

〈論 文〉

Mindlin 판의 강성 과잉 현상과 고유치에 관한 연구

김용우* · 박춘수* · 민옥기**

(1990년 12월 11일 접수)

Study on the Stiffness Locking Phenomenon and Eigen Problem in Mindlin Plate

Yong-Woo Kim, Choon-Soo Park and Oak-Key Min

Key Words : Stiffness Locking Phenomenon(강성 과잉 현상), True Constraint(진성 구속), Spurious Constraint(가성 구속), Modified Shape Function(수정 형상 함수), Modified Strain(수정 변형률), Gauss-Legendre Mass Matrix(가우스-르장드르 질량 행렬), Gauss-Lobatto Mass Matrix(가우스-로바토 질량 행렬), Spurious Rigid Body Motion(가성 강체 운동), Rank Deficiency(랭크 부족 현상)

Abstract

In this thesis, Mindlin plate element with nine nodes and three degrees-of-freedom at each node is formulated and is employed in eigen-analysis of a rectangular plates in order to alleviate locking phenomenon of eigenvalues. Eigenvalues and their modes may be locked if conventional C_0 -isoparametric element is used. In order to reduce stiffness locking phenomenon, two methods(① the general reduced and selective integration, ② the new element that use of modified shape function) are studied. Additionally in order to reduce the error due to mass matrix, two mass matrices(① Gauss-Legendre mass matrix, ② Gauss-Lobatto mass matrix) are considered. The results of eigen-analysis for two models(the square plate with all edges simply-supported and all edges built-in), computed by two methods for stiffness matrix and by two mass matrices are compared with theoretical solutions and conventional numerical solutions. These comparisons show that the performance of the two methods with Gauss-Lobatto mass matrix is better than that of the conventional plate element. But, by considering the spurious rigid body motions, the element which employs modified shape function with full integration and Gauss-Lobatto mass matrix can elevate the accuracy and convergence of numerical solutions.

1. 서 론

판의 굽힘 문제에 유한 요소법을 적용하는 경우 Kirchhoff의 얇은 판 이론(CTPT : classical thin

plate theory)은 인접 요소 사이에 기울기가 연속 이어야 한다는 C_1 -연속 조건을 요구하므로 여러가지 문제점들을 야기시킨다. 이러한 문제점의 해결을 위해 C_0 -연속 조건만을 요구하는 Mindlin의 판 이론(MPT : Mindlin plate theory)이 널리 사용되고 있다^(1~6). C_0 -연속 형태의 문제는 수치화 과정이 간단해질 뿐만 아니라 전단 변형에 의한 변위

* 정회원, 연세대학교 대학원

** 정회원, 연세대학교 공과대학 기계공학과

및 전단력을 계산할 수 있는 잇점이 있다. 그러나 C_0 -연속 요소는 판의 두께가 얇아짐에 따라 요소의 전단 강성이 실제값보다 크게 계산되어 변위 및 응력에 큰 오차를 발생시킨다. 이와 같은 현상을 강성 과잉(stiffness locking)현상이라 하며 1970년대 이후로 이러한 현상을 극복하고자 하는 노력이 경주되어 오고 있다.

판의 강성 과잉 현상을 해결하기 위해 연구된 대표적인 방법으로 감차 또는 선별 적분법(reduced or selective integration method)과 혼합 방법(hybrid and mixed method) 등이 있다^(1,7). 혼합 방법은 강성 행렬(stiffness matrix)을 유도하는 수식화 과정이 통상의 변위 함수(displacement function)를 이용하여 수식화 하는 과정과 많은 차이를 보이며 수식화 과정이 다소 복잡하다. 감차 적분 또는 선별 적분에 의한 방법은 완전 적분(full integration)을 하지 않는 방법으로 강성 과잉 현상을 해결하고 있으며, 선별 적분은 적분점(integration point)을 각 항에 따라 선별적으로 지정해 주어야 하므로 수식화 및 프로그래밍(programming)이 복잡해진다는 단점이 있다.

최근에 Prathap등⁽⁸⁻¹⁰⁾은 곡선보 요소의 강성 과잉 현상을 해결하기 위해 각 변형률에 포함되는 변위에 대한 내삽함수의 구속상태를 조사하고, 실제의 구속인 진성 구속(true constraint)과 강성 과잉 현상을 유발시키는 가성 구속(spurious constraint)으로 분류한 후 가성 구속이 나타나지 않도록 하는 수정 형상 함수(modified shape function)를 사용하는 방법을 제시하였다.

본 논문에서는 강성에 관련된 변위 및 응력뿐만 아니라 고유치 및 고유 진동형에도 역시 강성 과잉 현상이 일어날 수 있으므로, Prathap등이 제시한 방법을 판 요소에 확장 적용하여 구한 수정 형상 함수⁽¹¹⁾를 사용하는 방법과 감차 적분 또는 선별 적분을 사용하는 방법으로 강성 행렬을 계산하며, 또한 질량 행렬로는 가우스-르장드르 질량 행렬(Gauss-Legendre mass matrix) 및 가우스-로바토 질량 행렬(Gauss-Lobatto mass matrix)을 각각 사용하여, 4변 단순지 판과 4변 고정 판에 대해 고유치 해석을 실시한다. 이로써 판의 고유치 해석에서 강성 과잉 현상을 해결하는 두가지 방법의 타당성을 검토하고, 상호 비교하여 수치해의 정확도 및 수렴성을 향상 시키기 위한 강성 및 질량 행렬 계산 방법을 제시한다. 본 논문에서 사용하는 판 요

소는 Serendipity 계열보다 수렴성이 좋은 Lagrangian 계열의 9-절점 사각형판 요소이다^(11,12).

