366 大韓機械學會論文集 第15卷 第1號, pp. 366~375, 1991.

〈技術論文〉

전달행렬을 이용한 유동매체를 가진 배관요소의 진동특성 분석

이 영 신*·천 일 환**

(1990년 7월 11일 접수)

Vibration Characteristics of Pipe Element Containing Moving Medium by a Transfer Matrix

Young-Shin Lee and Il-Hwan Cheon

Key Words: Vibration(진동), Pipe(배관), Transfer Matrix(전달행렬), Natural Frequency (고유진동수), Critical Velocity(임계속도), Frequency Mode(진동 모드)

Abstract

In this study, vibrational behavior of uniform pipe carrying a moving medium is studied by using a transfer matrix and the displacement function derived from the conventional beam theory. In various boundary conditions, flow velocity and mechanical property change on the variation of natural frequency are investigated. The Coriolis term in the original differential equation of motion has been ignored in the investigation. This method is used to study the variation of natural frequency with flow velocity for clamped-clamped, cantilevered, clamped-pinned, pinned-pinned, free-free straight pipe element. It is shown that clamped-clamped, free-free pipe have the highest natural frequency and critical velocity values while cantilevered pipe have the smallest natural frequency for the same mechanical properties. From the vibration effects of mechanical property variation, it is shown that bending stiffness and pipe length variation has large influence on natural frequency and critical velocity. Since the order of transfer matrix is not changed with boundary conditions of pipe element, this method proposed can be easily applied to personal-computer for vibration analysis of pipe element. Furthermore, this method can be extended to three-dimensional system by using a coordinate transformation for the analysis of piping systems.

기 호 설 명

A : 배관의 단면적

C : $\sqrt{(EA/m)}$

C_1 : $\sqrt{(GA/m)}$

E : 탄성계수

EI : 굽힘강성

G : 비틀림 계수

Ix, Izy, Iz: 관성모멘트

Ip : 단면의 극관성 모멘트

L : 배관 길이

m : 단위길이당 배관과 유체의 합계질량

M : 배관의 모멘트

N : x방향 축력

P_1, P_2: 운동지배방정식에 대한 특성방정식의 근

$$P_1 : \sqrt{-\frac{\rho v^2}{2EI}+\sqrt{[\frac{\rho v^2}{2EI}]^2+\frac{m\omega^2}{EI}}}$$

$$P_2 : \sqrt{\frac{\rho v^2}{2EI}+\sqrt{[\frac{\rho v^2}{2EI}]^2+\frac{m\omega^2}{EI}}}$$

t : 시간

*정회원, 충남대학교 공과대학 기계설계학과
**정회원, 한국전력공사 기술연구원 원자력연구실

T : 비틀림 토크
u : 배관의 x방향 변위
v : 유체속도
V : 전단력
x : 배관의 길이방향 좌표
y : 배관의 수직방향 좌표
z : x, y축과 직각방향 좌표
β : $\omega L/C$
$\beta 1$: $\omega L/C1$
ω : 진동수[rad/sec]
ρ : 단위길이당 유체질량
θ : 배관의 회전각
ϕ : 비틀림각
$\{\ \}$: 상수 행렬
$[\ ]^{-1}$: 역 행렬
$[\ ]^T$: 전치 행렬
$[Fa]$: 축진동 전달행렬
$[Fxy]$: xy평면에서의 굽힘진동 전달행렬
$[T]$: 배관진동의 전체 전달행렬

1. 서 론

배관진동은 연료이송배관, 열교환기, 원자력발전소 배관등 산업분야에서 큰 관심이 있는 분야이며 이 문제를 분석하기 위해서는 고유진동수, 배관의 불안정성(instability)과 유동유체속도와의 관계를 계산하고 분석하는 것은 필수적인 문제이다.

비관진동 분석에는 3가지 접근방식이 있는데 첫째로는 유동유체를 가진 배관의 운동지배 방정식의 엄밀해를 구하는 것이며 두번째로는 전달행렬법(transfer matrix method)이나 유한차분석(finite difference method)을 이용한 수학적 접근방식이고 세번째로는 유한요소법(finite element method)을 이용하는 것이다. 운동방정식의 엄밀해는 계산과정이 복잡하여 다양한 형태의 배관계의 진동특성 계산이 어려우며 유한 요소법은 대형의 연산 수단(tool)과 많은 시간이 필요한 것이 단점이라 할 수 있다.

유동유체를 가진 배관의 운동지배 방정식은 1952년 Housener에 의하여 유도 되었는데 그때 조건은 낮은 유속과 단순지지된 배관이었으며 불안정성 분석은 없었다[1]. 그러나 배관 진동 특성은 1961년 Benjamin의 동적 배관 연구 결과와 잘 일치함을 보여 주고 있다[2]. 그 후, 배관 직경이 변화하고 유동유체의 내, 외적 유동(internal, external flow)에 대한 진동평가가 있었으며[3], Gregory와 Paidoussis는 일단고정-일단자유(Cantilever) 배관의 안정성에 대한 연구와[4] Volmire의 탄성계에 대한 안정성 연구가 있었다[5]. Wu와 Raju에 의하여 이산질량(disscrete Mass) 개념에 의한 배관 진동 특성 연구가 있었고[6], Chen에 의하여 충격 유동(Pulsating flow)에 대한 진동특성연구가 있었으며[7], Paz와 Michelow에 의하여 유한요소법을 이용한 배관진동 분석방법이 연구되었다[8].

