

(論 文)

불연속 단면을 갖고 제어 종동력을 받는 자유 Timoshenko보의 안정성 해석

류 봉 조* · 박 영 필**

(1990년 10월 19일 접수)

Stability Analysis of a Discontinuous Free Timoshenko Beam Subjected to a Controlled Follower Force

Bong-Jo Ryu and Young-Pil Park

Key Words : Dynamic Stability(동적 안정성), Timoshenko Beam(Timoshenko보), Hamilton's Principle(Hamilton의 원리), Finite Element Method(유한 요소법), Local Coordinates(국부 좌표), Discontinuity(불연속), Follower Force(종동력), Concentrated Mass(집중 질량), Sensor(센서)

Abstract

In this study, dynamic stability of discontinuous free Timoshenko beam, carrying a concentrated mass, under constant follower force is considered. Governing differential equations are derived based on the extended Hamilton's principle and finite element method is applied for numerical analysis. Conclusions of the study are as follows : (1) Without force direction control, (i) the critical follower force at instability is increased with concentrated mass regardless of discontinuity. (ii) the minimum critical follower force is located in the vicinity of discontinuity position $\xi_a=0.75$. (iii) at mass location $\mu \leq 0.5$ the force at instability is decreased as magnitude of concentrated mass is increased but, at $\mu > 0.5$ the force is increased as the mass is increased. (2) With force direction control, (i) shear deformation parameter S contributes insignificantly to the force at instability when $S > 10^3$. (ii) maximum critical follower force can be obtained for the discontinuity location $\xi_a = 0.25$. (iii) the critical follower force is increased as magnitude of concentrated mass α is increased at mass location $\mu \geq 0.4$, but is increased, $\mu < 0.4$.

기 호 설 명

<p>A_1, A_2 : 불연속 단면을 중심으로 보의 가는 부분 과 굵은 부분의 면적</p> <p>b : 센서가 위치한 요소</p> <p>c : 집중 질량이 존재하는 요소</p>	<p>d_1, d_2 : 불연속 단면을 중심으로 보의 가는 부분 직경과 굵은 부분의 직경</p> <p>E : 영률</p> <p>f : 보의 직경비 (d_2/d_1)</p> <p>G : 전단 강성 계수</p> <p>$H(x)$: 단위 계단 함수</p> <p>i : 보의 i번째 요소</p> <p>I_1, I_2 : 단의 크기에 따른 단면의 2차 모멘트</p> <p>i_a : 불연속 단면의 위치 다음 요소</p>
--	--

* 정회원, 대전공업대학 기계설계학과

** 정회원, 연세대학교 공과대학 기계공학과

- J :극관성 모멘트
- K :단면 형상에 의한 전단 계수
- L :보의 전체 길이
- l :보의 요소 길이
- M :집중 질량의 크기
- N :보 전체의 요소 수
- Q :무차원화된 중동력
- R :보의 회전 관성 매개 변수
- S :보의 전단 변형 매개 변수
- T :일정 크기의 중동력
- $T^*(x)$:보의 임의의 위치 x 에 있어서의 중동력
- x :보의 길이 방향 좌표
- x_d, x_m, x_s :불연속 단면, 집중 질량, 센서의 위치
- $Y(x, t)$:보의 횡 방향 변위
- W^c :보존 일
- δW^N :비 보존 가상 일
- x' :보의 길이 방향 국부 좌표
- x'_d, x'_m, x'_s :불연속 단면, 집중 질량, 센서의 국부좌표
- α :무차원화된 집중 질량과 보의 질량비
- β :집중 질량 회전 관성 매개 변수
- ν :보의 질량비
- ζ :무차원화된 보의 길이 국부 좌표
- $\zeta_d, \zeta_m, \zeta_s$:무차원화된 불연속 단면, 집중 질량, 센서의 위치 국부 좌표
- ρ_1, ρ_2 :불연속 단면을 경계로 한 보의 밀도
- η_i, η_{i+1} :무차원화된 횡 방향 변위
- η' :무차원화된 보의 중심선의 기울기
- ϕ_i, ϕ_{i+1} :무차원화된 보의 굽힘 기울기
- ϕ' :무차원화된 보의 굽힘 모멘트
- \mathcal{X} :라그랑지