2. 본 론

2.1 Mindlin 판 요소의 수식화

Mindlin 판의 한 점에서의 변위들은⁽¹³⁾

$$\begin{Bmatrix} W(x, y, z) \\ U(x, y, z) \\ V(x, y, z) \end{Bmatrix} \quad (1)$$

로 표시되며 식 (1)의 좌변의 W, U, V 는 각각 z, x, y 방향의 변위이고, 우변의 z 는 중립면으로부터 판의 두께 방향 좌표이다. 또한 Fig. 1에 보인 바와 같이 식 (1)의 우변의 w, θ_x 및 θ_y 는 처짐 및 xz, yz 평면에서의 각각 평균 회전각이다.

두께가 h 인 판의 운동에너지 T 는⁽¹⁴⁾

$$T = \frac{1}{2} \iint_A \left\{ \rho h \left[\frac{\partial w}{\partial t} \right]^2 + \frac{\rho h^3}{12} \left[\frac{\partial \theta_x}{\partial t} \right]^2 + \frac{\rho h^3}{12} \left[\frac{\partial \theta_y}{\partial t} \right]^2 \right\} dA \quad (2)$$

이고, ρ 는 단위 부피당의 질량이다.

또한 판의 변형 에너지 U 는⁽¹⁴⁾

$$U = \frac{1}{2} \iint_A \left\{ D(\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + 2\nu\epsilon_x\epsilon_y) + \frac{h^3 G}{12} (\gamma_{xy})^2 + ahG[(\phi_x)^2 + (\phi_y)^2] \right\} dx dy \quad (3)$$

이다. 여기서

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, $\alpha = \frac{5}{6}$ (전단 보정 계수), E 는 종탄성계수, ν 는 프와송비이고, 변형률은 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= -\theta_{x,x}, & \epsilon_y &= -\theta_{y,y}, & \gamma_{xy} &= -(\theta_{x,y} + \theta_{y,x}), \\ \phi_x &= (w_{,x} - \theta_x), & \phi_y &= (w_{,y} - \theta_y) \end{aligned}$$

Mindlin판의 고유 진동수(natural frequency)와 고유 진동형(natural mode shape)을 구하기 위해 자유진동 문제를 고려한다. 외력에 의한 일이 없는

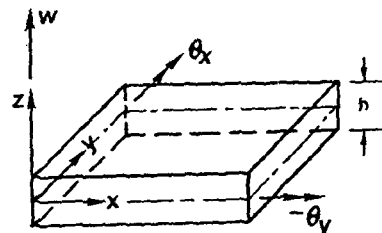


Fig. 1 Convention of notation

경우 Hamilton의 원리는

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T-U) dt = 0 \quad (4)$$

이다. 식 (2)의 운동 에너지와 식 (3)의 변형 에너지를 식 (4)에 대입하고, 운동 에너지항을 시간에 대하여 부분적분하여 정리하면

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \iint_A \left[\rho h \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] \delta w + \frac{\rho h^3}{12} \left[\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \right] \delta \theta_x \right. \\ & \quad \left. + \frac{\rho h^3}{12} \left[\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \right] \delta \theta_y \right] \\ & \quad + D [\theta_{x,x} \delta \theta_{x,x} + \nu \theta_{x,x} \delta \theta_{y,y}] \\ & \quad + D [\theta_{y,y} \delta \theta_{y,y} + \nu \theta_{y,y} \delta \theta_{x,x}] \\ & \quad + \frac{Gh^3}{12} (\theta_{x,y} + \theta_{y,x}) (\delta \theta_{x,y} + \delta \theta_{y,x}) \\ & \quad + ahG [(w_{,x} - \theta_x) (\delta w_{,x} - \delta \theta_x)] \\ & \quad \left. + ahG [(w_{,y} - \theta_y) (\delta w_{,y} - \delta \theta_y)] \right] dA dt \\ & = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

으로 된다.

한편, 절점에서 정의되는 변위를 벡터로 표시하면

$$U_i = \{w_i \ \theta_{xi} \ \theta_{yi}\}^T \quad i=1, 2, \dots, n \quad (6)$$

이고, 요소에서의 변위는 다시 벡터로 표시하면

$$U = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}^T \quad (7)$$

이고, 여기서 n 은 절점의 수이다.

따라서 요소에서의 가속도는

$$\dot{U} = \{\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dots, \dot{U}_n\}^T \quad (8)$$

로 표시할 수 있고, 여기서

$$\dot{U}_i = \{\dot{w}_i, \dot{\theta}_{xi}, \dot{\theta}_{yi}\}^T \quad i=1, 2, \dots, n \quad (9)$$

이다.

이제 자유도 w , θ_x , θ_y 를 Lagrangian 형상 함수 N_i 를 사용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} w &= \sum_{i=1}^n N_i w_i \\ \theta_x &= \sum_{i=1}^n N_i \theta_{xi} \\ \theta_y &= \sum_{i=1}^n N_i \theta_{yi} \end{aligned} \quad (10)$$

또한 각 자유도의 x , y 에 대한 도함수, 각 자유도의 시간 t 에 대한 2차 도함수를 식 (10)을 사용하여 구하고 이를 식 (5)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 식의 형태를 얻는다.

$$M\ddot{U} + KU = 0 \quad (11)$$

이다. 여기서 요소 강성 행렬 K 는

$$K = \sum_{i,j=1}^n K_{ij} \quad (12)$$

이며, 요소 강성 행렬의 원소 K_{ij} 는

$$K_{ij} = \iint_A B_i^T D B_j dA \quad (13)$$

이다. 여기서 탄성 행렬 D 는

$$D = \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 & 0 & 0 \\ \nu D & D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Gh^3}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ahG & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ahG \end{bmatrix} \quad (14)$$

이고, 변형률 행렬 B_i 는

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 & -N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & -N_{i,y} \\ 0 & -N_{i,y} & -N_{i,x} \\ N_{i,x} & -N_i & 0 \\ N_{i,y} & 0 & -N_i \end{bmatrix} \quad (15)$$

이다.