1976년 Blevins는 직선배관의 여러 경계조건하에서의 고유진동수를 계산 할 수 있는 공식을 제안하였으며[9,10] 그 결과에 대하여 Gregory, Paidoussis의 실험값들[11,12]과 비교한 결과 비교적 잘 일치함을 보여주고 있다.

1984년 To와 Kaladi는 유동유체를 가진 배관의 진동특성을 전달행렬법를 이용하여 분석하였으며 그때 도입된 변위함수(displacement function)은 지수 형태(exponential form)를 도입하였다[13,14].

본 논문에서는 보 이론(beam theory)의 변위함수(displacement function)를 도입하고 전달행렬법을 이용하여 각 배관요소의 경계조건에 대한 고유진동수와 배관의 불안정성을 일으키는 유체의 임계속도(critical velocity)를 계산 평가하고, 실험으로 입증된 Blevins의 결과치와 비교하였다.

2. 수학적 공식화

2.1 단위배관의 전달행렬 유도

1952년 Housner에 의해서 유도된 유동유체를 갖는 균일보(uniform beam)의 운동지배 방정식은 아래와 같다[1].

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\rho v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+2\rho v\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial t}+m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0 \quad (1)$$

여기서 E=탄성계수
I=배관의 관성 모멘트
m=단위길이당 유체와 파이프의 질량
ρ=단위길이당 유체질량
v=유체 속도
x=파이프 길이 방향 좌표
y=파이프의 수직방향 좌표

식 (1)의 첫째항, $EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$는 탄성력(elastic force)

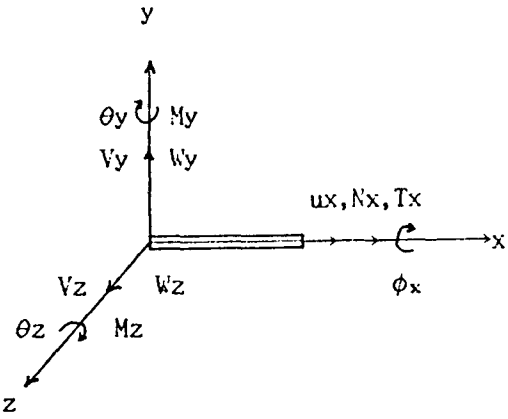

Fig. 1 Notation of the pipe element

을 나타내고 둘째항, $\rho v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$는 곡선배관을 유동유체가 통과할 때 나타나는 관성력(inertia force)을 나타낸다. 셋째항, $2\rho v\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial t}$는 배관 안쪽에 각속도를 갖는 유체의 운동 때문에 발생하는 코리올리스 힘을 나타내는데 이 값은 높은 유체 속도에서 나타나는 값이므로 일반산업체 배관계에서 사용되는 유체속도 0m/sec에서 15m/sec구간에서는 영향이 없으므로 본 논문의 목적중의 하나인 계산법을 쉽고 단순화 시키기 위하여 본 논문에서는 무시하기로 한다. 넷째항, $m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$는 유동유체를 갖고있는 배관의 수직 가속도 때문에 발생하는 관성력을 나타낸다.

유동유체를 갖는 배관의 운동 지배 방정식인 식 (1)의 해는 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$y(x,\ \omega)=Y(x,\ \omega)e^{iwt} \tag{2}$$

식 (2)에서 $Y(x,\ \omega)$는 여러가지 형태로 가정되어 연구되어 왔으며 가정된 형태에 따라 해의 정확도가 결정되는데 본논문에서는 보 이론의 변위함수(displacement funtion)을 도입하여 식 (3)과 같이 가정하고 전달행렬법을 적용하여 배관 진동특성을 분석하는 계산기법을 연구 하였다.

$$\begin{aligned}Y(x,\ \omega)=&A\sin(P_1x)+B\cos(P_2x)\\&+C\sinh(P_1x)+D\cosh(P_1x)\end{aligned} \tag{3}$$

식 (3)에서 P_1, P_2는 운동지배방정식의 특성방정식인 식 (4)의 근이며 식 (5, 6)으로 주어진다.

$$EIP^4+\rho v^2P^2-m\omega^2=0 \tag{4}$$

$$P_1=\sqrt{-\frac{\rho v^2}{2EI}+\sqrt{[\frac{\rho v^2}{2EI}]^2+\frac{m\omega^2}{EI}}} \tag{5}$$

$$P_2=\sqrt{\frac{\rho v^2}{2EI}+\sqrt{[\frac{\rho v^2}{2EI}]^2+\frac{m\omega^2}{EI}}} \tag{6}$$

$Y(x,\ \omega)$을 x에 대하여 각각 미분하면 아래와 같은 관계식으로 주어진다.

