

〈論 文〉

## 미분구적법을 이용한 직교이방성 원판의 대변형 해석

이 영 신\* · 박 복 선\*\*

(1990년 7월 24일 접수)

### Large Deflection Analysis of Orthotropic Thin Circular Plates Using Differential Quadrature

Y. S. Lee and B. S. Park

**Key Words :** Differential Quadrature(미분구적법), Orthotropic(직교이방성), Weighting Coefficient(가중계수), Non-Linear(비선형)

#### Abstract

Large deflection behavior of cylindrically orthotropic thin circular plates is investigated by the numerical technique of differential quadrature. Governing equations are derived in terms of transverse deflection and stress function and a Newton-Raphson technique is used to solve the nonlinear systems of equations. For small values of degree of differential quadrature ( $N \leq 13$ ), as the degree of differential quadrature increases, the center deflection converges. However, as  $N$  increases further, the center deflection diverges by ill-conditioning in the weighting coefficients. As the orthotropic parameter increases, the center deflection decreases and behaves linear for the loads. At center, the stress is affected mainly by orthotropic parameter, while the stress is affected mainly by boundary condition at edge.

#### 기 호 설 명

$a$  : 원판의 외경  
 $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}$  : 1차, 2차, 3차 미분에 대한 가중계수  
 $D_r, D_\theta$  : 반경방향, 원주방향의 강성계수  
 $E_r, E_\theta$  : 반경방향, 원주방향의 영률  
 $h$  : 원판의 두께  
 $L$  : 미분 연산자  
 $M_r, M_\theta$  : 반경방향, 원주방향의 합모멘트  
 $n$  : 미분계수  
 $N$  : 미분구적계수  
 $N_r, N_\theta, Q_r$  : 내평면 합응력, 횡전단력  
 $q, p$  : 분포하중의 세기, 중심집중하중  
 $Q, P$  : 무차원 하중

$u, w$  : 반경방향, 횡방향 변위  
 $x_i, x_j$  : 절점  
 $\beta$  : 직교이방성 매개변수  
 $\epsilon_r^\circ, \epsilon_\theta^\circ$  : 중심면의 변형률  
 $\nu_{r\theta}, \nu_{\theta r}$  : 프와송비  
 $\rho, W$  : 무차원 반경, 무차원 횡변위  
 $\sigma_r^b, \sigma_r^m$  : 무차원 굽힘응력 및 막응력  
 $\phi, \psi$  : 응력함수, 무차원 응력함수

#### 1. 서 론

얇은 판의 굽힘 이론은 중심면의 횡변형이 판의 두께에 비하여 작으며 중심면은 굽힘 하에서도 변형이 없다는 Kirchhoff 가설에 기초를 둔 선형이론에서 시작되었으나 실제의 경우 중심면의 횡변형이 판의 두께와 같은 차수이거나 더 큰 경우가 많고

\* 정회원, 충남대학교 공과대학 기계설계공학과

\*\* 정회원, 충남대학교 대학원

이때는 변형이 하중에 대하여 비선형성을 나타내므로 비선형 해석이 필요하게 되었다.

얇은 탄성판의 축대칭 대변형에 대한 편미분 방정식은 Von Karman<sup>(1)</sup>에 의하여 최초로 유도되었으나 연계(coupled) 형태로 인하여 해를 구하기가 어려웠다. Berger<sup>(2)</sup>는 전체 위치에너지(potential energy) 표현식에서 중심면 변형률의 2차 불변량(second invariant)인  $e_2$ 항을 무시하여 판의 대변형 근사해를 구하는 방식을 제시하였다. 이 방식의 이점은  $e_2$ 항을 무시함으로써 연계 형태를 비연계(decoupled)형태로 바꿀 수 있는 것이었으나 이동 가능 끝단 조건에서는 맞지 않는 결과를 초래하였다.

Kamiya<sup>(3)</sup>는 Kirchhoff-Love 가설에서부터 얇은 원판의 축대칭 대변형에 대한 지배방정식을 유도하고 유한차분법을 이용하여 인장 강성계수와 압축 강성계수가 서로 다른(bimodulus) 원판의 대변형 해석을 수행하였으며 Turvey<sup>(4)</sup>는 균일 분포 하중을 받는 등방성 Tapered Annular판의 비선형 해석을 Ritz방식을 이용하여 해를 구하였다.

Banerjee<sup>(5)</sup>는 두께가 지수적으로 변하는 고정단 원판에 대하여 전체 위치에너지 표현식으로부터 변위식으로 표현되는 지배방정식을 유도하고 Galerkin방식을 이용하여 해석한 결과 이동 가능 끝단 조건에서도 잘 맞는 해를 구할 수 있었다.

Srinivasan and Ramachandra<sup>(6)</sup>는 선형해석에서 채택된 유한요소법을 축대칭 하중을 받는 원판의 대변형 해석에 확장하였다. 환형 유한 요소를 채택하였고 Von Karman의 대변형 가정에서 지배방정식을 유도하여 수정 Newton-Raphson 방식을 사용함으로써 Bimodulus원판의 비선형 해석에 유한요소법이 사용될 수 있음을 보여 주었다.