그리고, 질량 행렬 M 은

$$M = \sum_{i,j=1}^n M_{ij} \quad (16)$$

이며, 요소 질량 행렬의 원소 M_{ij} 는

$$M_{ij} = \iint_A N_i^T P N_j dA \quad (17)$$

이다. 여기서 행렬 N_i 및 관성 행렬 P 는

$$N_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$P = \begin{bmatrix} \rho h & 0 & 0 \\ 0 & \rho h^3/12 & 0 \\ 0 & 0 & \rho h^3/12 \end{bmatrix} \quad (19)$$

이다.

2.2 수정 형상 함수의 유도

(1) 수정 형상 함수의 유도⁽¹¹⁾

판 요소에서 강성 과잉 현상은 판의 두께 대 길이의 비가 작은 경우에 Kirchhoff의 이론을 적용하면 전단 변형 에너지가 없어야 하나, 가성 구속에 의한 전단 변형이 수반되어 가성 변형 에너지가 발생한다. 이러한 판 요소의 강성 과잉 현상을 해결하기 위해 전단 변형률에 대한 처짐 및 회전각을 전통적인 내삽함수 (w , θ_x , θ_y)로 표시하고 그 내삽함수를 사용하여 전단 변형 에너지를 계산한 후, 전단 변형 에너지가 없는 경우에 불필요한 변형이 나타나지 않도록 하기 위해서 내삽함수의 계수가 만족해야 하는 구속 상태를 도출하여 그 구속을 진

성 구속과 가상 구속으로 분류한다. 진성 구속은 각 변형률에 포함된 모든 자유도와 연관되는 변수를 포함하고 있는 구속으로 구조물의 기하학적 적합성을 만족시키는 구속이며, 가상 구속은 구조물의 기하학적 적합성과는 무관한 구속으로 일부분의 자유도에 불필요한 구속을 부과함으로써 강성 과잉 현상을 유발시킨다. 따라서 강성 과잉 현상을 해결하기 위해서는 진성 구속만 남기고 가상 구속은 나타나지 않게 해야 한다. 가상 구속이 나타나지 않도록 하기 위해서 가상 구속을 유발하는 내삽함수의 항을 소거하여 수정 내삽함수($w, \bar{\theta}_x, \bar{\theta}_y$)를 구하고, 그에 대응하는 수정 형상 함수($\bar{N}_{xi}, \bar{N}_{yi}$)를 구한다.

(2) 수정 변형률 행렬

Mindlin 판의 변형률 벡터는⁽¹²⁾

$$\{\varepsilon\} = \{-\theta_{x,x}, -\theta_{y,y}, -(\theta_{x,y} + \theta_{y,x}), w_{,x} - \theta_x, w_{,y} - \theta_y\}^T \quad (20)$$

이다. 그러나 앞절에서 보인 바와 같이 무수정 내삽함수에 의한 전단 변형 에너지는 가상 에너지를 포함하고 있어 강성 과잉 현상을 유발하므로 식 (20)에 무수정 내삽함수(θ_x, θ_y) 대신에 수정 내삽함수($\bar{\theta}_x, \bar{\theta}_y$)로 대체한 변형률을 수정 변형률(modified strains)이라 하며 다음과 같이 정의한다.

$$\{\bar{\varepsilon}\} = \{-\theta_{x,x}, -\theta_{y,y}, -(\theta_{x,y} + \theta_{y,x}), w_{,x} - \bar{\theta}_x, w_{,y} - \bar{\theta}_y\}^T \quad (21)$$

수정 변형률과 변위와의 관계는

$$\{\bar{\varepsilon}\} = \sum_{i=1}^n [\bar{B}_i] U_i \quad (22)$$

이고, 여기서 수정 변형률 행렬은 각각 다음 식과 같다.

$$[\bar{B}_i] = \begin{bmatrix} 0 & -N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & -N_{i,y} \\ 0 & -N_{i,y} & -N_{i,x} \\ N_{i,x} & -\bar{N}_{xi} & 0 \\ N_{i,y} & 0 & -\bar{N}_{yi} \end{bmatrix} \quad (23)$$

2.3 선별 적분에 의한 방법

강성 과잉 현상을 해결하기 위해 제시된 방법 중 선별 적분에 의한 방법을 적용하기 위해 요소의 강성 행렬을 변형률 성분에 따라 구분하여 각각 다른 적분점을 갖는 수치 적분을 적용한다.

Mindlin 판의 변형률 벡터는 식 (1)로 정의되는 x, y, z 축 방향의 변위를 사용하여 이에 관련된

좌표축 방향의 다섯 변형률 성분을 표시하면⁽¹²⁾

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \phi_x, \phi_y\}^T \quad (24)$$

이다. 식 (24)를 변형률 성분을 굽힘과 비틀림 및 전단력 성분으로 분류하면

$$\{\varepsilon\} = [\{\varepsilon_B\}, \{\varepsilon_S\}]^T \quad (25)$$

이고, 여기서

$$\{\varepsilon_B\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T = \{-\theta_{x,x}, -\theta_{y,y}, -(\theta_{x,y} + \theta_{y,x})\}^T$$

$$\{\varepsilon_S\} = \{\phi_x, \phi_y\}^T = \{(w_{,x} - \theta_x), (w_{,y} - \theta_y)\}^T$$

이다.