$$\begin{aligned}Y(x,\omega)=&A\sin(P_2x)+B\cos(P_2x)+C\sin h(P_1x)\\&+D\cosh(P_1x)\\Y'(x,\omega)=&A(P_2)\cos(P_2x)+B(-P_2)\sin(P_2x)\\&+C(P_1)\cosh(P_1x)+D(P_1)\sinh(P_1x)\\Y''(x,\omega)=&A(-P_2^2)\sin(P_2x)+B(-P_2^2)\cos(P_2x)\\&+C(P_1^2)\sinh(P_1x)+D(P_1^2)\cosh(P_1x)\\Y'''(x,\omega)=&A(-P_2^3)\cos(P_2x)+B(P_2^3)\sin(P_2x)\\&+C(P_1^3)\cosh(P_1x)+D(P_1^3)\sinh(P_1x)\end{aligned} \tag{7}$$

식 (7)에서 Rotation을 θ, 모멘트를 M, Shear force를 V로 표시하면, 아래와 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\left.\begin{aligned}\theta(x,\omega)&=Y'(x,\omega)\\M(x,\omega)&=-Y''(x,\omega)\\V(x,\omega)&=-Y'''(x,\omega)\end{aligned}\right] \tag{8}$$

식 (7)을 사용하여 식 (8)을 행렬 형태로 표시하면 아래와 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\{Z(x)\}=[G(x)]\{B\} \tag{9}$$

여디서 $\{Z(x)\}$, $[G(x)]$, $\{B\}$는 식 (10), (11), (12)으로 주어진다.

$$\{Z(x)\}=\begin{Bmatrix}-Y\\ \theta\\ M\\ V\end{Bmatrix} \tag{10}$$

$$\{B\}=-\begin{bmatrix}A\\ B\\ C\\ D\end{bmatrix} \tag{11}$$

$$[G(x)]=\begin{bmatrix}\sin P_2x & \cos P_2x\\ P_2\cos P_2x & -P_2\sin P_2x\\ -P_2^2\sin P_2x & -P_2^2\cos P_2x\\ -P_2^3\cos P_2x & P_2^3\sin P_2x\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sin hP_1x & \cos hP_1x \\ P_1\cos hP_1x & P_1\sin hP_1x \\ P_1^2\sin hP_1x & P_1^2\cos hP_1x \\ P_1^3\cos hP_1x & P_1^3\sin hP_1x \end{bmatrix} \quad (12)$$

식 (9)에서 직선배관일때, $x=0$에서는 State 백터를 $\{Z(0)\}$로 표시할 수 있고 $x=L$에서는 $\{Z(L)\}$로 표시할 수 있으므로 $\{Z(L)\}$과 $\{Z(0)\}$은 아래와 같은 관계식으로 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\{Z(0)\}=[G(0)]\{B\} \\ &\{B\}=[G(0)]^{-1}\{Z(0)\} \\ &\{Z(L)\}=[G(L)]\{B\} \\ &\quad =[G(L)][G(0)]^{-1}\{Z(0)\} \\ &\quad =[T]\{Z(0)\} \end{aligned} \quad (13)$$

식 (13)에서 $[T]=[G(L)]^{-1}[G(0)]$는 단위 배관에서 State 백터 $\{Z(0)\}$와 $\{Z(L)\}$사이에 관계되는 굽힘진동에 대한 전달행렬을 의미한다.

식 (12)에서 $x=0$일때 [G(0)]는 아래와 같은 관계식으로 주어진다.

$$[G(0)]=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ P_2 & 0 & P_1 & 0 \\ 0 & -P_2 & 0 & P_1 \\ -P_2 & 0 & P_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

식 (12)에서 $x=L$ 일때 $[G(L)]$은 아래와 같은 관계식으로 주어진다.

$$[G(L)]=\begin{bmatrix} \sin P_2L & \cos P_2L & \sin hP_1L & \cos hP_1L \\ P_2\cos P_2L & -P_2\sin P_2L & P_1\cos hP_1L & P_1\sin hP_1L \\ -P_2^2\sin P_2L & -P_2^2\cos P_2L & P_1^2\sin P_1L & P_1^2\cos hP_1L \\ -P_2^3\cos P_2L & -P_2^3\sin P_2L & P_1^3\cos hP_1L & PL^3\sin hP_1L \end{bmatrix} \quad (15)$$

P_1, P_2는 주파수 ω의 함수이므로 $[G(O)]$, $[G(L)]$, $[T]=[G(L)]^{-1}[G(O)]$는 ω의 함수로 표현되어진다. 이 전달행렬 $[T]$는 x축으로 놓여있는 배관요소에 대하여 xy평면과 xz평면에 대하여 공히 적용할 수 있다.

한편, 유동유체가 없을때 축진동(Longitudinal vibration)의 전달행렬은 식 (16)과 같은 관계식으로 주어진다.

$$\begin{Bmatrix} u(L) \\ N(L) \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\beta & -\frac{C}{AE\omega}\sin\beta \\ \frac{AE\omega}{C}\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(0) \\ N(0) \end{Bmatrix} \quad (16)$$

그리고 유동유체가 없을때 비틀림 진동(torsional vibration)은 식 (17)과 같은 관계식으로 주어진다.

$$\begin{Bmatrix} \phi(L) \\ T(L) \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\beta_1 & -\frac{C_1}{GIp\omega}\sin\beta_1 \\ \frac{GIp\omega}{C_1}\sin\beta_1 & \cos\beta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi(0) \\ T(0) \end{Bmatrix} \quad (17)$$

여기서 $u=x$방향 변위　　$N=x$방향 축력

$\phi=$비틀림각　　$T=$비틀림 토크

$A=$배관의 단면적　　$G=$전단 탄성계수

$Ip=$단면의 극관성 모멘트

$C=\sqrt{(EA/m)}$　　$C_1=\sqrt{(GA/m)}$

$\beta=\omega L/C$　　$\beta_1=\omega L/C_1$

결과적으로 xy평면에서의 축진동, 비틀림진동, 굽힘진동의 조합이 xy평면에서의 전체 진동특성이라 하겠다.