1. 서 론

비행체의 동적 안정성에 관한 문제는 기계공학, 산업 및 항공 우주공학, 군사분야 등에 이르기까지 널리 응용되어지고 있으며, 특히 인공위성을 궤도에 올리거나 장거리 목표지점에 물체를 탑재 운반 시키는데는 주로 다단 로켓이 사용되어지고 있다. 로켓이나 미사일등은 축 방향의 힘인 추진력과 로켓의 질량으로 인한 관성력을 받기 때문에 미사일이나 로켓의 진동과 안정성에 대한 문제는 중요하며, 이는 비 보존 문제가되어 해석하는데 많은 어려움이 있다. 이러한 비 보존 탄성 안정성 문제를 축 방향으로 추진력을 받으며 비행하는 비행체의

안정성 문제에 적용하려는 시도는 Silverberg⁽¹⁾에 의하여 이루어졌으며, Beal⁽²⁾은 미사일이나 로켓등을 중동력을 받는 자유 보로 이상화하여 동적 안정성을 Galerkin 방법을 적용하여 연구하였다. Mote⁽³⁾와 Barsoum⁽⁴⁾ 등은 추진력이 비 보존력을 갖는 미사일에 대하여 처음으로 유한 요소법을 적용하여 비보존계의 동적 안정성을 연구하였고 Matsumoto와 Mote⁽⁵⁾는 추진력의 방향이 제어되는 경우에 있어 시간지연(time delay)이 보의 안정성에 미치는 영향을 유한요소법을 적용하여 해석하였고, Wu⁽⁶⁻⁸⁾는 중동력을 받는 자유 균일 보의 안정성에 대하여 자유수반 변분원리(unconstrained adjoint variational principle)를 이용한 유한 요소법을 사용하여 연구하였다. 한편, 박 영필과 김 찬수⁽⁹⁾는 집중 질량과 방향제어가 동시에 작용하는 경우에 있어서 이들의 변화에 따른 임계 중동력과의 관계를 자유수반 변분원리를 이용한 유한 요소법을 적용하여 연구하였다. 그 후, 박 영필과 Mote⁽¹⁰⁾는 집중 질량 및 방향제어를 갖는 미사일 모델에 확장된 Hamilton원리를 이용한 유한 요소법을 적용하여 안정한 상태의 계가 유지할 수 있는 최대 추진력에 관하여 연구하였다. 위에 언급된 미사일이나 로켓 모델들은 회전관성과 전단변형의 효과를 고려치 않은 보 모델들로써 주로 가늘고 긴 보 모델의 해석에 적합하고, 최근에 회전 관성과 전단변형의 효과를 고려한 보 모델에 대한 연구가 이루어져 왔다^(11,12).

본 연구에서는 다단 로켓이나 미사일등과 같이 불연속 단면과 보내에 집중질량을 갖고 보의 회전 관성과 전단변형의 효과를 고려한 자유 보에 대한 동적안정성을 불연속 단면의 위치 변화, 단의 변화, 집중질량의 크기 및 위치 변화등에 따라 확장된 Hamilton원리를 이용한 유한 요소법으로 고찰하였다.

2. 이 론

2.1 해석 모델

본 연구에서 설정한 단의 변화를 갖는 미사일 모델과 이 모델을 단순화시킨 해석 모델은 Fig. 1에 나타난 바와 같다. Fig. 1에서 x 축은 평형 상태의 보의 중심 축이며 $Y(x, t)$ 는 보의 임의의 위치 x 에 있어서의 횡 방향 변위를 나타낸다. 또, 보의 불연속 단면을 경계로하여 가는 부분의 면적은 A_1 , 굵은 부분의 면적은 A_2 , 집중 질량의 크기는

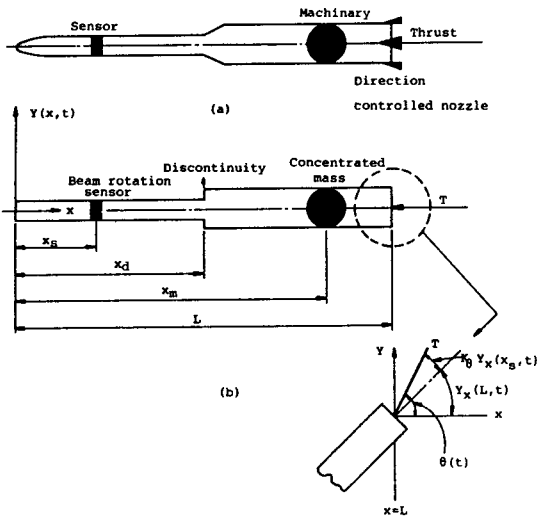


Fig. 1 (a) A typical model of a missile
(b) Free Timoshenko beam model

M 이며, x_m, x_s, x_d 는 각각 집중 질량의 위치, 센서의 위치 및 불연속 단면의 위치를 나타낸다.