변형률과 변위의 관계를 변형률 행렬을 사용하여 나타내면

$$\{\varepsilon\} = \sum_{i=1}^n [B_i] \{d_i\} \quad (26)$$

이고, 변형률 행렬 B_i 는 변형률 성분에 따라 다음과 같이 분류할 수 있다.

$$[B_i] = \begin{bmatrix} [B_{Bi}] \\ [B_{Si}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & -N_{i,y} \\ 0 & -N_{i,y} & -N_{i,x} \\ N_{i,x} & -N_i & 0 \\ N_{i,y} & 0 & -N_i \end{bmatrix} \quad (27)$$

식 (27)을 식 (13)에 적용하면 식 (13)의 요소 강성 행렬의 원소 K_{ij} 는

$$K_{ij} = [K_{ij}]_B + [K_{ij}]_S \quad (28)$$

로 나타낼 수 있고, 여기서 $[K_{ij}]_B$ 와 $[K_{ij}]_S$ 를 수치적분법을 적용하여 나타내면 다음식과 같다.

$$[K_{ij}]_B = \sum_{p=1}^{m_1} \sum_{q=1}^{n_1} ([B_{Bi}^T D_B B_{Bj}] \det J)_{\tau_p \eta_q} W_p W_q \quad (29.a)$$

$$[K_{ij}]_S = \sum_{p=1}^{m_2} \sum_{q=1}^{n_2} ([B_{Si}^T D_S B_{Sj}] \det J)_{\tau_p \eta_q} W_p W_q \quad (29.b)$$

또한, 탄성 행렬 D_B 및 D_S 는 다음과 같다.

Table 1 Various integration techniques by using Gauss-Legendre quadrature⁽¹²⁾

Integration Schemes	m_1, n_1	m_2, n_2
Full	3×3	3×3
Selective	3×3	2×2
Reduced	2×2	2×2

$$D_B = \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 \\ \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & (Gh^3)/12 \end{bmatrix} \quad (30.a)$$

$$D_S = \begin{bmatrix} ahG & 0 \\ 0 & ahG \end{bmatrix} \quad (30.b)$$

식 (29.a)와 (29.b)의 계산은 Table 1에 제시하 각각 다른 적분점과 그에 따른 가중치를 택해 수치 적분을 수행한다.

2.4 적분점의 위치 선택에 따른 질량 행렬

식 (17)의 질량 행렬을 계산하기 위해서 수치 적분(numerical integration)을 할 때 적분점(integration points)의 위치 선택과 이에 따른 적절한 가중치(weighting values)에 따라 질량 행렬의 형태는 변한다.

식 (18)에서 형상 함수 N_i 는 ζ , η 에 대한 2차 형상 함수(quadratic shape function)이므로 적분 점과 가중치를 가우스-르장드르 수치 적분법(Gauss-Legendre quadrature)에 의해 나타내면 ζ -방향의 적분점

$$\zeta_1 = -(3/5)^{1/2}, \zeta_2 = 0, \zeta_3 = (3/5)^{1/2}$$

ζ -방향의 가중치

$$W_1 = 5/9, W_2 = 8/9, W_3 = 5/9$$

η -방향의 적분점

$$\eta_1 = -(3/5)^{1/2}, \eta_2 = 0, \eta_3 = (3/5)^{1/2}$$

η -방향의 가중치

$$W_1 = 5/9, W_2 = 8/9, W_3 = 5/9 \quad (31)$$

이고, 가우스-로바토 수치 적분법(Gauss-Lobatto quadrature)⁽¹⁵⁾에 의해 나타내면

ζ -방향의 적분점

$$\zeta_1 = -1, \zeta_2 = 0, \zeta_3 = 1$$

ζ -방향의 가중치

$$W_1 = 1/3, W_2 = 4/3, W_3 = 1/3$$

η -방향의 적분점

$$\eta_1 = -1, \eta_2 = 0, \eta_3 = 1$$

η -방향의 가중치

$$W_1 = 1/3, W_2 = 4/3, W_3 = 1/3 \quad (32)$$

이다. 식 (18)의 형상 함수 N_i 는 절점 i 에서는 1 이고 절점 i 이외의 절점에서는 0이다. 따라서, 가우스-로바토 수치 적분법에 의해 식 (17)의 질량 행렬을 계산하면 대각선 항(diagonal terms) 이외의 항은 모두 0이 된다.

가우스-르장드르 수치 적분법에 의해 계산된 질량 행렬과 가우스-로바토 수치 적분법에 의해 계산

된 질량 행렬을 각각 가우스-르장드르 질량 행렬, 가우스-로바토 질량 행렬이라 정의한다.

3. 수치해석 및 검토

본 장에서는 Mindlin 판의 고유치 해석에서 앞에서 제시한 강성 행렬 및 질량 행렬 계산법의 타당성을 검토한다. 먼저 강성 행렬의 계산에서 강성 과잉 현상을 해결하기 위한 두가지 방법의 타당성을 검토하고, 다음에 질량 행렬의 계산에서 가우스-르장드르 질량 행렬 및 가우스-로바토 질량 행렬을 각각 검토한다. 이를 위하여 모델로는 4변이 단순 지지된 판(Fig. 2) 및 4변이 고정된 판(Fig. 3)을 검증 모델($L=50m$, $h=0.1m$, $E=30 \times 10^6$

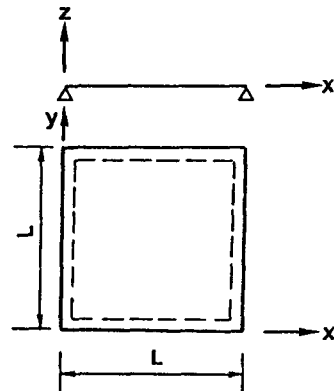


Fig. 2 The square plate with all edges simply supported

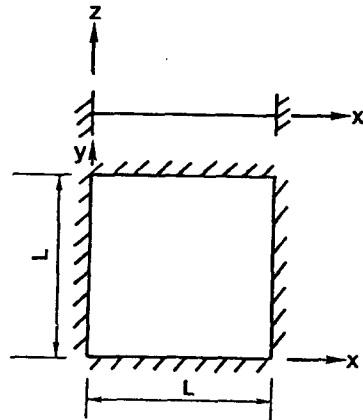


Fig. 3 The square plate with all edges built-in

Table 2 The non-dimensional frequencies λ of simply supported square plate with $h/L=1/500$ (NES=4)

