i\lambda^{-1/4}(n+m), \quad S_2 = i\lambda^{-1/4}(n-m) \quad (8.a)$$

$$S_1 = \lambda^{-1/4}(in+m), \quad S_2 = \lambda^{-1/4}(in-m) \quad (8.b)$$

$$S_1 = S_2 = i\lambda^{-1/4} \quad \rho = 1 \quad (8.c)$$

$$n = \sqrt{\frac{1+\rho}{2}}, \quad m = \sqrt{\frac{1-\rho}{2}}$$

이다⁽²⁾. 종래의 직교이방성 문제의 기본해⁽³⁾를 이용한 경계요소법의 해석은 식 (8.a)를 만족하는 재료의 경우에만 가능하였다. 식 (8.a)는 특성근이 순허수로만 이루어진 경우이지만, 식 (8.b)는 실수부와 허수부로 구성된 특성근이기 때문에, 종래의 직교이방성에 대한 기본해로써는 해석할 수 없으며, 이방성의 경우에서 기본해가 유도되어야 할 것이다. 또한 식 (8.c)의 경우는 종래의 직교이방성 기본해의 해석에서는 특이성이 나타나기 때문에 해석이 곤란하다.

3. 이방성 및 직교이방성 재료에 대한 BEM의 기본해

3.1 이방성 재료에 대한 BEM의 기본해

Fig. 1과 같이 이방성 무한판내에 단위 집중력 e_1 , e_2 가 내부점 점 p 에 작용할 때, 점 q 에서의 변위 벡터, u_j 와 표면력 벡터, t_j 는 각각

$$u_j = U_{ij}e_i$$

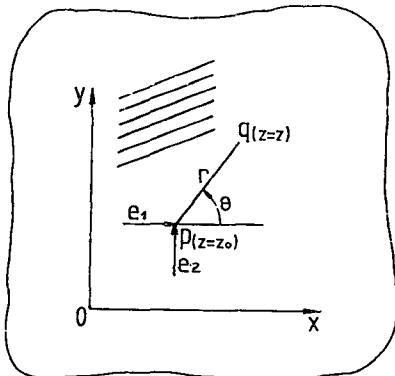


Fig. 1 Coordinates for fundamental solutions in an anisotropic plate

$$t_j = T_{ij}e_i \quad (9)$$

이며, 식 (9)의 U_{ij} , T_{ij} 가 경계요소법에서의 기본해이다.

이방성 재료에 대한 변위의 기본해 U_{ij} 와 표면력에 대한 기본해 T_{ij} 는 아래와 같다^(12,13).

$$U_{ij} = 2\text{Re}[r_{j1}A_{i1}\ln(z_1) + r_{j2}A_{i2}\ln(z_2)]$$

$$T_{ij} = 2\text{Re}[q_{j1}(S_1n_1 - n_2)A_{i1}/z_1 + q_{j2}(S_2n_1 - n_2)A_{i2}/z_2] \quad (10)$$

($i, j=1, 2$)

여기서, $z_i = x + S_i y$ 이며, 각 상수는

$$r_{11} = a_{11}S_1^2 + a_{12} - a_{13}S_1$$

$$r_{12} = a_{11}S_2^2 + a_{12} - a_{13}S_2$$

$$r_{21} = a_{12}S_1 + a_{22}/S_1 - a_{23}$$

$$r_{22} = a_{12}S_2 + a_{22}/S_2 - a_{23} \quad (11)$$

그리고 $q_{11} = S_1$, $q_{12} = S_2$, $q_{21} = -1$, $q_{22} = -1$

$$\text{Im}(A_{i1} + A_{i2}) = -\frac{\delta_{i2}}{4\pi}$$

$$\text{Im}(S_1A_{i1} + S_2A_{i2}) = \frac{\delta_{i1}}{4\pi} \quad (12)$$

$$\text{Im}(r_{11}A_{i1} + r_{12}A_{i2}) = 0$$

$$\text{Im}(r_{21}A_{i1} + r_{22}A_{i2}) = 0$$

이며, $n_1 = [\cos(n, x)]$, $n_2 = [\cos(n, y)]$ 는 방향여현이며, δ_{ij} 는 Kronecker 델타, 그리고, A_{ij} 는 복소상수이다. 그런데, 위의 일반적인 기본해로써는 이방성 및 직교 이방성 재료의 해석이 가능하지만, $S_1 = S_2$ 인 경우는 위의 기본해로써는 해석이 불가능하다.

3.2 직교이방성 재료에 대한 BEM의 기본해

Fig. 2와 같이 복합재료의 주축 1, 2가 x, y축과

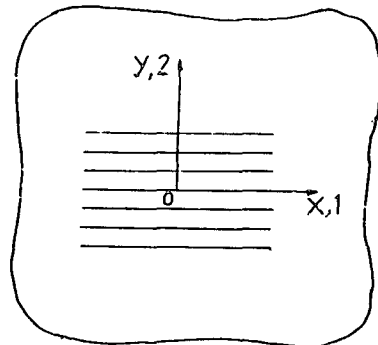


Fig. 2 Coordinates in an anisotropic material

일치하는 경우가 직교이방성 재료가 되며, 식 (6)의 특성근의 분류에 따라 기본해를 체제저개로 정리하고자 한다. 특히, $-1 < \rho < 1$ 인 경우의 기본해를 사용할 수 있는 재료 물성치의 범위를 구하고, $\rho = 1$ 인 경우의 기본해를 구체적으로 표현한다.

(1) $\rho > 1$ 인 경우의 기본해

직교이방성 재료의 경계요소 해석법에서는 대부분 $\rho > 1$ 인 경우의 기본해를 사용하였으나, 만약 직교이방성 재료로서 존재할 수 있는 범위를 $\rho > 1$ 의 범위로 한정한다면, 실존할 수 있는 또 다른 직교이방성 재료의 해석이 곤란함을 의미한다. $\rho > 1$ 인 경우의 기본해는 Rizzo⁽³⁾등에 의해 구해졌다.