Dumir와 Khatri<sup>(7)</sup>는 두께가 선형적으로 변하는 얇은 원통형 직교이방성 원판에 대하여 횡방향 변위( $w$ )와 응력함수( $\phi$ )의 항으로 표시되는 지배방정식을 유도하고  $w$ 와  $\phi$ 를 유한급수로 전개한 후 직교점 Collocation방식과 Newmark- $\beta$ 방식을 이용하여 축대칭 정적해석 및 천이해석을 수행하였다.

비선형 해석 방법으로는 앞에서 열거한 바와 같이 에너지법, 섭동법, 유한요소법, 일반 수치해석법등이 있으나 수학적으로 너무 복잡하고 많은 계산을 요하는 것으로 알려져 있다. Bellman등<sup>(8,9)</sup>은 기존의 해석방식보다 수학적으로 간단히 비선형문

제를 해석할 수 있는 미분구적법을 제시하였다. 미분구적법은 어떤 한 절점(discrete point)에서 함수의 미분연산값을 다른 모든 절점에서 함수값의 선형가중치합(weighted linear sum)으로 표시하여 미분방정식을 대수방정식으로 변환시키는 방법이다.

Mingle<sup>(10)</sup>은 Transient Nonlinear Diffusion 문제의 해를 구하는데 미분구적법을 이용하였고 Civan등<sup>(11,12)</sup>은 Poisson방정식과 Thomas-Fermi 방정식의 해석에 미분구적법을 적용하였다. Striz 등<sup>(13)</sup>은 반경방향 변위를 4차식으로 가정하고 미분구적법을 이용하여 중심집중하중 및 균일분포하중을 받는 등방성 원판의 축대칭 대변형해석을 수행하여 원판의 비선형 해석에 미분구적법을 적용할 수 있음을 보여주었다.

국내에서는 이낙주<sup>(14)</sup>, 홍창선<sup>(15)</sup>등에 의하여 판의 기하학적 비선형 거동에 대한 연구가 수행된 바 있으나 미분구적법을 적용한 예는 아직 없다.

본 연구에서는 잠수함, 고압용기등에 많이 이용되는 원통형 직교이방성(cylindrically orthotropic) 얇은 원판의 대변형에 관하여 횡방향 변위와 응력함수의 항으로 표시되는 지배 미분방정식을 유도하고 미분구적법을 적용하여 대수방정식으로 변환시켜 Newton-Raphson반복방식으로 수치계산을 수행하고 기존의 연구와 비교하여 본 연구의 유용성을 제시하고자 한다. 또한 미분구적계수 및 직교이방성 매개변수의 영향에 대하여 검토하고 여러가지 직교이방성 재료에 대한 중심변위 및 응력에 대하여 고찰한다.

## 2. 수식화

### 2.1 미분구적법(Differential Quadrature)<sup>(8,9)</sup>

미분구적법이란 주어진 한 절점에서 함수의 미분연산값을 다른 모든 절점에서 함수값의 선형가중치 합(weighted linear sum)으로 근사화하는 방식이다.

미분구적법은 이런면에서 이웃하고 있는 점들만의 함수값으로 표현하는 유한차분법과는 대조된다. 또한 고차유한차분법에서는 Taylor급수전개식으로 표현하는 반면 미분구적법에서는 다항식의 피팅(fitting)이라는 점에서 서로 다른 것이다.

다항식 근사방식을 이용하는 또다른 방식인 가중잔류법(weighted residual method)은 경계 조건에 종속되며 또한 동일 경계 조건으로부터 결정되는

미지계수를 가진 시도 함수를 조절하여 해를 구하는 방식인 반면 미분구적법은 몇개의 선정된 절점에서 다항식 피팅방식을 사용한다. 따라서 미분구적법이 가중잔류법과 가장 크게 다른점은 가중계수 (weighting coefficient)가 경계조건에 무관하며 구분된 요소에 대하여 가중계수를 한번만 구하면 된다는 것이다.

이를 식으로 표시하면  $i$ 번째 절점에서의 미분구적 근사식은 다음과 같다.

$$L\{f(x)\}_j = \sum_{i=1}^N A_{ij} f(x_j) \quad (1)$$

여기서  $L$ 은 미분연산자이고,  $x_j$ 는 변수 영역내에 있는 어떤 절점들이다. 또한  $f(x_j)$ 는 이 절점에서의 함수 값이며  $A_{ij}$ 는 가중계수(weighting coefficients)이다. 가중계수  $A_{ij}$ 를 구하기 위하여는 식 (1)이  $(N-1)$ 보다 작거나 같은 계수(degree)의 다항식 등급(class)에서 엄밀해야 한다. 따라서 이 시도함수를 다음식과 같이 놓을 수 있다.

$$f_k(x) = x^{k-1} \quad k=1, 2, \dots, N \quad (2)$$

만약 미분연산자  $L$ 이  $n$ 차 미분식으로 표시된다면 식 (2)를  $n$ 번 미분하여 식 (1)에 대입하면 다음의 관계를 얻는다.