따라서 xy평면에서의 축진동, 비틀림진동, 굽힘진동 즉 식(13), (16), (17)을 조합하면 식 (18)과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} ux(L) \\ Nx(L) \\ \phi x(L) \\ Tx(L) \\ wy(L) \\ \theta x(L) \\ Mz(L) \\ Vy(L) \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} [Fa] & 0 & 0 \\ 0 & [Ft] & 0 \\ 0 & 0 & [Fxy] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ux(0) \\ Nx(0) \\ \phi x(0) \\ Tx(0) \\ wx(0) \\ \theta x(0) \\ Mx(0) \\ V(x) \end{Bmatrix} \quad (18)$$

여기서 $[Fa]$는 축진동, $[Ft]$는 비틀림진동, $[Fxy]$는 xy평면의 굽힘진동 전달행렬을 나타내며 W는 배관의 처짐(displacement)를 나타낸다.

따라서 직선배관의 xy평면에서 전달행렬 $[T]_{total}$는 식 (19)와 같은 관계식으로 주어진다.

$$[T]_{total}=\begin{bmatrix}[Fa]_{2\times2} & & \\ & [Ft]_{2\times2} & \\ & & [Fxy]_{4\times4}\end{bmatrix} \tag{19}$$

2.2 단위배관의 고유진동수 결정

배관요소의 전달행렬 즉 식 (19)는 배관요소의 고유진동수(Natural frequency)를 결정하는데 사용되어진다.

한편 state 벡터 $\{Z\}$와 전달행렬 $[T]$의 관계는 식 (20)과 같은 관계식으로 표현할 수 있다.

$$\{Z\}_L=[T]\{Z\}_0 \tag{20}$$

여기서

$$\{Z\}=\{U_x,\ N_x,\ \phi_x,\ T_x,\ W_y,\ \theta_z,\ V_y\}^T$$

배관요소의 고유진동수는 ω의 함수로 된 전체 전달행렬 $[T]_{total}$의 determinent가 영(zero)일때 ω는 배관요소의 고유진동수를 나타낸다.

3. 수치예 및 고찰

본 수치예에서는 배관요소에서의 유속 및 경계조건의 영향을 고찰하였다. 고려되는 유속은 산업계에서 주로 사용되고 있는 0m/sec~15m/sec를 중점적으로 분석 하였으며 배관요소의 불안전성을 개략적으로 평가하기 위하여 유속을 계속 상승시켜 경향을 추적하여 보았다. 그러나 본 논문에서는 높은 유속에서 영향을 받는 코리올리스 힘을 무시하였기 때문에 높은 유속에서의 정확도는 떨어진다 하겠다. 그리고 계산에서 고려한 경계조건은 실용적으로 관심이 큰 외팔형(cantilevered)배관, 양단고정(clamped-clamped)배관과 배관의 여러 경계조건에서의 진동경향을 분석하기 위하여 양단힌지(pinned-pinned) 배관, 고정-힌지(clamped-pinned) 배관, 양단자유(free-free)배관등에 대해서도 고려 하였다. 또한 배관의 기계적 성질 변화에 따른 진동경향을 분석하기 위하여 배관길이 변화, 굽힘강성 변화, 유동유체의 밀도변화, 배관내경의 변화, 배관 두께 변화에 따른 진동특성을 분석하였다.

Table 1은 계산에 사용된 배관의 기계적 특성을 보여준다.

Table 1 Mechanical properties of pipe element

Young's modulus	3.9786×10^9N/m
Pipe internal dia.	22.225mm
Pipe wall thickness	1.5875mm
Pipe length	1511mm
Mass of pipe per unit length	0.1415kg/m
Mass of fluid per unit length	0.3874kg/m

3.1 외팔형(Cantilever) 배관

외팔형(고정-자유) 배관의 경계조건은 식 (21), (22)와 같다.