(2) $-1 < \rho < 1$ 인 경우의 기본해

$-1 < \rho < 1$ 인 경우의 특성근은 실수부와 허수부를 가지고 있으므로, 이 경우의 기본해는 식 (10)의 일반적인 이방성 경우의 기본해를 그대로 사용할 수 있다. 단, 이 경우에는 직교이방성의 경우이므로, 식 (11)에서 $a_{13} = a_{23} = 0$ 가 된다.

그런데, 식 (10)의 기본해를 $-1 < \rho < 1$ 의 경우에 사용할 때는, 실존할 수 있는 재료의 범위를 규정할 필요가 있다. $-1 < \rho < 1$ 의 조건만으로 재료 상수를 선택할 경우, 실존할 수 없는 재료가 선택될 수 있다. 따라서, 변형에너지밀도(strain energy density) W 가 반드시 양(+)이 되어야 한다는 조건으로 다음과 같이 실존 가능한 재료의 범위를 구할 수 있다.

직교이방성 재료에 대한 응력과 변형률의 관계는, 평면응력상태에서⁽¹¹⁾ 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E_{22}}{n(1-n\nu_{12}^2)} \varepsilon_{11} + \frac{E_{22}\nu_{12}}{1-n\nu_{12}^2} \varepsilon_{22} \\ \sigma_{22} &= \frac{E_{22}\nu_{12}}{1-n\nu_{12}^2} \varepsilon_{11} + \frac{E_{22}}{1-n\nu_{12}^2} \varepsilon_{22} \\ \tau_{12} &= 2G_{12}\varepsilon_{12} \end{aligned} \quad (13)$$

여기에서 $n = E_{11}/E_{22}$ 이며, 첨자 1, 2는 각각 x , y 축에 해당한다. 변형률에너지밀도(strain energy density) W 를 나타내면

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \\ &= \frac{1}{2} [\lambda' \varepsilon_{kk}^2 + 2\mu' \varepsilon_{ij}^2 + \xi' \delta_{ij} \varepsilon_{11} \varepsilon_{ij}] \end{aligned} \quad (14)$$

이며, 식 (14)에서 $W \geq 0$ 이 되기 위해서는 $\lambda' > 0$, $\mu' > 0$, $\xi' > 0$ 이어야 한다.

즉,

$$\lambda' = \frac{E_{22}\nu_{12}}{1-n\nu_{12}^2} > 0 \quad (15.a)$$

$$\mu' = \frac{E_{22}}{1-n\nu_{12}^2} (1-\nu_{12}) > 0 \quad (15.b)$$

$$\xi' = \frac{E_{22}}{n(1-n\nu_{12}^2)} - \frac{E_{22}}{1-n\nu_{12}^2} > 0 \quad (15.c)$$

식 (15.a), (15.b), (15.c)에서

$$n > 0 \quad (16)$$

$$0 < \nu_{12} < 1 \quad (17)$$

을 얻게 된다. 즉, 직교이방성 재료에서 프와와 비 ν_{12} 가 양이 되어야 함을 알 수 있다. 또한, 횡등방 재료의 프와송 비는, $0 < \nu_{12} < 1/2$ 이 됨을 알 수 있다⁽¹⁵⁾. 그런데, $-1 < \rho < 1$ 의 조건만으로는 ν_{12} 가 음이 될 수도 있기 때문에, ν_{13} 가 양(+이라는 조건과 전단계수 G_{12} 가 양(+이라는 조건을 고려하면, $-1 < \rho < 1$ 인 경우 物理적으로 가능한 재료의 범위는 다음과 같이 설정할 수 있다. 즉, 식 (7)의 ρ 관계를 이용하면, $-1 < \rho < 1$ 는 다음과 같다.

$$-1 < \frac{2a_{12} + a_{66}}{2\sqrt{a_{11}a_{22}}} < 1 \quad (18)$$

식 (18)을 약간 변형하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} -2(\sqrt{1/(E_{11}E_{22})} - \nu_{12}/E_{11}) &< \frac{1}{G_{12}} \\ &< 2(\sqrt{1/(E_{11}E_{22})} + \nu_{12}/E_{11}) \end{aligned} \quad (19)$$

식 (19)에서 G_{12} 는 전단계수이므로 $G_{12} > 0$ 이어야 하며, $2(\sqrt{1/(E_{11}E_{22})} + \nu_{12}/E_{11}) > 0$ 이므로, $-2(\sqrt{1/(E_{11}E_{22})} - \nu_{12}/E_{11})$ 이 음(-)이 되는 경우를 제외하면, $-1 < \rho < 1$ 인 경우인 식 (19)로 정의되는 실존 가능한 재료 물성치의 범위는 아래와 같다.

$$0 < \frac{E_{11}\sqrt{E_{11}E_{22}}}{2(E_{11} + \nu_{12}\sqrt{E_{11}E_{22}})} < G_{12} \quad (20)$$

(3) $\rho = 1$ 인 경우의 기본해

직교이방성 재료에 대한 특성근이 같은 경우 ($S_1 = S_2$)에 해당하며, 앞의 두 경우의 기본해로써는 해석이 불가능하다. 왜냐하면, $\rho > 1$ 인 경우의 기본해⁽³⁾에서는 계수들이 특이성을 갖게 되어 수치 해석이 불가능함을 알 수 있다.