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} x_j^{k-1} = (k-1)(k-2)\dots(k-n)x_i^{(k-n-1)} \quad i=1, 2, \dots, N \quad k=1, 2, \dots, N \quad (3)$$

식 (3)은  $N$ 개의 선형연립 대수방정식의  $N$ 개의 집합을 나타낸다.  $x_j$ 가 각각 다른 점이므로 식 (3)은 행렬식 요소  $x_j^{k-1}$ 이 Vandermonde행렬식을 구성하고 가중계수  $A_{ij}$ 에 대하여 유일해(unique solution)를 가지며 Vandermonde 매트릭스의 역행렬 Hamming<sup>(16)</sup>에 의하여 제시된 바와 같이 해석적으로 구해진다.

이렇게 구한 가중계수는 식 (1)에 대입하면 한 절점에서 함수의 미분 연산값을 다른 모든 절점에서 함수값의 합으로 표시되는데 사용된다. 여기서 미분구적법의 계수 ( $N$ )는 제일 높은 편미분 계수보다 커야하는 점에 유의해야 한다. 즉  $N > n$ 이어야 한다.

### 2.2 지배방정식

본 연구에서 해석하고자 하는 모델은 반경이  $a$ 이고 두께가  $h$ 인 원통형 직교이방성 원판에 중심 집중하중  $p$ 와 분포하중  $q(r)$ 이 작용하는 경우이

다.

회전축에 대칭 변형인 경우 응력과 변위는 각  $\theta$ 와는 무관하며 물체력(body force)이 없는 경우 감쇠 및 회전 관성력을 무시하면 내평면 힘의 평형방정식은

$$(rN_r)_{,r} - N_\theta = 0 \quad (4)$$

모멘트 평형방정식은

$$(rM_r)_{,r} - M_\theta - rQ_r = 0 \quad (5)$$

반경  $r$ 내부에서의 횡방향 힘의 평형방정식은

$$rQ_r + rN_r w_{,r} + \frac{p}{2\pi} + \int_0^r r q(r) dr = 0 \quad (6)$$

반경방향과 접선방향의 변위-변형률 관계식은

$$\epsilon_r^\circ = u_{r,r} + 1/2(w_{,r})^2 \quad (7)$$

$$\epsilon_\theta^\circ = u_r/r \quad (8)$$

여기서  $\epsilon_r^\circ$ ,  $\epsilon_\theta^\circ$ ,  $u_r$ ,  $w$ 은 중심면에서의 변형률 및 변위이다.

일반화된 Hooke의 법칙에 의하여 내평면 변형률과 내평면력과의 관계는

$$\epsilon_r^\circ = \frac{N_r}{E_r h} - \frac{\nu_{or}}{E_\theta h} N_\theta \quad (9)$$

$$\epsilon_\theta^\circ = \frac{N_\theta}{E_\theta h} - \frac{\nu_{ro}}{E_r h} N_r \quad (10)$$

굽힘모멘트는

$$M_r = -D_r(w_{,rr} + \frac{\nu_{or}}{r} w_{,r}) \quad (11)$$

$$M_\theta = -D_\theta(\nu_{ro} w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r}) \quad (12)$$

여기서  $D_r$ ,  $D_\theta$ 는 굽힘강성이며

$$D_r = \frac{E_r h^3}{12(1-\nu_{ro}\nu_{or})}, \quad D_\theta = \frac{E_\theta h^3}{12(1-\nu_{or}\nu_{ro})} \quad (13)$$

식 (5)와 식 (6)을 결합하면

$$M_\theta - (rM_r)_{,r} = rN_r w_{,r} + \frac{p}{2\pi} + \int_0^r r q(r) dr \quad (14)$$

식 (7)~식 (10)에서  $\epsilon_r^\circ$ ,  $\epsilon_\theta^\circ$  및  $u_r$ 을 소거하여 식 (4)에 대입하면 다음과 같은 적합방정식을 얻을 수 있다.

$$[r(rN_r)_{,r}]_{,r} - \beta N_r = -1/2 E_\theta h (w_{,r})^2 \quad (15)$$

여기서  $\beta$ 는 직교이방성 매개변수로서

$$\beta = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{\nu_{or}}{\nu_{ro}} \quad (16)$$

여기서 다음식과 같이 정의되는 응력함수  $\phi$ 를<sup>(9)</sup> 도입하고

$$N_r = \phi/r, \quad N_\theta = \phi_{,r} \quad (17)$$

식 (11), (12)와 응력함수를 적용하면 식 (14)의 지배방정식 및 식 (15)의 적합방정식은 각각

$$r^2 w_{,rrr} + r w_{,rr} - \beta w_{,r} - \frac{r}{D_\theta} \phi w_{,r} = \frac{r}{D_\theta} \left[ \frac{p}{2\pi} + \int_0^r r q(r) dr \right] \quad (18)$$

$$r^2 \phi_{,rr} + r \phi_{,r} - \beta \phi + 1/2 r h E_\theta (w_{,r})^2 = 0 \quad (19)$$

식 (18) 및 (19)가 본 문제의 지배방정식이다.