$x=0$ (고정단)에서

$$\begin{bmatrix}u,\ \phi,\ W,\ \theta=0\\ N,\ T,\ M,\ V=\text{미지수}\end{bmatrix} \tag{21}$$

$x=L$(자유단)에서

$$\begin{bmatrix}N,\ T,\ M,\ V=0\\ u,\ \phi,\ W,\ \theta=\text{미지수}\end{bmatrix} \tag{22}$$

경계조건 식 (21), (22)를 배관 요소의 전체 전

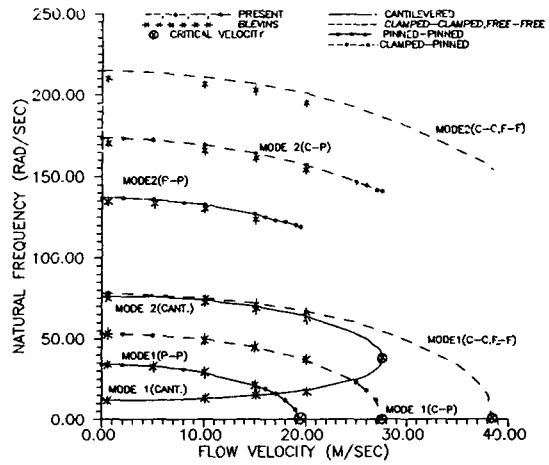

Fig. 2 Variation of natural frequency of cantilevered, clamped-clamped, free-free, pinned-pinned, clamped-pinned pipe with flow velocity and comparison with Blevins results

Table 2 Natural frequency of cantilevered, free-free, clamped-clamped, pinned-pinned, clamped-pinned pipe with flow velocity and comparison with Blevins results

Frequency mode / Boundary condition	Velocity	Frequency mode 1 [Rad/sec]		Frequency mode 2		Frequency mode 3	
		Blevins	Present	Blevins	Present	Blevins	Present
Cantilevered	v=0 m/s	12	12	75	76	210	215
	v=10 m/s	13	13	72	74	207	212
	v=15 m/s	15	15	68	70	203	207
	v=20 m/s	16	18	63	64	197	201
Free-free, Clamped clamped	v=0 m/s	76	78	210	215	411	422
	v=10 m/s	74	75	206	211	408	418
	v=15 m/s	70	72	202	207	404	413
	v=20 m/s	65	67	195	201	398	407
Pinned -pinned	v=0 m/s	34	34	134	137	302	310
	v=10 m/s	29	29	129	133	297	305
	v=15 m/s	20	21	123	127	292	299
Clamped -pinned	v=0 m/s	53	53	170	174	355	364
	v=10 m/s	49	50	166	170	354	359
	v=15 m/s	44	45	161	165	345	354
	v=20 m/s	36	37	153	157	337	347

달행렬 $[T]_{total}$인 식 (19)에 적용하면 외팔형 배관의 전달행렬 $[T]_{can.}$은 식 (23)과 같은 관계식으로 얻어진다.

$$[T]_{can.}=\begin{bmatrix} Fa(2,2) & & & \\ & Ft(2,2) & & \\ & & Fxy(3,3) & Fxy(3,4) \\ & & Fxy(4,3) & Fxy(4,4) \end{bmatrix} \tag{23}$$

여기서 $Fa(2,2)$는 축진동 전달행렬 $[Fa]$의 행렬요소(matrix element) (2,2)를 의미 한다. 식 (23)을 해결하기 위하여 Fortran 77로 프로그램을 작성하여 결과를 얻었으며 그 결과는 Fig. 2로 나타내었다.

Blevins의 결과와 본 논문에서 계산된 외팔형 배관의 결과치 비교는 Table 2, 3과 같으며 유체속도 0m/sec~15m/sec에서는 Blevins결과치와 일치하고 15m/sec~20m/sec 구간에서는 11%, 20m/sec에서 임계 속도까지는 최대 18%의 오차를 보여주고 있는데 이는 높은 유속에서 나타나는 Coriolis 힘 효과 때문이며 탄성계수가 4GPa이하이고 유속이 15m/sec이상일 때는 Coriolis힘을 고려해야 됨을 알수 있다.

Table 2에서 보여주는 바와 같이 외팔형 배관에서의 임계속도는 18%의 오차를 나타냄으로 정확한 임계속도는 Coriolis힘을 고려해야 하지만 유체속도 0m/sec~15m/sec에서는 Blevins결과치와 잘 일치하며 그외의 경계조건 즉 양단고정, 양단자유, 양단힌지, 고정-힌지 경계조건에서는 임계속도 계산값도 정확함을 알 수 있다.

유동유체의 속도와 고유진동수 관계를 나타낸 Fig.2를 살펴보면 유동유체 속도가 증가할 수록 진동 모드 2이상에서는 고유진동수가 감소하는 경향을 볼수 있고 진동모드 1은 점점 증가함을 보여 주고 있다. 어떤 높은 유체속도에서 진동모드 1과 2

Table 3 Critical velocity of cantilevered, free-free, clamped-clamped, pinned-pinned, clamped-pinned pipe at natural frequency mode 1 with flow velocity and comparison with Blevins results

Boundary condition	Critical velocity [rad/sec]	
	Blevins	Present
Cantilevered	35	28
Clamped-clamped	38	38
Free-free	38	38
Pinned-pinned	19	19
Clamped-pinned	27	27

가 만나게 되는데 그것은 진동에 의한 배관의 불안정성이 발생하는 임계점을 나타내는 것이며 그때의 유동유체속도를 임계속도라 한다. 이때 나타나는외팔형 배관의 불안정성은 떨림 현상(fluttering instability)으로 나타난다[11].