추진력과 관성력을 받으면서 비행하는 보의 거동을 해석하기 위하여 보의 임의의 위치 x 에 있어서 축 방향의 힘을 $T^*(x)$ 라 하면 $T^*(x)$ 는 불연속 단면 및 집중 질량의 위치에 따라 변하는 힘으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T^*(x, t) = \{ T[\rho A_1 x + \rho A_1 (f^2 - 1)(x - x_d)H(x - x_d) + MH(x - x_m)] / \rho A_1 x_d + \rho A_2(L - x_d) + M \} \quad (1)$$

여기서, f 는 불연속 단면을 지닌 보의 직경 비를 나타내며 $H(x)$ 는 단위 계단 함수이다. Fig. 1에서 알 수 있듯이 중동력 T 의 방향은 다음과 같이 제어되어진다.

$$\theta(t) = K_0 Y_x(x_s, t) + Y_x(L, t) \quad (2)$$

여기서, K_0 는 방향 제어 상수이다.

2.2 지배 방정식

지배 방정식을 유도하기 위해 확장된 Hamilton 원리를 이용하면 다음과 같다.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{X} dt + \int_{x_1}^{x_2} \delta W^N dt = 0 \quad (3)$$

여기서, \mathcal{X} 는 라그랑지로서 $\mathcal{X} = T - V + W^c$ 로 표시되며,

$$\mathcal{X} = \frac{1}{2} \int_0^{x_d} (\rho A_1 \dot{Y}_t^2 + \rho I_1 \dot{\phi}_t^2) dx$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{x_d}^L (\rho A_2 \dot{Y}_t^2 + \rho I_2 \dot{\phi}_t^2) dx + \frac{1}{2} M \dot{Y}_t^2(x_m, t) + \frac{1}{2} J \dot{\phi}_t^2(x_m, t) - \frac{1}{2} \int_0^{x_d} \{ EI_1 \phi_x^2 + KA_1 G (Y_x - \phi)^2 \} dx - \frac{1}{2} \int_{x_d}^L \{ EI_2 \phi_x^2 + KA_2 G (Y_x - \phi)^2 \} dx + \frac{1}{2} \int_0^L T^* Y_x^2 dx \quad (4)$$

$$\delta W^N = -T\theta(t) \delta Y(L, t) \quad (5)$$

이다.

식 (4)와 (5)에서 K 는 보의 단면 형상에 의한 전단계수(shear coefficient)이고, G 는 전단 강성 계수(shear modulus), J 는 극 관성 모멘트(polar moment of inertia), I_1, I_2 는 각각 단의 크기에 따른 단면의 2차 모멘트(area moment of inertia), ϕ 는 순수 굽힘에 의한 경사각을 나타낸다.

식 (4)와 (5)를 식 (3)에 대입하고 정리하면 다음과 같다.

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^{x_d} \{ \rho A_1 Y_{tt} \delta Y + \rho I_1 \phi_{tt} \delta \phi + EI_1 \phi_x \delta \phi_x + KA_1 G (Y_x - \phi) \delta (Y_x - \phi) \} dx + \int_{x_d}^L \{ \rho A_2 Y_{tt} \delta Y + \rho I_2 \phi_{tt} \delta \phi + EI_2 \phi_x \delta \phi_x + KA_2 G (Y_x - \phi) \delta (Y_x - \phi) \} dx + M \dot{Y}_{tt}(x_m, t) \delta Y(x_m, t) + J \dot{\phi}_{tt}(x_m, t) \delta \phi(x_m, t) - \frac{T}{Tot} \int_0^L \{ \rho A_1 x + \rho A_2 (f^2 - 1)(x - x_d)H(x - x_d) + MH(x - x_m) \} Y_x \delta Y_x dx + T \{ K_0 Y_x(x_s, t) + Y_x(L, t) \} \delta Y(L, t) \right] dt \quad (6)$$

여기서, $Tot = \rho A_1 x_d + \rho A_2(L - x_d) + M$ 이며 보와 집중 질량과의 합인 전체 질량을 나타낸다.