다음과 같은 무차원 변수를 도입하면

$$W = \frac{w}{h}, \quad \psi = \frac{a\phi}{D_\theta}, \quad \rho = \frac{r}{a} \quad (20)$$

$$Q = \frac{qa^4}{E_r h^4}, \quad P = \frac{pa^2}{E_r h^4}$$

지배방정식 (18)과 (19)는

$$\rho^2 W_{,\rho\rho\rho} + \rho W_{,\rho\rho} - \beta W_{,\rho} - \rho W_{,\rho} \psi = \rho \left[ \frac{6(\beta - \nu_{\theta r}^2)}{\pi\beta} P + \int_0^\rho \frac{12(\beta - \nu_{\theta r}^2)}{\beta} Q \rho d\rho \right] \quad (21)$$

$$\rho^2 \psi_{,\rho\rho} + \rho \psi_{,\rho} - \beta \psi + 6(\beta - \nu_{\theta r}^2) \rho (W_{,\rho})^2 = 0 \quad (22)$$

과 같이 무차원화 되며

완전고정 조건 (clamped)에 대한 경계조건 및 정규 조건은

$$W_{,\rho}(0) = 0, \quad \psi(0) = 0 \quad \text{at} \quad \rho = 0 \quad (23)$$

$$W(1) = 0, \quad \psi_{,\rho}(1) - \nu_{\theta r} \psi(1) = 0, \quad W_{,\rho}(1) = 0$$

at  $\rho = 1$

단순지지 (simply supported)에 대한 경계조건 및 정규 조건은

$$W_{,\rho}(0) = 0, \quad \psi(0) = 0 \quad \text{at} \quad \rho = 0 \quad (24)$$

$$W(1) = 0, \quad \psi_{,\rho}(1) - \nu_{\theta r} \psi(1) = 0, \quad \text{at} \quad \rho = 1$$

$$W_{,\rho\rho}(1) + \nu_{\theta r} W_{,\rho}(1) = 0 \quad \text{at} \quad \rho = 1$$

막응력 (membrane stress) 및 굽힘 응력 (bending stress)은<sup>(17)</sup>

$$\sigma_r^* = \frac{N_r}{h}, \quad \sigma_r^{*b} = \frac{12M_r}{h^3} z \quad (25)$$

이에 대한 무차원 막응력 및 굽힘 응력은

$$\sigma_r^m = \left(\frac{a}{h}\right)^2 \frac{\sigma_r^*}{E_r}$$

$$\sigma_r^b = \left(\frac{a}{h}\right)^2 \frac{\sigma_r^{*b}(h/2)}{E_r} \quad (26)$$

### 2.3 계산 방식

지배방정식 (21) 및 (22)에 2.1절에서의 미분구적법을 적용하면

$$\rho_i^2 \sum_{j=1}^N C_{ij} W_j + \rho_i \sum_{j=1}^N B_{ij} W_j - \beta \sum_{j=1}^N A_{ij} W_j - \rho_i \psi_i \sum_{j=1}^N A_{ij} W_j - \rho_i \left[ \frac{6(\beta - \nu_{\theta r}^2)}{\pi\beta} P + \int_0^{\rho_i} \frac{12(\beta - \nu_{\theta r}^2)}{\beta} Q \rho d\rho \right] = 0 \quad (27)$$

$$\rho_i^2 \sum_{j=1}^N B_{ij} \psi_j + \rho_i \sum_{j=1}^N A_{ij} \psi_j - \beta \psi_i$$

$$+ 6(\beta - \nu_{\theta r}^2) \rho_i \left( \sum_{j=1}^N A_{ij} W_j \right)^2 = 0 \quad (28)$$

여기서  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $C_{ij}$ 는 각각 1차 미분식, 2차 미분식, 3차 미분식에 대한 가중계수 (weighting coefficients)이다.

경계조건은 완전고정단에 대하여는

$$W_N = 0$$

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} W_j = 0$$

$$\psi_i = 0 \quad (29)$$

$$\sum_{j=1}^N A_{(N-1)j} \psi_j - \nu_{\theta r} \psi_N = 0$$

$$\sum_{j=1}^N A_{(N-1)j} W_j = 0$$

단순지지에 대하여는

$$W_N = 0$$

$$\sum_{j=1}^N A_{1j} W_j = 0$$

$$\psi_i = 0 \quad (30)$$

$$\sum_{j=1}^N A_{(N-1)j} \psi_j - \nu_{\theta r} \psi_N = 0$$

$$\sum_{j=1}^N B_{(N-1)j} W_j + \nu_{\theta r} \sum_{j=1}^N A_{(N-1)j} W_j = 0$$

지배방정식 (27)과 (28)은  $2N$ 개의 비선형 대수 방정식을 구성하며 이중에서 경계조건에 해당되는 5개의 식을 삭제하고 경계조건식 5개를 포함하면 미지수  $2N$ 개, 방정식  $2N$ 개인 비선형 대수방정식을 얻는다. 이 대수방정식을 Newton-Raphson 반복방식으로 해를 구한다.