3.2 양단 고정 배관 및 기타 경계조건 배관

양단고정 배관의 경계조건은 아래와 같다.

$$x=0,\ L\text{에서}\quad \begin{cases} u,\ \phi,\ W,\ \theta=0 \\ N,\ T,\ M,\ V=\text{미지수} \end{cases} \tag{24}$$

경계조건 식 (24)를 식 (19)에 적용하면 양단고정 배관의 절달행렬 $[T]_{c-c}$는 아래와같은 관계식으로 주어진다.

$$[T]_{c-c.}=\begin{bmatrix} Fa(1,2) & & & \\ & Ft(1,2) & & \\ & & Fxy(1,3) & Fxy(1,4) \\ & & Fxy(2,3) & Fxy(2,4) \end{bmatrix} \tag{25}$$

식 (25)의 결과와 Blevins의 결과 비교는 Table 2, 3과 같으며 잘 일치함을 보여주고 있다. 본 계산에서 사용된 배관의 기계적 성질은 Table 1과 같다.

유체속도와 고유진동수의 관계를 나타내는 Fig. 2를 살펴보면 유체속도가 증가할수록 진동 모드 1, 2에서 모두 감소하는 경향을 보이고 있으며 그 중 진동 모드 1은 특정한 유체속도에서 영(zero)이 되는데 그것은 높은 유동유체 속도에 의한 배관의 불안정성이 나타나는 임계점을 나타내는 것이며 그때 유동유체 속도가 양단고정 배관의 임계속도이다. 임계속도에서 나타나는 양단고정 배관의 불안정성은 좌굴현상(buckling instability)으로 나타난다[11].

기타 여러 경계조건 즉 양단자유, 양단힌지, 고정-힌지 배관에서 Blevins 결과와 본 논문의 결과를 Table 2, 3과 Fig.2에서 나타냈으며 일치함을 보여주고 있다.

각 배관요소 공통으로 유체속도가 증가할 수록 진동 모드 1 과 2의 값은 감소하는 경향을 나타내고 있으며 특정 속도에서 진동 모드 1이 영이 되는 임계점을 갖고 있다. 또한 임계속도 크기는 양단고정과 양단자유 배관에서 제일크고 양단힌지 배관에서 제일 작은 값을 나타내었다. 진동 모드 1중에서 제일 큰 고유진동수 값은 양단고정 배관에서, 제일 작은 고유 진동수의 외팔형 배관에서 나타났다.

3.3 배관의 여러 기계적 성질하에서 고유진동수 분석

(1) 배관길이 변화에 따른 고유진동수 변화

배관 길이를 제외한 배관의 기계적 성질은 Table 1과 같고 경계조건은 외팔형 배관 일때, 본 논문에 의하여 계산된 결과치는 Fig.3에 나타내었다. 배관길이는 3/4 L, $L(=1.511\text{M})$, 1 1/4 L로 변

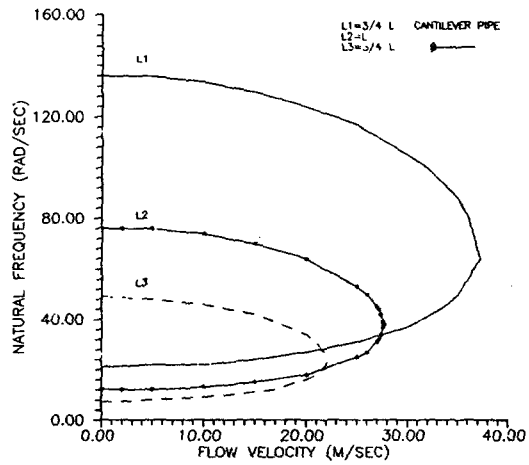

Fig. 3 Natural frequency of cantilever pipe with flow velocity and pipe length variation

화 시키면서 본 논문에 의한 계산 결과를 비교한 결과, 배관 길이가 길어질수록 고유진동수값은 낮아지고 임계속도도 작아지고 있음을 보여주고 있다.

(2) 굽힘강성에 따른 고유진동수 변화

경계조건이 외팔형 배관이고 탄성계수를 제외한 배관의 기계적 성질은 Table 1과 같은때 본 논문에서 고려한 구리($E=1.1\times10^9$N/m), 탄소강($E=1.9\times10^9$N/m), 보론섬유($E=4.1\times10^9$N/m)에 대하여 진동 특성을 비교한 결과가 Fig. 4에 나타나 있다.

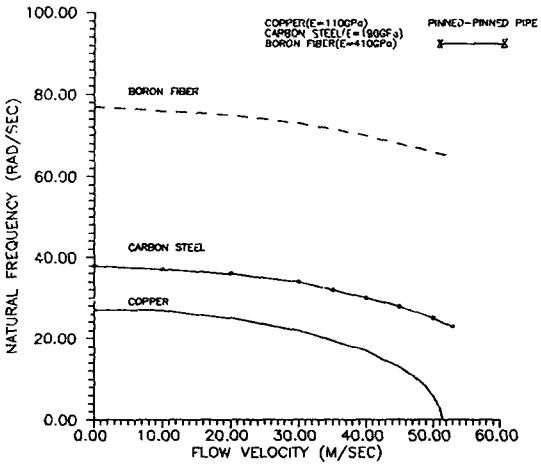

Fig. 4 Natural frequency of pinned-pinned pipe with flow velocity and bending stiffness variation