		Modified	Conventional			
		Full	Full	Selective	Reduced	CTPT ⁽¹⁸⁾
1st Mode	λ_1	3.8553E-5	3.9045E-5	3.8553E-5	3.8546E-5	3.8529E-5
	Error (%)	0.06	1.34	0.06	0.04	—
2nd Mode	λ_2	9.7169E-5	1.0350E-4	9.7169E-5	9.7119E-5	9.6321E-5
	Error (%)	0.88	7.45	0.88	0.83	—
3rd Mode	λ_3	1.5567E-4	1.6374E-4	1.5567E-4	1.5529E-4	1.5411E-4
	Error (%)	1.01	6.25	1.01	0.77	—

Table 3 The non-dimensional frequencies λ for built-in square plate

		Modified	Conventional			
		Full	Full	Selective	Reduced	CTPT ⁽¹⁸⁾
1st Mode	λ_1	7.0444E-5	8.0992E-5	7.0444E-5	7.0350E-5	7.0245E-5
	Error (%)	0.28	15.3	0.28	0.15	—
2nd Mode	λ_2	1.4652E-4	1.9632E-4	1.4652E-4	1.4618E-4	1.4328E-4
	Error (%)	2.26	37.0	2.26	2.02	—
3rd Mode	λ_3	2.1654E-4	2.9929E-4	2.1654E-4	2.1517E-4	2.1138E-4
	Error (%)	2.44	41.6	2.44	1.79	—

N/m^2 , $\nu=0.3$)로 선정하여 고유 진동수의 정확도와 수렴속도를 비교, 검토한다.

수치실험을 통해 얻은 결과를 나타낸 Fig. 4~Fig. 9 및 Table 2와 Table 3에서 사용된 기호는 다음과 같은 의미를 갖는다.

λ_i : theoretical non-dimensional frequency

$$= \omega_i \sqrt{(Dh^2)/G}$$

λ_n : theoretical non-dimensional frequency

$$= \omega_n \sqrt{(Dh^2)/G}$$

NES : number of elements per side of the square plate

3.1 수정 형상 함수를 사용한 방법

본 절에서는 강성에 관련된 변위 및 응력뿐만 아니라 고유치에도 역시 강성 과잉 현상이 일어날 수 있으므로, 강성 행렬의 계산에서 수정된 형상 함수를 사용한 경우와 무수정 형상 함수를 사용한 경우에 대해 이론해와 비교 검토한다.

(1) 요소의 수를 증가 시킴에 따른 이론해의 수렴속도

판의 두께 대 길이의 비(h/L)를 1/500으로 가정한다. 강성 행렬은 수정 형상 함수 및 무수정 형상 함수를 완전 적분법으로 계산하고, 질량 행렬은 가우스-르장드르 질량 행렬을 사용하여 계산된 고유 진동수를 이론해⁽¹⁸⁾와 비교한 결과를 4변 단순지지 판은 Fig. 4에, 4변 고정 판은 Fig. 5에 도시한다.

4변 단순지지판과 4변 고정판에 대한 결과에서 중축은 각 모델에서 요소의 수를 나타내고 횡축은 무차원화한 수치 진동수와 이론 진동수의 비를 나타낸다. Fig. 4와 Fig. 5에서 보는 바와 같이 요소의 갯수(NES)를 증가시킴에 따라 수정 형상 함수를 사용하여 계산된 고유 진동수가 무수정 형상 함수를 사용하여 계산된 고유 진동수보다 대단히 빨리 이론해에 수렴한다.

(2) 판의 길이 대 두께의 비의 변화에 따른 수치해의 정확도

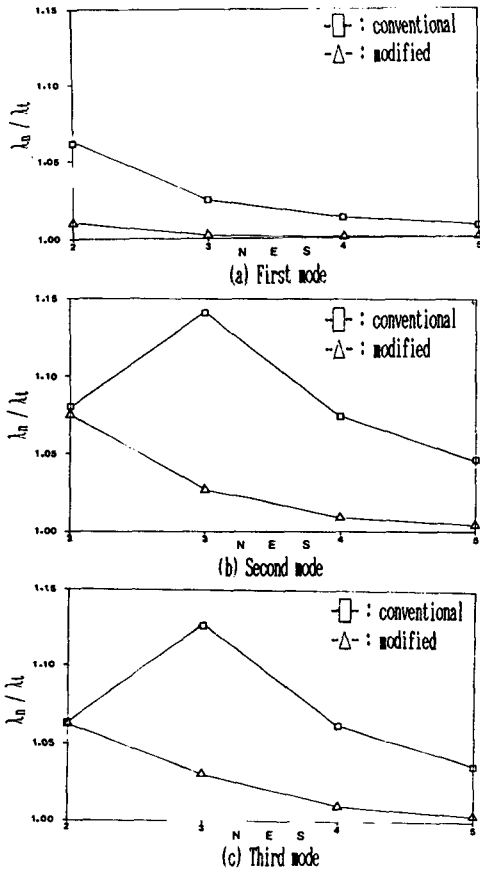


Fig. 4 Dimensionless natural frequencies of simply supported square plate in terms of NES with $h/L=1/500$ and Gauss-Legendre mass matrix