### 3. 수치계산 및 결과고찰

Fig. 1은 미분구적 계수 (degree of differential quadrature)의 변화에 따른 무차원 중심변위 (normalized center deflection)의 변화를 나타낸 것이다. 이때의 경계조건은 단순지지 및 고정단이며 하중은 판의 중심에 중심하중 ( $P=10$ )이 작용할 때이다. Fig. 1은  $N$ 값이 증가하면 중심변위는 일정값에 근접하다가  $N$ 이 13 또는 14보다 커지면 발산하는 것을 보여준다. 이것은 Civan<sup>(19,20)</sup>이 지적한 바와 같이  $N$ 가 커질수록 가중계수의 값이 너무 커져서 산술계산시 주요 digit의 손실에 의한 Truncate error의 증가에 의한 것으로 판단된다. 따라서 본 연구에서는  $N=13$ 의 값을 사용하였다.

Fig. 2 및 Fig. 3은 하중조건 (중심집중하중) 및

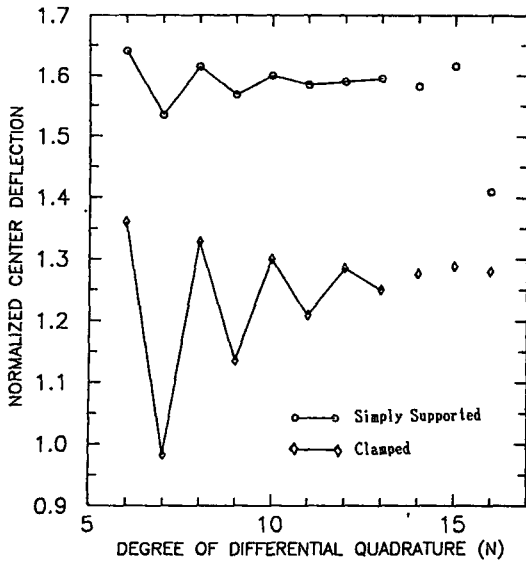


Fig. 1 Effect of degree of differential quadrature ( $\beta=1, \nu_{or}=0.3, P=10$ )

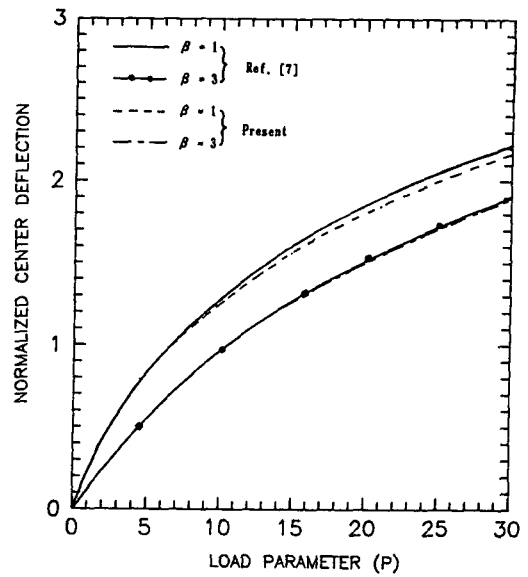


Fig. 3 Normalized center deflection of clamped plate under concentrated load at center ( $\beta=1, \beta=3, \nu_{or}=0.3$ )

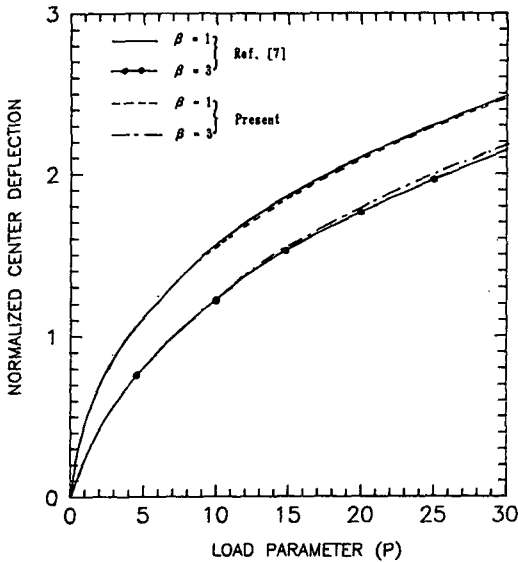


Fig. 2 Normalized center deflection of simply supported plate under concentrated load at center ( $\beta=1, \beta=3, \nu_{or}=0.3$ )

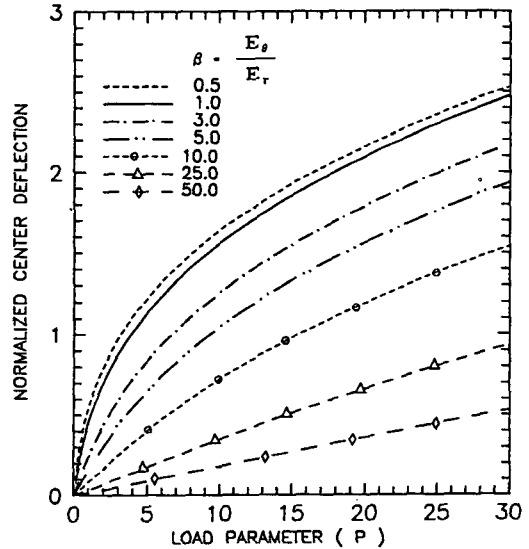


Fig. 4 Effect of orthotropic parameter for simply supported plate under concentrated load at center with various orthotropic parameter ( $\nu_{or}=0.3$ )

경계조건(고정단, 단순지지단)에 대한 무차원 중심 변위의 변화를 Collocation방법을 이용한 기존의 연구결과<sup>(7)</sup>와 비교한 것이다. 본 연구 결과와 기존의 연구 결과가 매우 잘 일치하는 것으로 보아 본

연구의 유용성을 확인할 수 있다. 이때  $\nu_{or}$ 은 0.3,  $\beta$ 는 1(등방성) 및 3으로 계산하였다.