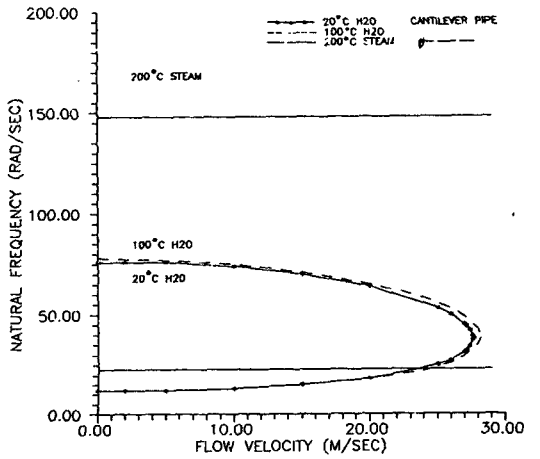

Fig. 5 Natural frequency of cantilever pipe with flow velocity and fluid density variation

굽힘강성(EI)이 클수록 고유진동수 값은 증가하고 임계속도도 증가함을 알 수 있으며 굽힘강성에 크게 영향받고 있음을 보여주고있다.

(3) 유동유체 밀도에 따른 고유진동수 변화

배관내 유동유체 성질을 제외한 배관의 기계적 성질이 Table 1과 같을 때, 본 논문에서는 외팔형 배관 속을 흐르는 20℃ 물, 100℃물, 200℃증기에 대하여 비교한 결과를 Fig. 5에 나타내었다.

유동유체의 밀도가 낮을수록 고유진동수 값은 증가하고 임계속도도 증가함을 알 수있으며 임계속도는 유체밀도에 영향받고 있음을 알 수 있는데 그 이유는 유동유체의 단위 질량차에 의한 것임을 보여 주고 있다.

(4) 배관 내경의 변화와 고유진동수 변화

배관 내경을 제외한 배관의 기계적 성질은 Table 1과 같고, 20℃물이 외팔형 배관 속을 흐를 때 배관내경을 3/4 D, D(=22.225MM), 1 1/4 D로 변화시켰을 경우 본 논문에서 계산된 결과를 Fig. 6에 나타내었다. 그 결과, 배관 내경이 증가할수록 고유진동수와 임계속도는 증가하지만 다른 배관조건에 비해서는 비교적 적게 영향을 주고 있음을 보여 주고 있다.

(5) 배관두께에 따른 고유진동수 변화

외팔형 배관에서 배관두께를 제외한 배관의 기계적 성질은 Table 1과 같으며, 배관 내경을 일정하게 고정시키고 배관두께를 3/4 D, D(= 1.

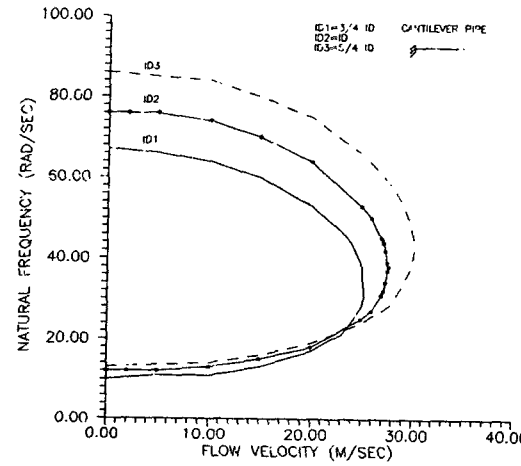

Fig. 6 Natural frequency of cantilever pipe with flow velocity and internal diameter variation

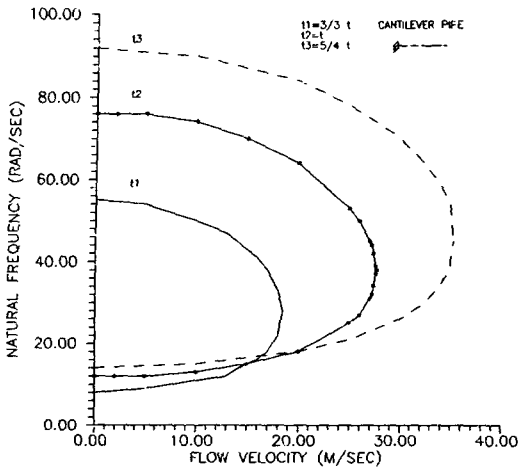

Fig. 7 Natural frequency of cantilever pipe with flow velocity and pipe wall thickness variation

5875MM), 1 1/4D로 변화시켰을 때 본 논문의 계산결과를 Fig. 7에 나타내었다. 그 결과는 배관 두께가 증가할 수록 고유진동수와 임계속도가 증가하게 되는 비교적 큰 영향을 미치는 요소임을 알 수 있다.

4. 결 론

유동유체를 갖는 배관의 운동방정식에 보 이론(beam theory)에서 유도된 변위함수(displacement function)을 도입하고 전달행렬(transfer matrix)법을 적용하여 배관의 각 경계조건 즉, 외팔형(cantilever)배관, 양단 고정 배관, 고정-힌지 배관, 힌지-힌지 배관, 양단자유 배관에서 고유진동수와 임계속도에 대한 계산법을 개발하여 결과를 얻었다.