이 경우의 기본해는 본 연구자들이 등방성의 경우에 상사한 해석방법으로 이미 구한 바 있다⁽⁶⁾

변위에 대한 기본해, U_{ij} 는

$$\begin{aligned} U_{11} &= C[x^* \ln(1/r) + \cos^2 \theta - 1/2] \\ U_{12} &= C\lambda^{-1/4} [\cos \theta \sin \theta] \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} U_{21} &= C[\sin \theta \cos \theta] \\ U_{22} &= C\lambda^{-1/4} [x^* \ln(1/r) + \sin^2 \theta - 1/2] \end{aligned}$$

이며, 표면력에 대한 기본해, T_{ij} 는

$$\begin{aligned} T_{11} &= D[\lambda^{-1/2} (-2\cos \theta - x^* \cos \theta - \cos 3\theta)n_1 \\ &\quad + \lambda^{-1/4} (-x^* \sin \theta - \sin 3\theta)n_2] \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
 T_{12} &= D[\lambda^{-1/4}(-x^* \sin \theta - \sin 3\theta)n_1 \\
 &\quad + (-2\cos \theta + x^* \cos \theta + \cos 3\theta)n_2] \\
 T_{21} &= D[\lambda^{-1/2}(-2\sin \theta + x^* \sin \theta - \sin 3\theta)n_1 \\
 &\quad + \lambda^{-1/4}(-x^* \cos \theta + \cos 3\theta)n_2] \\
 T_{22} &= D[\lambda^{-1/4}(-x^* \cos \theta + \cos 3\theta)n_1 \\
 &\quad + (-2\sin \theta - x^* \sin \theta + \sin 3\theta)n_2]
 \end{aligned}$$

이다. 여기서

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{1}{2\mu^* \pi(1+x^*)}, \quad D = \frac{1}{2\pi r^*(1+x^*)} \\
 \frac{1+x^*}{4} &= \frac{\sqrt{a_{11}a_{22}}}{\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}}} = \frac{2\sqrt{a_{11}a_{22}}}{a_{66}}, \\
 \mu^* &= \frac{1}{a_{66}} = \frac{1}{2(\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}})} \\
 r &= (x_2 + (\lambda^{-1/4}y)^2)^{1/2} \\
 \theta &= \tan^{-1} \frac{\lambda^{-1/4}y}{x}
 \end{aligned}$$

4. 기본해의 텐서변환과 경계적분 방정식⁽¹⁴⁾

실제의 복합재료등에서 직교이방성 재료의 주축과 해석 모델의 좌표축이 일치하지 않는 경우가 많다. 이 경우는, 해석 좌표축에서 보면 이방성 재료가 된다. Fig. 3과 같이 직교이방성의 주축이 해석 모델의 좌표축과 일치하지 않는 경우, 이방성 재료의 경계요소 해석법은 이방성 재료의 기본해를 이용하는 방법과 직교이방성 재료의 기본해를 사용하는 방법이 있을 수 있다.

복합재료에서는 이방성 주축에 관한 물성치가 알려진 경우가 많다. 따라서, 이방성 재료의 기본해를 사용하는 경우는 물성치를 해석 좌표계로 변환해야 하고, 직교이방성 재료의 기본해를 사용하는 경우는 기본해 텐서(tensor)변환을 통하여, 해석좌표계로 변환하기 때문에 주축의 물성치를 그대로 사용할 수 있다.

Fig. 3과 같은 문제의 기본해 텐서변환은 다음과

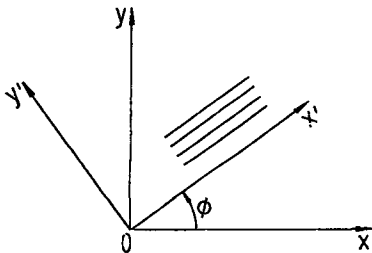


Fig. 3 Transformation of coordinates

같다.

$$\begin{aligned}
 U_{ij}(x, y) &= b_{ki}b_{lj}U'_{kl}(b_{1j}x_j, b_{2j}x_j) \\
 T_{ij}(x, y) &= b_{ki}b_{lj}T'_{kl}(b_{1j}x_j, b_{2j}x_j) \quad (25)
 \end{aligned}$$

여기서, b_{ij} 는 직교좌표계의 변환 행렬식으로 2차원 문제에서는 다음과 같다.

$$b_{ij} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

식 (25)에서 U'_{ki} , T'_{kl} 은 x' , y' 좌표축과 x' , y' 좌표축이 일치하는 경우의 기본해이다.

Fig. 3에 대한 기본해를 이용하여, 경계 Γ 를 가지는 어떤영역 내부의 임의점 p 에서의 변위를 나타내면, 체적력을(body force)를 무시할 경우

$$\begin{aligned}
 u_i(p) + \int T_{ij}(p, Q)u_j(Q)d\Gamma &= \\
 \int U_{ij}(p, Q)t_j(Q)d\Gamma & \quad (26)
 \end{aligned}$$

이며, 점 Q 는 영역의 경계, Γ 상의 점이다. 식 (25)를 식 (26)에 대입하면

$$\begin{aligned}
 u_i(p) + \int b_{ki}b_{lj}T'_{kl}(p, Q)u_j(Q)d\Gamma &= \\
 \int b_{ki}b_{lj}U'_{kl}(p, Q)t_j(Q)d\Gamma & \quad (27)
 \end{aligned}$$

이 된다. 만일 내부점 p 를 영역의 경계상의 점 P 로 변환하면 다음과 같은 경계 적분방정식으로 나타낸다.

$$\begin{aligned}
 C_{ij}u_j(P) + \int b_{ki}b_{lj}T'_{kl}(P, Q)u_j(Q)d\Gamma &= \\
 \int b_{ki}b_{lj}U'_{kl}(P, Q)t_j(Q)d\Gamma & \quad (28)
 \end{aligned}$$

여기에서 C_{ij} 는 모델의 형상에 의하여 정해지는 상수이고, P , Q 점은 경계상의 점이다. 이와같은 기본해텐서 변환을 도입하면, 임의의 섬유(fiber) 방향을 가지는 복합재료의 해석을 비교적 간단히 취급할 수 있다.

$\rho=1$ 인 경우로, 이방성 주축과 해석 모델 축이 일치하지 않는 경우는 식 (10)의 일반적인 이방성 재료의 기본해를 사용할 수 없으므로, 식 (23)과 (24)의 기본해텐서 변환을 이용한 경계요소법을 해석할 수 밖에 없다.