Fig. 4에서는 직교이방성 매개변수(orthotropic parameter)의 영향을 검토하였다. 경계조건은 단

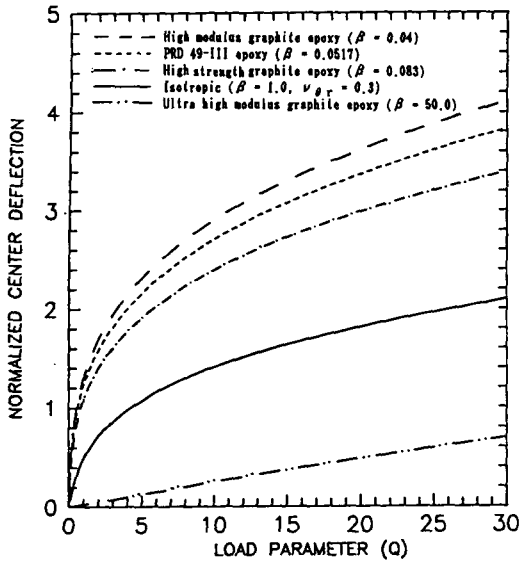


Fig. 5 Normalized center deflection of simply supported plate under uniformly distributed load for various orthotropic materials

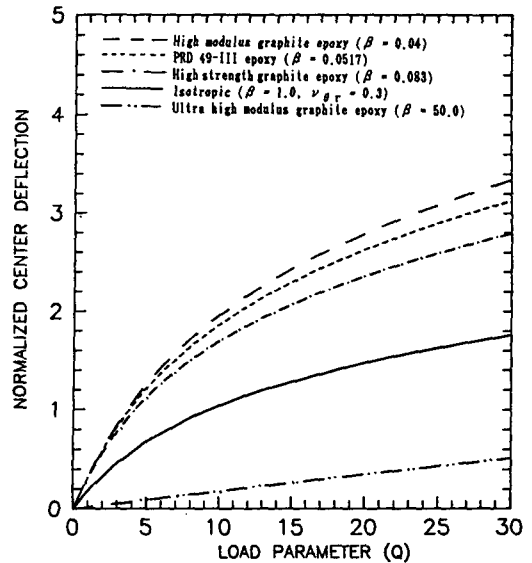


Fig. 6 Normalized center deflection of clamped plate under uniformly distributed load for various orthotropic materials

Table 1 Material properties for various orthotropic materials

Materials	Material properties	Orthotropic parameter ( $\beta$ )	Poisson's ratio ( $\nu_{or}$ )
High Modulus Graphite Epoxy		0.04	0.012
PRD 49- III Epoxy		0.0517	0.0155
High Strength Graphite Epoxy		0.083	0.0244
Ultra High Modulus Graphite Epoxy (inverted)		50.0	0.26

순지지이며 작용하중은 중심에 집중하중이 작용할 때이다. Fig. 4에서는 직교이방성 매개변수가 증가함에 따라 중심변위는 감소함을 알 수 있다. 또한 직교이방성 매개변수값이 커질수록 하중에 대하여 중심변위가 선형적으로 변하는 경향을 가짐을 알 수 있다.

Fig. 5 및 Fig. 6은 여러가지 직교이방성 재료에 대한 중심변위의 변화를 나타낸다. 하중으로는 균일분포하중 경계조건으로는 단순지지 및 고정단의 경우이다. 여기에 사용된 재료상수는 참고문헌 (21)에서 인용하였으며 Table 1과 같다.

Fig. 5 및 Fig. 6에서도 직교이방성 매개변수가 클수록 중심변위는 작아짐을 알 수 있다. 또한

Ultra High Modulus Graphite Epoxy (inverted)는 High Modulus Graphite Epoxy의 섬유방향을 반대로 한 것으로 같은 재료라 할지라도 섬유의 방향에 따라서 변형을 매우 작게 할 수 있다는 것을 보여 준다.

Fig. 7부터 Fig. 10까지는 무차원화된 반경 방향의 막응력과 굽힘 응력의 변화를 보여준다.

Fig. 7 및 Fig. 8은 중심에서의 굽힘 응력의 변화를 나타낸 것으로 하중이 작은 영역에서는 단순지지 경우가 더 큰 응력을 보여주나 일정값 이상에서는 고정단의 경우가 응력이 더 크음을 알 수 있다. 또한 직교이방성 매개변수의 값이 클수록 작은 응력을 나타낸다. Fig. 9 및 Fig. 10은 경계단에서의