본 논문의 계산법은 산업계의 배관에서 일반적으로 사용하고 있는 유체속도 0m/sec~15m/sec 사이에서 진동모드 1일때, 실험으로 입증된 Blevins의 계산값과의 오차는 외팔형 배관에서 0%, 고정-힌지 배관에서 2.2%, 양단자유 양단고정배관에서 2.7%, 양단힌지 배관에서 4.8%를 보이고 있어 Coriolis 힘을 무시해도 산업계에서의 유용성은 높다 하겠다. 본 논문의계산법에 의한 계산 결과, 양단고정 배관과 양단자유 배관에서 제일 높은 고유진동수와 임계속도를 나타냈으며 제일 작은 임계속도는 힌지-힌지 배관에서, 제일 낮은 고유진동수는 외팔형 배관에서 나타났다. 또한 외팔형 배관에서는 유체속도가 증가할 때 진동 모드 1과 진동 모드 2가 만나는 특이한 형태의 임계점이 나타남을 알 수 있었다. 배관의 기계적 성질을 일정하게 고정시키고 배관의 길이, 굽힘강성, 두께, 내경, 유동유체 밀도의 변화에서 고유진동수, 임계속도와 유동유체속도와의 관계를 계산 비교한 결과, 배관길이가 짧은 수록, 굽힘강성이 커질수록, 유동유체밀도가 작아질수록, 배관내경이 커질수록, 배관두께가 커질수록 고유진동수와 임계 속도는 증가하였다. 배관길이가 25% 증가할 때 고유 진동수는 약 34%, 임계 속도는 19% 감소하였으며 굽힘강성이 약 100% 증가할 때 고유진동수는 약 100% 증가하여 다른 경계조건에 비하여 상대적으로 고유진동수와 임계속도에 크게 영향을 미침을 보여주었다. 본 논문의 방법을 통하여 배관의 여러 가지 경계조건과 기계적 성질에서 진동 특성을 간단히 계산할 수 있음을 보여 주었으며, 이와 더불어 이 방법은 좌표변환을 통하여 3차원 배관계의 진동 특성 분석에도 이용할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

(1) Housner, G.W., 1952, "Bending Vibrations of a Pipeline Containing Flowing Fluid", ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 19, pp. 205~208.

(2) Benjamin, T.B., 1961, "Dynamics of a System Articulated Pipes Conveying Fluid 1.: Theory", Proceedings of the Royal Society (London) A, Vol. 261, pp. 457~486.

(3) Hannoyer, M.J., and Paidoussis, M.P., 1979, "Dynamics of Slender Tapered Beam with Internal of External Axial Flow. Part 1: Theory", ASME Paper No. 79-AMP-3, June 18~20.

(4) Paidoussis, M.P. and Lssid. N.T., 1974, "Dynamic Stability of Pipes Conveying Fluid", Joural of Sound and Vibration, Vol. 33, pp. 267~294.

(5) Vol'mir, A.S., 1966, "Stability of Elastic Systems", Transl. from Russian Foreign Technology Division, Air Force Systems Command, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio.

(6) Wu, Y.Y., and Raju, P.P., 1974, "Vibration of a Fluid Conveying Pipe Carrying a Discrete Mass", ASME Paper No. 74-PVP-38, Pressure Vessels and Piping Conference, June 24~28.

(7) Chen, S.S., 1971, "Dynamic Stability of Tube Conveying Fluides", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 97, No. EM5, Proc. Paper 8420, pp. 1469~1485.

(8) Paz, M., and Mechelow, J., 1966, "Stiffness Analysis of Network Pipes Conveying Fluid", 3rd International Conference on Pressure Vessel Technology, April 19~22, pp. 143~148.

(9) Blevins, R.D., 1977, "Flow Induced Vibrations", Van Nostrand Reinhold Co.

(10) Blevins, R.D., 1979 "Formulas of Natural Frequency and Mode Shape", Van Nostrand Reinhold Co..

(11) Gregory, R.W., and Paidoussis, M.P., 1966, "Unstable Oscillation of Tubular Cantilevers Conveying Fluid. 1: Theory", Proceedings of the Royal Society(London) A, Vol. 293, pp. 512~527.

(12) Gregory, R.W., and Paidoussis, M.P., 1966. "Unstable Oscillation of Tubular Cantilevers Conveying Fluid 11: Experiments", Proceedings of the Royal Society(London) A, Vol. 293, pp. 528~542.

(13) To, C.W.S., and Kaladi, V.M., 1984, "Vibration of Pipings System Containing a Moving Medium by the Transfer Matrix Method", ASME Paper No. 84 -PVP-30.

(14) Kaladi, V.M., 1984, "Vibration Analysis of Piping System with a Steady Mean Flow", Thesis, The University of Calgary, Canada.

(15) R.W.Gregory, and M.P. Paidoussis, 1966, "Unstable Oscillation of Tabular Cantilevers Conveying Fluid II: Experiment", Proc. Roy. Soc. A, Vol.293, Plate 13.

(16) S.Naguleswaran, and C.J.H. Williams, 1968, "Laternal Vibration of a Pipe Conveying a Fluid", Journal Mechanical Engineering Science, Vol.10, No. 3, pp. 228~238.