그리고, 앞서에서도 언급하였지만 일반적인 이방성의 경우와 $-1 < \rho < 1$ 인 경우에서는 주축(즉, x' , y' 축)의 재료상수 값의 변환에 의해 해석되게 된다. 이러한 변환의 구체적인 표기는 생략한다.⁽¹¹⁾

이상과 같은 기본해의 해석을 바탕으로, 이방성 및 직교이방성 재료에 대한 경계요소법 해석을 수행할 수 있는 프로그램의 흐름도(flow chart)는

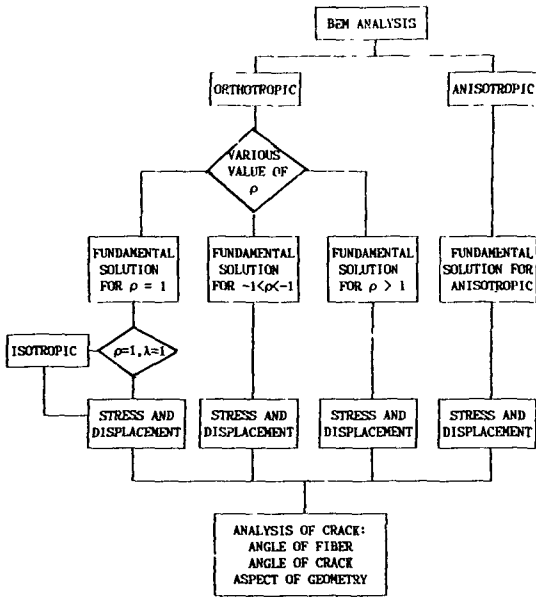


Fig. 4 Flow chart of BEM analysis

Fig. 4와 같다.

5. 이방성 및 직교이방성 재료내의 균열에 대한 응력확대계수 해석

5.1 이방성 및 $-1 < \rho < 1$, $\rho < 1$ 인 직교이방성 경우의 응력확대계수 해석

Fig. 5와 같은 이방성 재료 내의 균열 끝 근방에서의 응력장과 변위장은, Sih등에^(7,8,16)의해 연구된 바 있으며, 이 응력장과 변위장에서, BEM의 수치

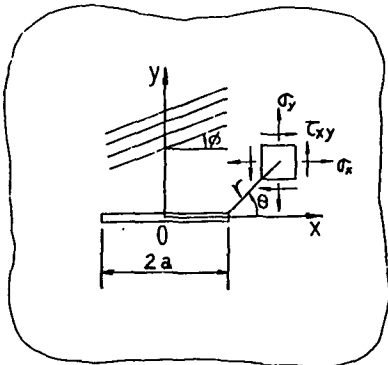


Fig. 5 Stress and displacement field at the vicinity of a crack in an anisotropic plate

해석 결과를 이용하여 응력확대계수를 구할 수 있는 변위 및 응력의 외삽식을 구할 수 있다⁽¹⁴⁾.

5.2 $\rho=1$ 인 직교이방성 경우의 응력확대계수 해석

$\rho=1$ 인 직교이방성 재료내의 응력장과 변위장을, 5.1의 과정으로 해석하면 특이성이 나타나 곤란하다. 본 연구에서는, $\rho=1$ 인 경우의 기본해를 구하기 위해 사용하였던 상사방법을 사용하여, $\rho=1$ 인 경우의 직교이방성 재료내의 균열 끝 근방의 응력장과 변위장을 구하였다.

응력장은

$$\begin{bmatrix} \lambda^{1/2} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \lambda^{1/4} \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\theta/2) \begin{bmatrix} 1 - \sin(\theta/2)\sin(3\theta/2) \\ 1 + \sin(\theta/2)\sin(3\theta/2) \\ \sin(\theta/2)\cos(3\theta/2) \end{bmatrix} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} -\sin(\theta/2)\{2 + \cos(\theta/2)\cos(3\theta/2)\} \\ \sin(\theta/2)\cos(\theta/2)\cos(3\theta/2) \\ \cos(\theta/2)\{1 - \sin(\theta/2)\sin(3\theta/2)\} \end{bmatrix} \quad (29)$$

이며, 변위장은

$$\begin{bmatrix} u \\ \lambda^{1/4} v \end{bmatrix} = \frac{K_I}{2\mu^*} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{bmatrix} \cos(\theta/2)(x^* - 1 + 2\sin^2(\theta/2)) \\ \sin(\theta/2)(x^* + 1 - 2\cos^2(\theta/2)) \end{bmatrix} + \frac{K_{II}}{2\mu^*} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{bmatrix} \sin(\theta/2)(1 + x^* + 2\cos^2(\theta/2)) \\ \cos(\theta/2)(1 - x^* + 2\sin^2(\theta/2)) \end{bmatrix} \quad (30)$$

이다. 여기서

$$r = (x^2 + (\lambda^{-1/4}y)^2)^{1/2}, \theta = \tan^{-1}(\lambda^{-1/4}y/x)$$

$$\lambda = E_{22}/E_{11}$$

$\theta=0$ 에서, 응력의 향으로 응력확대계수 K_I, K_{II} 를 외삽식으로 나타내면

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_y(r, 0) \sqrt{2\pi r}$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \lambda^{1/4} \tau_{xy}(r, 0) \sqrt{2\pi r} \quad (31)$$

이며, $\theta = \pm \pi$ 평면상에서의 상대변위로서 응력확대계수 K_I, K_{II} 를 외삽식으로 나타내면

$$K_I = \frac{2\mu^*}{x^* + 1} \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \lambda^{1/4} \Delta v$$

$$K_{II} = \frac{2\mu^*}{x^* + 1} \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \Delta u \quad (36)$$

이다. 여기서

$$\Delta v = [v(r, \pi) - v(r, -\pi)]/2$$

$$\Delta u = [u(r, \pi) - u(r, -\pi)]/2$$

이며, 만약 Model I와 같이 균열면에 대해 대칭이면 $\Delta v = v(r, \pi)$ 가 된다.

6. 수치해석 및 고찰

$\rho=1$ 인 경우의 직교이방성 재료에 대한 해석은 본 연구자가 이미 연구 보고한 바 있기 때문에⁽⁴⁾, 본 연구에서는 주로 $\rho=1$, $-1 < \rho < 1$ 인 경우에 대해 수치해석 하고자 한다.