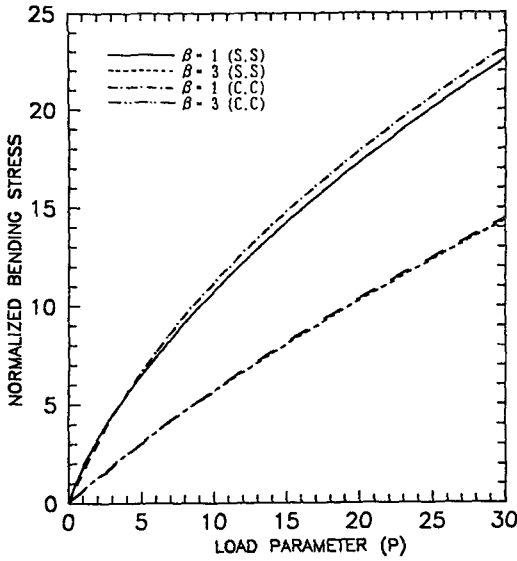


Fig. 7 Variation of normalized radial bending stress at center under concentrated load at center with clamped and simply supported boundary conditions ( $\beta=1, \beta=3, \nu_{or}=0.3$ )

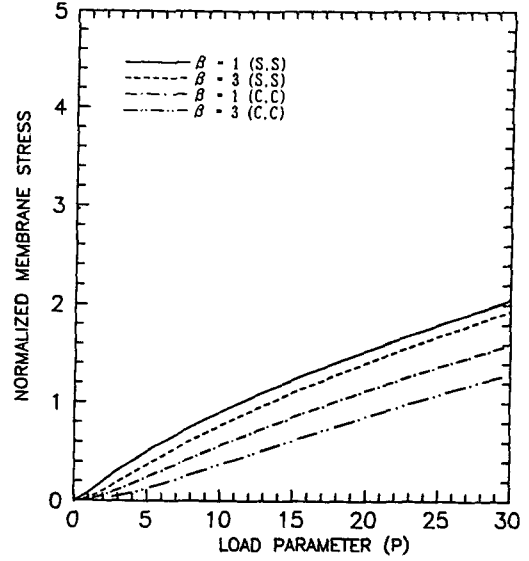


Fig. 9 Variation of normalized radial membrane stress at edge under concentrated load at center with clamped and simply supported boundary conditions ( $\beta=1, \beta=3, \nu_{or}=0.3$ )

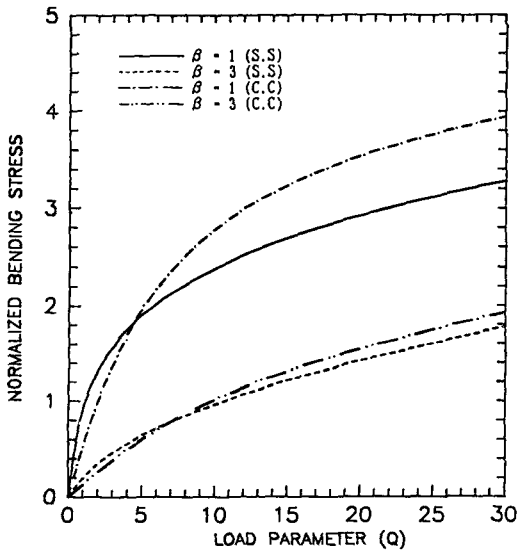


Fig. 8 Variation of normalized radial bending stress at center under uniformly distributed load with clamped and simply supported boundary conditions ( $\beta=1, \beta=3, \nu_{or}=0.3$ )

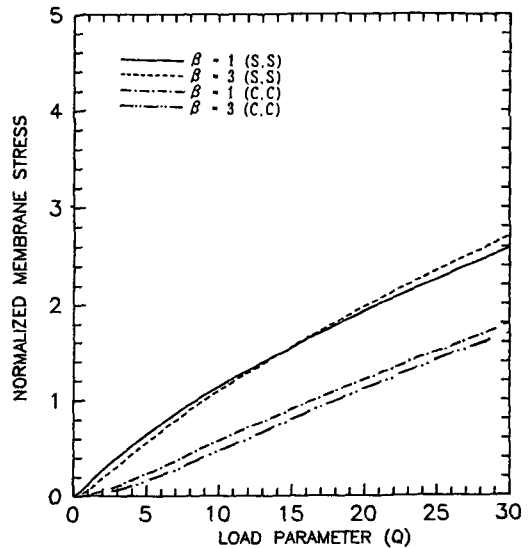


Fig. 10 Variation of normalized radial membrane stress at edge under uniformly distributed load with clamped and simply supported boundary conditions ( $\beta=1, \beta=3, \nu_{or}=0.3$ )

막응력의 변화를 표시한 것으로 단순지지인 경우가 완전고정인 경우 보다 큰 응력을 보여준다.

Fig. 7부터 Fig. 10까지의 결과에서 고찰해보면

응력은 중심에서는 직교이방성 매개변수 영향이 더 크고 경계단에서는 경계조건의 영향이 더 큰 것을 알 수 있다.

## 4. 결 론

본 연구에서는 원통형 직교이방성 얇은 원판의 대변형 해석을 수행하였다. 횡방향 변위와 응력합수의 항으로 표시되는 비선형 지배미분방정식을 유도하고 미분구적법을 이용하여 비선형 대수방정식으로 변환시켜 Netwon-Raphson 반복 방식으로 해를 구한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 미분 구적 계수가 커질수록 중심변위는 일정값에 수렴하다가 미분 구적 계수가 일정값 (13 또는 14) 보다 커지면 가중계수의 ill-conditioning 때문에 발산한다.