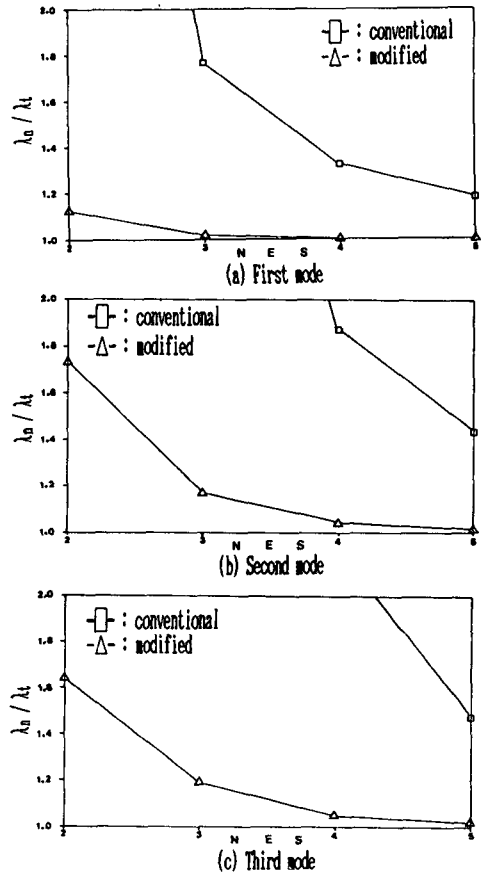


Fig. 5 Dimensionless natural frequencies of built-in square plate in terms of NES with $h/L=1/500$ and Gauss-Legendre mass matrix

판의 두께 대 길이의 비를 변화 시킴에 따라 수정 형상 함수를 사용하여 계산된 고유 진동수와 무수정 형상 함수를 사용하여 계산된 고유 진동수를 이론해^(18,19)와 비교하여 강성 과잉 현상의 영향을 검토한다.

모델로는 4변 단순지지 판(Fig. 2) 및 요소수는 NES=4인 경우, 질량 행렬은 가우스-르장드르 질량 행렬을 사용하고, 두께를 감소시킴에 따라 수정 형상 함수를 사용하여 계산된 고유 진동수와 무수정 형상 함수를 사용하여 계산된 고유 진동수를 이론해와 비교하여 Fig. 6에 도시한다. Fig. 6에서 볼 수 있듯이 수정 형상 함수를 사용하여 계산된 고유 진동수는 길이 대 두께의 비에 관계없이 이론해와 잘 일치하나, 무수정 형상 함수를 사용하여 계산된 고유 진동수는 얇은 판에서는 이론해와 큰 오차를

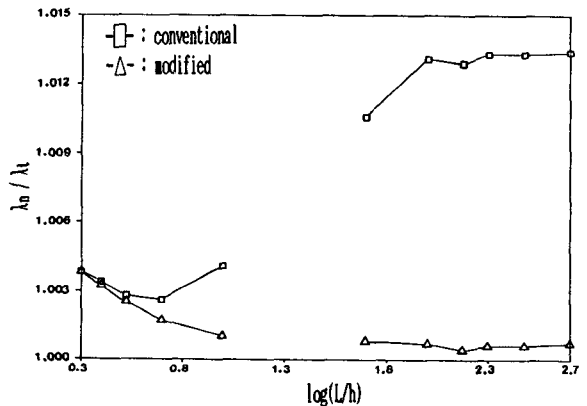


Fig. 6 The lowest dimensionless natural frequencies of simply supported square plate in terms of the ratio of length to thickness with NES=4 and Gauss-Legendre mass matrix (thin plate theory⁽¹⁸⁾ for $\log(L/h) \leq 1$ and Mindlin plate theory⁽¹⁹⁾ for $\log(L/h) \geq 1.7$)

보임을 알 수 있다. 이는 얇은판에서 강성이 실제보다 크게 계산되어 강성 과잉 현상을 발생시키기 때문이다.

3.2 두가지 방법에 의한 고유 진동수 비교 및 고찰

강성 과잉 현상을 해결하기 위해 강성 행렬을 계산하는 두가지 방법을 적용하여 4변 단순지지판(Fig. 2) 및 4변 고정판(Fig. 3)을 모델로 선정하고, 요소수는 NES=4인 경우에 대해 수치 실험을 한 결과를 이론해와 비교하여 Table 2와 Table 3에 정리하였다.

Table 2 및 Table 3에서 알 수 있듯이 수정 형상 함수를 사용하여 강성 행렬을 계산하는 방법이나 선별 적분 또는 감차 적분에 의해 강성 행렬을 계산하는 방법 모두 이론해와 잘 일치 한다. 따라서 일단 선별 적분 및 감차 적분을 이용하여 강성 행렬을 계산함으로써 강성 과잉 현상을 피할 수 있을 뿐만 아니라, 낮은 차수의 수치 적분(lower-order numerical integration)을 사용함으로써 수치해의 정확도를 더욱 높일 수 있음을 알 수 있다.

그러나 일반적으로 낮은 차수의 수치 적분(선별 적분 및 감차 적분)에 의한 강성 행렬의 계산은 구조물이 얼마나 구속되어야 하는가의 정도에 의해 가성 강체 운동(spurious rigid body motion)을 유발시킬 수 있다⁽⁶⁾. 이는 낮은 차수의 수치 적분을 함으로써 강성 행렬의 랭크(rank)가 감소되기 때문이다. 그러므로 선별 적분 및 감차 적분은 강성 과잉 현상은 해결할 수 있으나 경우에 따라 랭크 부족(rank deficiency)을 일으켜, 이로 인한 오차를 발생시키므로, 본 논문에서 사용하는 수정 형상 함수를 채택하여 완전 적분을 함으로써 강성 과잉 현상 뿐만 아니라 랭크 부족 현상을 방지할 수 있다.

또한 수정 형상 함수를 사용한 방법과 선별 적분을 사용한 방법은 동일한 수치해를 주는 것으로 보아 강성 과잉 현상을 해결하는 기능면에서 동일하다는 점을 추측할 수 있으나, 이론적으로 좀더 연구되어야 할 과제인 것으로 판단된다.

3.3 질량 행렬에 따른 고유 진동수 비교

앞 절에서 검토한 모델에 대하여 강성 행렬의 계산은 수정형상 함수를 사용하고, 질량 행렬이 가우스-르장드르 질량 행렬인 경우와 가우스-로바토 질

량 행렬인 경우의 진동수를 이론해⁽¹⁸⁾와 비교 검토한다.