6.1 기본해의 검증

먼저 $\rho=1$ 인 경우의 기본해에 대한 수치해석과 그 검증은 이미 구한바 있으며⁽⁶⁾, $-1 < \rho < 1$ 인 경우는, Fig. 6와 같은 해석 모델을 이용하여 기본해를 검증하였다. Fig. 6과 같은 12개의 요소(element)를 로써, 수치해석 결과는 Table 1~Table 3과 같다. Table 1~Table 3은 $\phi=0^\circ$, $\phi=90^\circ$,

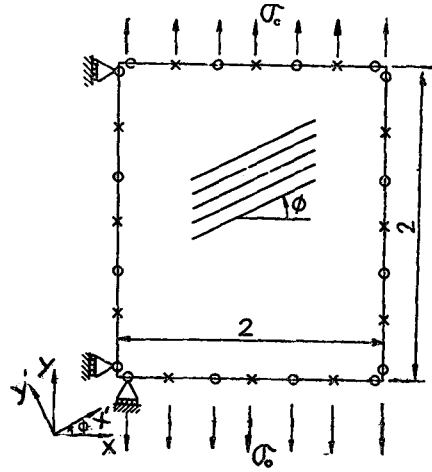


Fig. 6 Model for fundamental solutions

Table 1 Results for $\rho=0.48$, $\sigma_0=1N/mm^2$ $\phi=0^\circ$, $E_{11}=1.2N/mm^2$, $E_{22}=0.6N/mm^2$, $\nu_{12}=0.071$, $G_{12}=0.8N/mm^2$

| | | Author's solution | | | | Exact solution | |
|-----|-----|-------------------|---------|--------------|--------------|----------------|--------------|
| x | y | u | v | ϵ_x | ϵ_y | ϵ_x | ϵ_y |
| 0.0 | 0.0 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| 1.0 | 0.0 | -0.05921 | 0.00000 | -0.05921 | 0.00000 | -0.05916 | 0.00000 |
| 2.0 | 0.0 | -0.11843 | 0.00000 | -0.05921 | 0.00000 | -0.05916 | 0.00000 |
| 2.0 | 0.5 | -0.11843 | 0.83329 | -0.05921 | 1.66665 | -0.05916 | 1.66666 |
| 2.0 | 1.0 | -0.11843 | 1.66664 | -0.05921 | 1.66664 | -0.05916 | 1.66666 |
| 2.0 | 1.5 | -0.11843 | 2.49998 | -0.05921 | 1.66665 | -0.05916 | 1.66666 |
| 2.0 | 2.0 | -0.11843 | 3.33328 | -0.05921 | 1.66664 | -0.05916 | 1.66666 |
| 1.0 | 2.0 | -0.05921 | 3.33328 | -0.05921 | 1.66664 | -0.05916 | 1.66666 |
| 0.0 | 2.0 | 0.00000 | 3.33323 | 0.00000 | 1.66664 | 0.00000 | 1.66666 |

Table 2 Results for $\rho=0.48$, $\sigma_0=1N/mm^2$ $\phi=90^\circ$, $E_{11}=1.2N/mm^2$, $E_{22}=0.6N/mm^2$, $\nu_{12}=0.071$, $G_{12}=0.8N/mm^2$

| | | Author's solution | | | | Exact solution | |
|-----|-----|-------------------|---------|--------------|--------------|----------------|--------------|
| x | y | u | v | ϵ_x | ϵ_y | ϵ_x | ϵ_y |
| 0.0 | 0.0 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| 1.0 | 0.0 | -0.05921 | 0.00000 | -0.05921 | 0.00000 | -0.05916 | 0.00000 |
| 2.0 | 0.0 | -0.11843 | 0.00000 | -0.05921 | 0.00000 | -0.05916 | 0.00000 |
| 2.0 | 0.5 | -0.11843 | 0.41664 | -0.05921 | 0.83329 | -0.05916 | 0.83333 |
| 2.0 | 1.0 | -0.11843 | 0.83332 | -0.05921 | 0.83329 | -0.05916 | 0.83333 |
| 2.0 | 1.5 | -0.11843 | 1.25000 | -0.05921 | 0.83333 | -0.05916 | 0.83333 |
| 2.0 | 2.0 | -0.11843 | 1.66664 | -0.05921 | 0.83332 | -0.05916 | 0.83333 |
| 1.0 | 2.0 | -0.05921 | 1.63664 | -0.05921 | 0.83324 | -0.05916 | 0.83333 |
| 0.0 | 2.0 | 0.00000 | 1.66664 | 0.00000 | 0.83332 | 0.00000 | 0.83333 |

Table 3 Results for $\rho=0.48$, $\sigma_0=1N/mm^2$ $\phi=45^\circ$, $E_{11}=1.2N/mm^2$, $E_{22}=0.6N/mm^2$, $\nu_{12}=0.071$, $G=0.8N/mm^2$

| | | Author's solution | | | | Exact solution | |
|-----|-----|-------------------|----------|--------------|--------------|----------------|--------------|
| x | y | u | v | ϵ_x | ϵ_y | ϵ_x | ϵ_y |
| 0.0 | 0.0 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| 1.0 | 0.0 | 0.28285 | -0.41661 | 0.28285 | 0.00000 | 0.28291 | 0.00000 |
| 2.0 | 0.0 | 0.56571 | -0.83332 | 0.28285 | 0.00000 | 0.28291 | 0.00000 |
| 2.0 | 0.5 | 0.56571 | -0.37940 | 0.28285 | 0.90784 | 0.28291 | 0.90791 |
| 2.0 | 1.0 | 0.56571 | 0.07456 | 0.28285 | 0.90788 | 0.28291 | 0.90791 |
| 2.0 | 1.5 | 0.56571 | 0.52853 | 0.28285 | 0.90790 | 0.28291 | 0.90791 |
| 2.0 | 2.0 | 0.56571 | 0.98245 | 0.28285 | 0.90788 | 0.28291 | 0.90791 |