(2) Collocation 방법을 이용한 기존의 연구결과<sup>(7)</sup>와 비교하여 좋은 일치율을 보여 원판의 비선형해석에 미분구적법 적용의 유용성을 확인하였다.

(3) 직교이방성 매개변수가 커질수록 중심변위는 감소하며 또한 하중에 대하여 선형적으로 변하는 경향을 갖는다.

(4) 막응력 및 굽힘응력은 중심에서 직교이방성 매개변수의 영향이 크고 경계단에서는 경계조건의 영향이 크다.

## 참 고 문 헌

- (1) Von Karman, 1910, *Encyklopadie der Mathematischen Wissenschaften*, Vol. IV, p. 349.
- (2) Berger, H.M., 1955, "A New Approach to an Analysis of Large Deflection of Plates", *Transactions of the ASME, J. of Applied Mechanics*, Vol.22, pp. 465~472.
- (3) Kamiya, N., 1975, "Large Deflection of Different Modulus Circular Plates", *Transactions of the ASME, J. of Engineering Materials and Technology*, Vol.97, pp. 52~56.
- (4) Turvey, G.J., 1978, "Large Deflection of Tapered Annular Plates by Dynamic Relaxation", *Proc. of ASCE, J. of Engng. Mech. Div.* Vol.104, pp. 351~366.
- (5) Banerjee, B., 1983, "Large Deflections of Circular Plates of Variable Thickness", *Int. J. of Solids and Structures*, Vol.19, pp. 179~182.
- (6) Srinivasan, R.S. and Ramachandra, L.S., 1989, "Large Deflection Analysis of Bimodulus Annular and Circular Plates Using Finite Element", *J. of Computers and Structures*, Vol.31, pp. 681~691.
- (7) Durnir, P.C. and Khatri, K.N., 1985, "Nonlinear Axisymmetric Static and Transient Analysis of Orthotropic Thin Tapered Circular Plates", *J. of Computers and Structures*, Vol.2, No.5, pp. 1001~1012.
- (8) Bellman, R.E. and Casti, J., 1971, "Differential Quadrature and Long-term Integration", *J. of Mathematical Analysis and Application*, Vol.34, pp. 235~238.
- (9) Bellman, R.E., Kashef, B.G. and Casti, J., 1972, "Differential Quadrature; A Technique for the Rapid Solution of Nonlinear Partial Differential Equations", *J. of Computational Physics*, Vol.10, pp. 40~52.
- (10) Mingle, J.O., 1977, "The Method of Differential Quadrature for Transient Nonlinear Diffusion", *J. of Mathematical Analysis and Application*, Vol.60, pp. 559~569.
- (11) Civan, F. and Sliepcevich, C.M., 1983, "Solution of Poisson Equation by Differential Quadrature", *Int. J. of Numer. Methods Eng.*, Vol.19, pp. 711~724.
- (12) Civan, F. and Sliepcevich, C.M., 1984, "On the Solution of the Thomas-Fermi Equation by Differential Quadrature", *J. of Computational Physics*, Vol.56, pp. 343~348.
- (13) Striz, A.G., Jang, S.K. and Bert, C.W., 1988, "Nonlinear Bending Analysis of Thin Circular Plate by Differential Quadrature", *J. of Thin-Walled Structures*, Vol.6, pp. 51~62.
- (14) 김지환, 이낙주, 1989, "횡방향 전단변형과 수직 변형을 고려한 기하학적 비선형 판이론", *한국항공우주학회지*, 제 3 호, pp. 36~44.
- (15) 전완주, 홍창선, 1989, "전단 변형률을 고려한 비대칭 Cross-Ply 적층판의 대칭적 거동해석", *한국항공우주학회지*, 제17권, 제 1 호, pp. 47~55.
- (16) Hamming, R.W., 1973, *Numerical Methods for Scientists and Engineers*, Second Ed., McGraw-Hill, New York.
- (17) Chia, C.Y., 1980, "Nonlinear Analysis of Plates", McGraw-Hill, New York.
- (18) Press, W.H. et al., 1986, "Numerical Recipes: the Art of Scientific Computing", Cambridge University Press.
- (19) Civan, F. and Sliepcevich, C., 1983, "Application of Differential Quadrature to Transport Processes", *J. of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 93, pp. 206~221.
- (20) Civan, F. and Sliepcevich, C.M., 1984, "Differential Quadrature for Multi-Dimensional Problems", *J. of Mathematical Analysis and Applications*, Vol.



- 101, pp. 423~443.
- (21) Narita, Y., 1984, "Natural Frequencies of Completely Free Annular and Circular Plates Having Polar Orthotropy", J. of Sound and Vibration, Vol. 92, pp. 33~38.
- (22) Timoshenko, S. and Voinowsky-Krieger, S., 1959, "Theory of Plates and Shells", McGraw-Hill, New York.
- (23) Fung, Y.C., 1965, "Foundations of Solid Mechanics", Prentice-Hall.
- (24) Jones, R.M., 1975, "Mechanics of Composite Materials", McGraw-Hill, New York.