첫째로, 4변 단순 지지판과 4변 고정판에 대하여 요소수를 증가시키에 따른 이론해의 수렴속도를 비교한 결과를 4변 단순지지판은 Fig. 7에 4변 고정판은 Fig. 8에 도시한다. 4변 단순지지판과 4변 고정판에 대한 결과에서 종축은 각 모델에서 요소의 수를 나타내고 횡축은 무차원화한 수치 진동수와 이론 진동수의 비를 나타낸다. Fig. 7, Fig. 8을 검토하여 보면 가우스-르장드르 질량 행렬을 사용하여 계산된 고유 진동수 보다 가우스-로바토 질량 행렬을 사용하여 계산된 고유 진동수가 4변 고정판과 4변 단순 지지판 모두 이론해에 빨리 수렴한다.

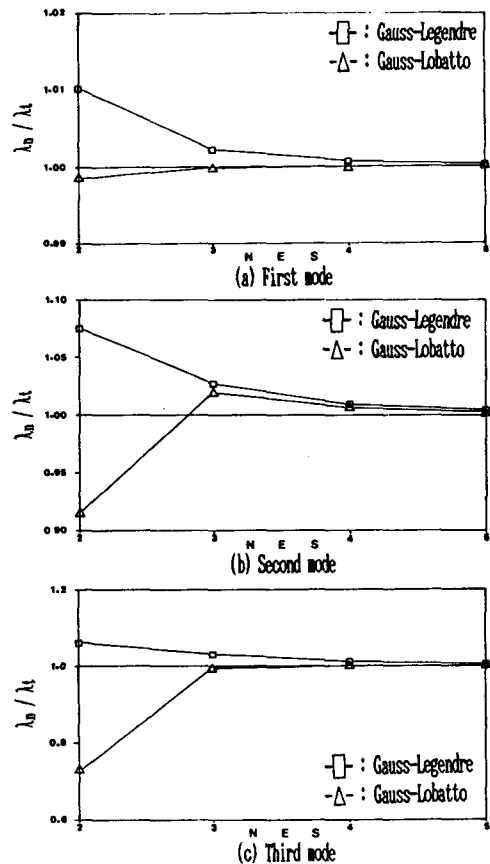


Fig. 7 Dimensionless natural frequencies of simply supported square plate obtained by Gauss-Legendre and Gauss-Lobatto mass matrix in terms of NES with $h/L=1/500$ and modified shape function

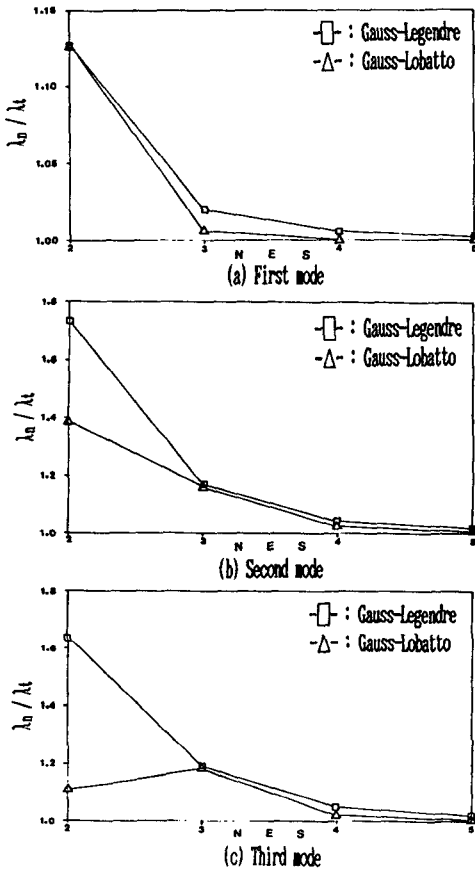


Fig. 8 Dimensionless natural frequencies of built-in square plate obtained by Gauss-Legendre and Gauss-Lobatto mass matrix in terms of NES with $h/L=1/500$ and modified shape function

둘째로, 3.2절에서 검토한 4변 단순지지판에서 길이 대 두께 비의 변화에 따른 해의 정확도를 비교한 결과를 Fig. 9에 도시한다. 4변 단순지지판에 대한 결과에서 종축은 각 모델에서 요소의 수를 나타내고 횡축은 무차원화한 수치 진동수와 이론 진동수의 비를 나타낸다. Fig. 9를 검토하여 보면 4변 단순지지판에서 수정 형상함수를 사용할 경우 가우스-로바토 질량 행렬을 사용하여 계산된 고유 진동수가 가우스-르장드르 질량 행렬을 사용하여 계산된 고유 진동수보다 길이 대 두께의 비에 관계없이 이론해에 보다 더 정확하다.

이상의 3절에서의 판에 대한 고유치 해석결과, 보(beam)에 대한 고유치 해석에서 나타난 결과⁽²⁰⁾와 동일한 경향을 보이고 있다.

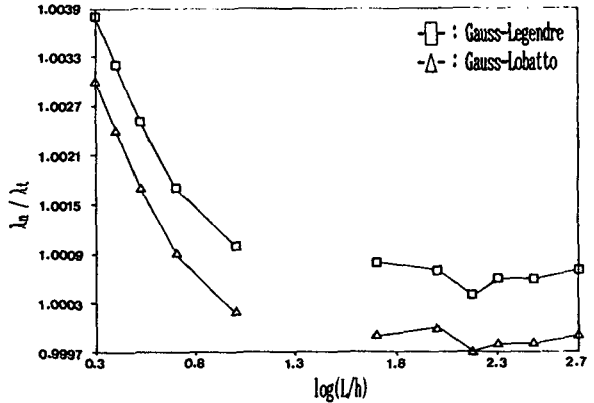


Fig. 9 The lowest dimensionless natural frequencies of simply supported square plate obtained by Gauss-Legendre and Gauss-Lobatto mass matrix in terms of the ratio of length to thickness (thin plate theory⁽¹⁸⁾ for $\log(L/h) \leq 1$ and Mindlin plate theory⁽¹⁹⁾ for $\log(L/h) \geq 1.7$, NES=4 and modified shape function)