$\phi=45^\circ$ 인 경우에 대해 탄성해석적인 엄밀해와 비교한 결과로서, 경계요소법의 해석 결과는 엄밀해와 잘 일치하고 있다. 그런데, $\phi=0^\circ$, $\phi=90^\circ$ 는 직교 이방성의 재료에 해당되지만 $\phi=45^\circ$ 인 경우는 이방성의 경우가 된다. Table 3에서, $\phi=45^\circ$ 인 경우의 변형률 ϵ_x 는 양(+)인 결과가 되었다. 이것은 프와송비, ν_{xy} 가 음(-)이 됨을 의미한다. 이와같이 프와송비, ν_{xy} 가 음이 되는 경우는 林毅⁽¹⁷⁾와 三木⁽²¹⁾의 연구 결과에서 확인된 바 있는 현상이므로, 본 연구에서 사용한 기본해의 수치해석 결과가 타당함을 알 수 있다. 이 경우의 기본해는, 이 방성에 대한 기본해의 특수한 경우에 속하기 때문에, $-1 < \rho < 1$ 의 해석 결과를 통해 이방성 경우의 기본해에 대한 프로그램의 검증도 간접적으로 검증되었음을 알 수 있다. 그러므로, 직교이방성 및 이방성에 대한 경계요소법의 기본해를 체계적으로 정리할 수 있으며, 이를 바탕으로 직교이방성 재료내의 균열 문제에 대한 경계요소법 해석을 수행하였다.

6.2 직교이방성 재료내의 균열문제

Table 4는, Fig. 7과 같은 등방성 재료($\rho=1$, $\lambda=$

Table 4 Comparison of F_I for isotropic ($L/W=2.0$)

| a/W | BEM | Fedderson ⁽¹⁷⁾ | Isida ⁽¹⁸⁾ |
|-------|---------|---------------------------|-----------------------|
| 0.2 | 1.02138 | 1.02540 | 1.0246 |
| 0.3 | 1.05623 | 1.05939 | 1.0577 |
| 0.4 | 1.10620 | 1.11178 | 1.1094 |
| 0.5 | 1.18020 | 1.18920 | 1.1867 |
| 0.6 | 1.30030 | 1.30433 | 1.3033 |
| 0.7 | 1.48526 | 1.48424 | 1.4882 |
| 0.8 | 1.81080 | 1.79890 | 1.8160 |

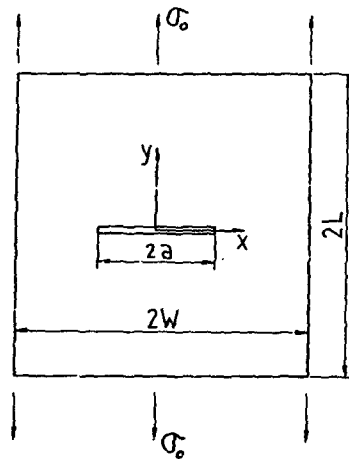


Fig. 7 Geometry of a central crack

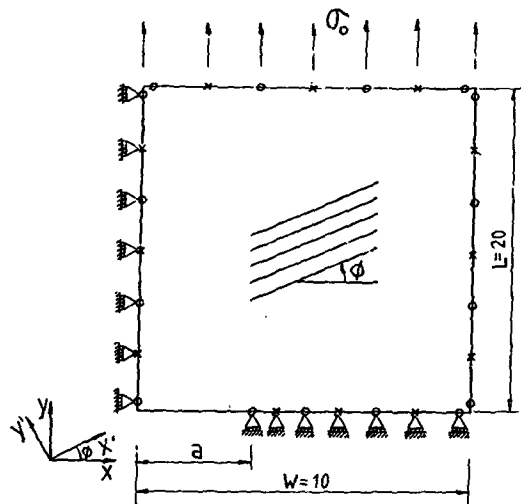


Fig. 8 Model for a central crack

Table 5 Comparison of F_I for $\rho > 1$
($L/W=2.0, \phi=0^\circ$)

| a/W | Bowie ⁽¹⁵⁾ | BEM (element 30) | BEM ⁽¹³⁾ (element 60) |
|-------|-----------------------|---------------------|-------------------------------------|
| 0.2 | 1.05 | 1.045 | 1.048 |
| 0.3 | 1.11 | 1.106 | 1.107 |
| 0.4 | 1.19 | 1.182 | 1.185 |
| 0.5 | 1.29 | 1.277 | 1.285 |
| 0.6 | 1.41 | 1.406 | 1.409 |
| 0.7 | 1.58 | 1.580 | 1.583 |
| 0.8 | 1.85 | 1.871 | 1.876 |

1)의 중앙관통 균열 문제를, Fig. 8과 같은 해석 모델을 통해 얻은 BEM 수치해석 결과를, Feddersen⁽¹⁸⁾, Isida⁽¹⁹⁾의 해석 결과와 비교한 것으로, 최고 0.9%의 오차 내로 잘 일치하고 있다. 이때 해석 모델에서 사용한 요소 수는 30개 이다.

Table 5는, Fig. 8의 모델에서 $\rho > 1, \phi = 0^\circ$ 인 경우의 직교이방성 재료내의 균열 문제를, Bowie⁽²⁰⁾

의 해석 결과와 비교한 것으로 잘 일치하고 있다. 이 결과를 바탕으로, $\rho = 1$, 과 $-1 < \rho < 1$ 의 경우의 균열 문제에 대한 해석 모델로써는 Fig. 8을 사용하였다.

Fig. 9와 Fig. 10은 $\rho = 1$ 이며, $\phi = 0^\circ, \phi = 90^\circ$ 일 경우, λ 의 변화에 따른 무차원 응력확대계수 F_I (nondimensional stress intensity factors)를 균열 길이에 대하여 나타낸 것이다. Fig. 9에서, 즉 $\phi = 0^\circ$ 일때, λ 의 값이 작을수록, F_I 의 값은 등방성 경우($\rho = 1, \lambda = 1$)의 F_I 값보다 작게 나타나며, 그 변화의 폭은 그렇게 크지않다. 반면에, $\phi = 90^\circ$ 인 경우는(Fig. 10) λ 의 값이 작을 수록 F_I 의 값은 크게 나타나며, 그 변화 폭 또한 크게 나타나고 있다. 그러나, $\phi = 0^\circ, \phi = 90^\circ$ 인 경우 모두 등방성의 경우로 수렴됨을 볼 수 있다.

Fig. 8에서의 유한폭(W)과 유한 높이(L)의 영향을 알아보기 위하여, $\rho = 1$ 이며, $L/W = 1.0$ 과 $L/W = 2.0$ 의 경우에 대해 해석한 것이 Fig. 11, Fig. 12이다. Fig. 11은 $\rho = 1, \lambda = 0.01$ 일때 $L/W = 1.0, L/W = 2.0$ 에 대한 F_I 값의 변화를 $\phi = 0^\circ, \phi =$

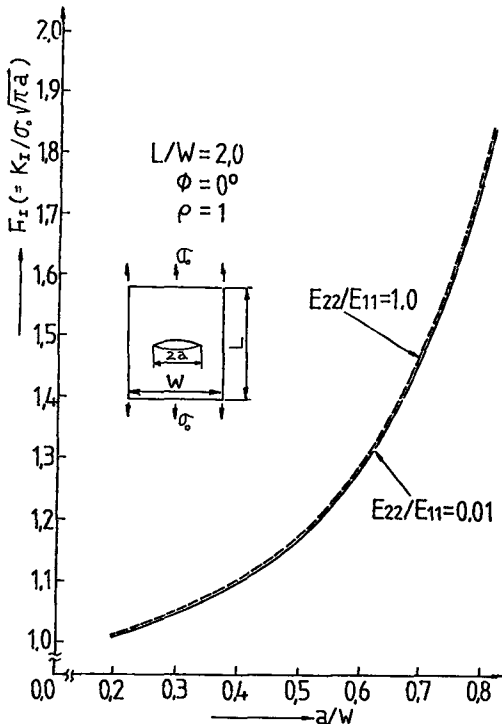


Fig. 9 Variations of F_I with respect to $\lambda (= E_{22}/E_{11})$ for $\phi = 0^\circ$

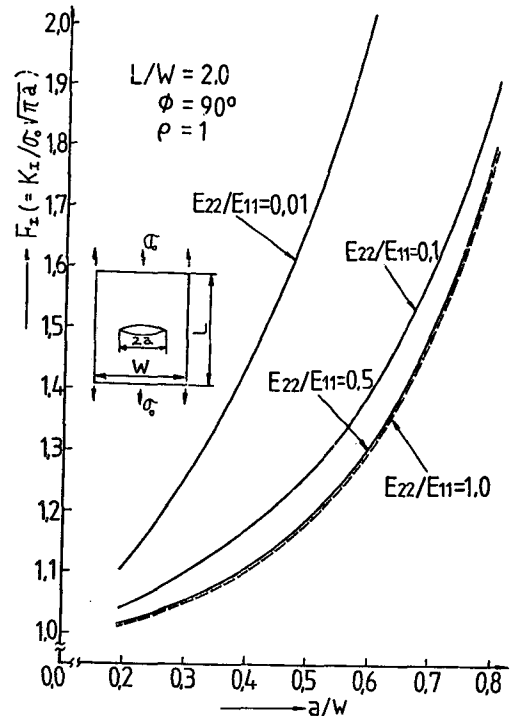


Fig. 10 Variations of F_I with respect to $\lambda (= E_{22}/E_{11})$ for $\phi = 90^\circ$