4. 결 론

유한 요소법을 이용한 판의 고유치 해석에서 수치해(고유치)의 정확도 및 수렴성을 향상시키기 위하여, 강성 행렬과 질량 행렬을 계산하는 방법을 검토하였다. 강성 행렬의 계산은 강성 과잉 현상을 해결하기 위해 수정 형상 함수의 사용을 제시하였다. 이와함께 선별 적분법을 사용하는 방법, 그리고 질량 행렬의 계산에서는 가우스-로바토 질량 행렬을 각각 채택 사용하여 종래 사용해오던 방법(무수정 형상 함수를 이용한 강성 행렬과 가우스-르장드르 질량 행렬을 사용한 방법)에 의한 수치해와 비교 검토 하였다.

이를 위해 4변이 단순지지된 사각형 판과 4변이 고정된 사각형 판을 모델로 사용하여 수치 실험을 한 결과를 요약하면 다음과 같다.

(1) 무수정 형상 함수보다 수정 형상 함수를 사용하여 강성 행렬을 계산함으로써 수치해의 정확도 및 수렴성을 향상시킬 수 있다.

(2) 4변 단순지지된 판에서는 두께 대 길이의 비에 관계없이, 무수정 형상 함수 보다 수정 형상 함수를 사용하여 구한 고유치가 이론 고유치에 근사하다.

(3) 선별적분법 및 감차 적분법에 의해 수치해의

정확도를 향상시킬 수 있으나, 가성 강제 운동을 발생시킬 수 있는 결점이 있다.

(4) 가우스-르장드르 질량행렬보다는 가우스-로바토 질량 행렬을 사용함으로써 수치해의 정확도 및 수렴성이 향상된다.

결론을 요약하면 강성 행렬은 수정 형상 함수를 사용하여 완전 적분하는 방법과 질량 행렬은 가우스-로바토 질량 행렬을 사용하는 방법이 수치해의 정확도 및 수렴성을 향상시킬 수 있다.

후 기

본 논문은 한국과학재단 기초연구비 지원에 의하여 이루어졌으며, 관계기관에 감사한다.

참 고 문 헌

- (1) Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. and Too, J.M., 1971, "Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 3, pp. 375~390.
- (2) Hughes, T.J.R., Taylor, R.L. and Kanoknuku, W., 1977, "A Simple and Efficient Finite Element for Plate Bending", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 11, pp. 1529~1543.
- (3) Pugh, E.D.L., Hinton, E. and Zienkiewicz, O.C. 1978, "A Study of Quadrilateral Plate Bending Elements with Reduced Integration", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 12, pp. 1059~1079.
- (4) Crisfield, M.A., 1984, "A Quadratic Mindlin Element Using Shear Constraints", Computers & Structures, Vol. 18, No. 5, pp. 833~852.
- (5) Hinton, E. and Huang, H.C., 1986, "A Family of Quadrilateral Mindlin Plate Elements With Substitute Shear Strain Fields", Computers & Structures, Vol. 23, No. 3, pp. 409~431.
- (6) Donea, J, and Lamain, L.G., 1987, "A Modified Representation on Transverse Shear in C^0 Quadrilateral Plate Element", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 63, pp. 183~207.
- (7) Lee, S.W. and Pian, T.H.H., 1978, "Improvement of Plate and Shell Finite Elements by Mixed Formulations", AIAA J., Vol. 16, No. 1, pp. 29~34.
- (8) Ramesh Babu, C. and Prathap, G., 1986, "A Linear Thick Curved Beam Element", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 23, pp. 1313~1328.
- (9) Prathap, G. and Babu, C.R., 1986, "An Isoparametric Quadratic Thick Curved Beam Element", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 23, pp. 1583~1600.
- (10) Min Oak Key and Kim Yong Woo, 1990, "A Consideration of Energy Modes in Isoparametric Beam Element", Yonsei Nonchong, Vol. 26, pp. 315~331.
- (11) Min Oak Key and Kim Yong Woo, 1989, "Locking-Free, Rectangular Element for thin and Moderately Thick Plates", Proceedings of International Symposium on Pressure Vessel Technology and Nuclear Codes and Standards, pp. 3.46~3.55.
- (12) Hinton, E. and Bicanic, N., 1979, "A Comparison of Lagrangian and Serendipity Mindlin Plate Element for Free Vibration Analysis", Computers & Structures, Vol. 10, pp. 483~493.
- (13) Mindlin, R.D., 1951, "Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates", J. of Applied Mechanics, Vol. 18, pp. 31~38.
- (14) Shames, H. and Dym, L., 1985, "Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics", McGraw-Hill, New York, pp. 364~377.
- (15) Ralston, A., 1965, "A First Course in Numerical Analysis", McGraw-Hill, New York.
- (16) Bathe, K.J., 1982, "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Prentice-Hall, New Jersey, pp. 666~696.
- (17) Garbow, B.S., 1977, "Matrix Eigensystem Routines-EISPACK Guide Extension", Springer-Verlag, New York, pp. 186~219.
- (18) Blevins, R.D., 1979, "Formulas for Natural Frequency and Mode Shape", Van Nostrand Reinhold Company, pp. 252~261.
- (19) Srinivas, S., Joga Rao, C.V. and Rao, A.K., 1970, "An Exact Analysis for Vibration of Simply Supported Homogeneous and Laminate thick Rectangular Plates", J. Sound Vib., Vol. 12, pp. 187~199.
- (20) 민옥기, 김용우, 유동규, 1990, "곡선보의 강성 파잉 현상과 고유치에 관한 연구", 대한기계학회논문집, 제14권, 제2호, pp. 310~323.