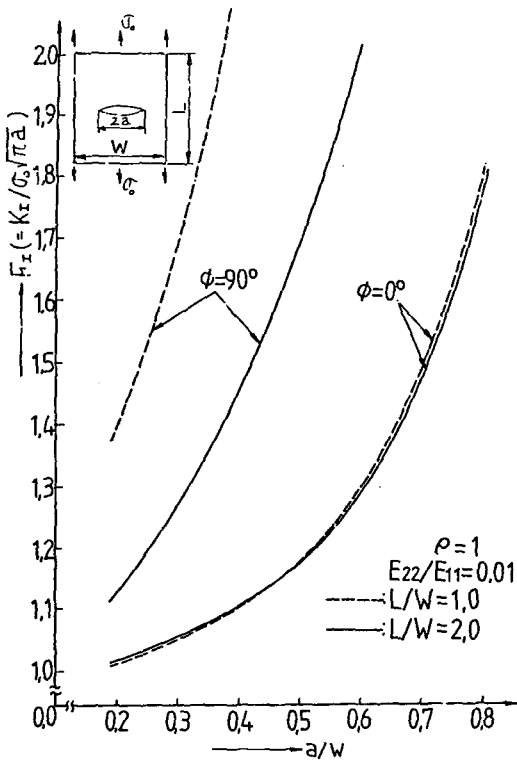


Fig. 11 Variations of F_I with the geometric ratio (L/W) for $\lambda=0.01$

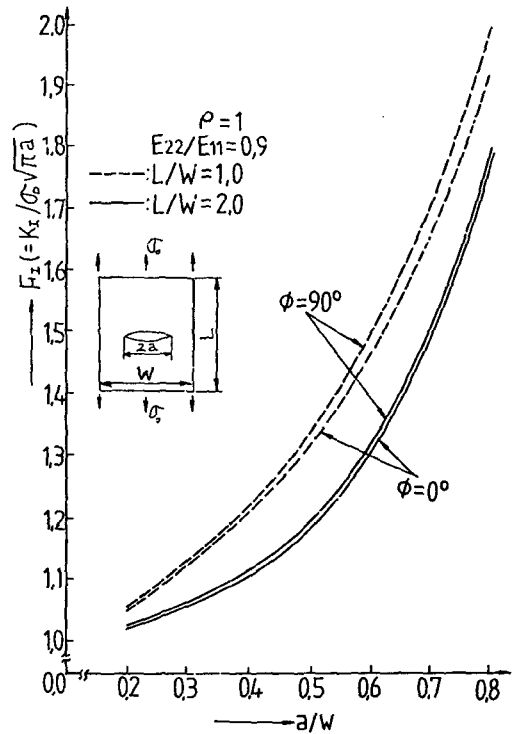


Fig. 12 Variations of F_I with the geometric ratio (L/W) for $\lambda=0.9$

90°에 대해 나타낸 것이다. $\phi=0^\circ$ 일때는 L/W 의 영향이 작지만, $\phi=90^\circ$ 일때는 L/W 영향이 크게 나타나고 있다. 반면, $\lambda=0.9$ (Fig. 12)일때는 $\phi=0^\circ$, $\phi=90^\circ$ 모두 L/W 의 영향을 크게 받고 있음을 알 수 있다. 따라서, λ 의 값이 작을 수록 $\phi=0^\circ$ 일때 L/W 의 영향은 작지만, $\phi=90^\circ$ 일때는 L/W 의 영향이 상당히 크게 나타남을 알 수 있다.

7. 결 론

본 연구에서의 해석 결과와 수치해석을 통해 얻은 결과는 아래와 같다.

(1) 본 연구에서는 복합재료(직교이방성 및 이방성 재료)에 대한 경계요소법의 기본해를 체계적으로 정리하기 위하여, 직교이방성 재료의 특성근의 분류에 따른 기본해를 유도, 정리하였으며, 이방성 재료의 경우를 포함한 경계요소법의 프로그램을 개발하여, 그 타당성을 증명하였다.

(2) 직교이방성 재료내의 균열 문제에서, 종래의

응력장과 변위장은, 직교이방성 재료에 대한 특성근이 같은 경우 특이성을 나타낸다. 본 연구에서는 이러한 특이성 문제를 등방성의 경우에 상사하는 방법으로 해석하여, 직교이방성 재료내의 균열에 대한 응력장과 변위장을 나타냄으로서, 좀더 일반적인 균열해석을 행할 수 있게 되었다.

(3) 아직 복합재료(이방성 및 직교이방성 재료)에 대한 강도해석 및 균열문제에 대한 자료가 많지 않은 실정에서, 본 연구는 복합재료의 강도해석과 균열문제를 체계적으로 해석할 수 있는 기초적인 토대가 될 수 있으며, 이종재료접합재(bimaterial) 또는 접합면균열(interface crack)문제 등의 해석에 상당히 유용 하리라 사료된다.

참 고 문 헌

- (1) 結城良治, 木須博行, 1987, “境界要素法による 弾性解析”, 培風館, p. 14.
- (2) Zhigang Suo, 1989, “Singularity, Interface and

- Crack in Dissimilar Anisotropic Media", Harvard University Report Mech-137
- (3) Rizzo, F.T., Shippy, D.J., 1970, "A Method for Stress Determination in Plate Anisotropic Elastic Bodies", *J. Composite Material*, Vol. 4, pp. 36~61.
- (4) Tung, T.K., 1987, "On Computation of Stress Around Holes in Anisotropic Plates", *J. Composite Materials*, Vol. 21, pp. 100~105.
- (5) Vable, M., and Sikarskie, D.L., 1988, "Stress Analysis in Plane Orthotropic Material by the Boundary Element Method", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 24, No. 1, pp. 1~11.
- (6) 李甲來, 曹相鳳, 崔鎔湜, 1989, "직교이방성 재료에 대한 경계요소법(BEM)의 기본해에 관한 연구", 한국자동차공학회, 추계논문발표집, pp. 138~140.
- (7) Sih, G.C., Paris, P.C., and Irwin, G.R., 1965, "On Cracks in Rectilinearly Anisotropic Bodies", *Int. J. of Fracture Mech.* 1, pp. 189~203.
- (8) 이억섭, 한민구, 1987, "Stress Field Pattern at Crack Tip in Composite Materials", 한국정밀공학회지, 제4권, 제4호, pp. 43~55.
- (9) Lekhnitskii, G., 1963, "Theory of Elasticity on an Anisotropic Elastic Body", Holden-Day, San Francisco, pp. 117~128.
- (10) Steen Krenk, 1975, "The Stress Distribution in an Infinite Anisotropic Plate with Co-Linear Cracks", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 11, pp. 449~460.
- (11) Jones, R.M., 1975, "Mechanics of Composite Materials", Published by McGRAW-Hill, pp. 31~71.
- (12) Green, A.E., 1943, "A Note on Stress Systems in Aeolotropic Materials", *Philosophical Magazine*, Vol. 34, pp. 416~418.
- (13) Brebbia, C.A., 1980, "The Boundary Element Method for Engineers", Pentech Press, pp. 174~176.
- (14) 曹相鳳, 結城良治, 曹國強, 1988, "直交異方性板の境界要素弾性解析", 日本境界要素法研究會, 境界要素論文集, 第5卷, pp. 155~160.
- (15) Christensen, R.M., 1988, "Tensor Transformations and Failure Criteria for the Analysis of Fiber Composite Matreials", *J. of Composite Materials*, Vol. 22, pp. 874~897.
- (16) Liebowitz, H., 1968, "Frcture (Vol. II)", Published by Academic Press. INC., pp. 108~114.
- (17) 林毅, 1941, "直交異方性板の弾性係數と剛性に就て", 日本航空學會誌, Vol. 8, No. 79, pp. 601~626.
- (18) Feddersen, 1966, ASTM STP 410, p. 11.
- (19) Isida, M., 1971, "Effect of Width and Length on Stress Intensity Factors of Internally Cracked Plates under Various Boundary Conditions", *Int. J. of Fracture Mechanics*, Vol. 7, No. 3, pp. 301~316.
- (20) Bowie, O.L., and Freese, C.E., 1972, "Central Crack in Plane Orthotropic Rectangular Sheet", *Int. J. of Fracture Mech.*, Vol. 8, No. 1, pp. 49~57.
- (21) 三木光範, 室律義定, 1988, "纖維複合材積層板のホアソン比の特異な舉動について", 日本機械學會論文集(A編), 第54卷, 第501號, pp. 970~976.