2.3 유한 요소 해석

유한요소법을 적용하기 위해 보를 N 개의 요소로 분할한 유한 요소 모델이 Fig. 2에 나타나 있고 독립 변수의 변환을 위해 다음과 같은 국부 좌표(local coordinate)를 도입하였다.

$$x' = x - (i - 1)l \quad (7)$$

$$x'_s = x_s - (b - 1)l \quad (8)$$

$$x'_m = x_m - (c - 1)l \quad (9)$$

$$x'_d = x_d - (i_d - 1)l \quad (10)$$

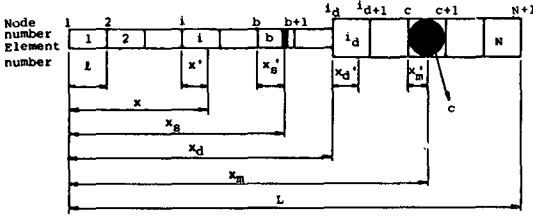


Fig. 2 Finite element model of the beam

여기서, 하첨자 \$i\$는 \$i\$번째 요소를 나타내며, \$i_d, c, b\$는 각각 불연속 단면이 존재하는 요소, 집중 질량 및 센서가 있는 요소를 나타낸다.

식 (6)에 다음과 같은 무차원화된 좌표들

$$\begin{aligned} \zeta &= x'/l, \quad \zeta_m = x_m'/l, \quad \zeta_s = x_s'/l, \\ \zeta_a &= x_d'/l, \quad \eta = \frac{Y}{l} \end{aligned} \quad (11)$$

을 도입하고 정리하면,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{i_d-1} \int_0^1 \left[\rho A_1 l^3 \eta u^{(i)} \delta \eta^{(i)} + \rho I_1 l \phi u^{(i)} \delta \phi^{(i)} \right. \\ & + \frac{EI_1}{l} \phi_\zeta^{(i)} \delta \phi_\zeta^{(i)} \\ & + KA_1 G l (\eta_\zeta^{(i)} - \phi^{(i)}) \delta (\eta_\zeta^{(i)} - \phi^{(i)}) \\ & - \frac{T}{Tot} \rho A_1 l^2 \eta_\zeta^{(i)} \delta \eta_\zeta^{(i)} \\ & \left. + \frac{T \rho A_1 l^2 ((i-1) + \zeta) \eta_\zeta^{(i)} \delta \eta_\zeta^{(i)}}{Tot} \right] d\zeta \\ & - \int_{\zeta_m}^1 \frac{T M l \eta_\zeta^{(c)} \delta \eta_\zeta^{(c)} d\zeta}{Tot} \\ & - \sum_{i=i_d}^N \int_0^1 \left[\rho A_2 l^3 \eta u^{(i)} \delta \eta^{(i)} \right. \\ & + \rho I_2 l \phi u^{(i)} \delta \phi^{(i)} + \frac{EI_2}{l} \phi_\zeta^{(i)} \delta \phi_\zeta^{(i)} \\ & + KA_2 G l (\eta_\zeta^{(i)} - \phi^{(i)}) \delta (\eta_\zeta^{(i)} - \phi^{(i)}) \\ & - \frac{T l^2}{Tot} (\rho A_1 (i_d - 1) + \rho A_2 ((i - i_d) \\ & + \zeta)) \eta_\zeta^{(i)} \delta \eta_\zeta^{(i)} \left. \right] d\zeta \\ & - \int_{\zeta_m}^1 \frac{T M l}{Tot} \eta_\zeta^{(c)} \delta \eta_\zeta^{(c)} d\zeta \\ & - \sum_{i=c+1}^N \int_0^1 \frac{T M l}{Tot} \eta_\zeta^{(i)} \delta \eta_\zeta^{(i)} d\zeta \\ & + M l^2 \eta u (\zeta_m, t)^{(c)} \delta \eta (\zeta_m, t)^{(c)} \\ & + J \phi u (\zeta_m, t)^{(c)} \delta \phi (\zeta_m, t)^{(c)} \\ & + T l \{ K_0 \eta_\zeta (\zeta_s, t)^{(b)} \\ & + \eta_\zeta (1, t)^{(N)} \} \delta \eta (1, t)^{(N)} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

이 된다.

식 (12)의 변수 \$\eta(\zeta, t)\$와 \$\phi(\zeta, t)\$를

$$\eta(\zeta, t) = \eta(\zeta) e^{\omega t}, \quad \phi(\zeta, t) = \phi(\zeta) e^{\omega t} \quad (13)$$

로 가정하고 다음과 같은 무차원화된 매개 변수들

$$\begin{aligned} f &= \frac{d_2}{d_1}, \quad \lambda^2 = \frac{\rho A_1 L^4 \omega^2}{EI_1}, \quad Q = \frac{T L^2}{EI_1}, \\ R &= \frac{I_1}{A_1 L^2}, \quad S = \frac{K A_1 G L^2}{EI_1} \\ \mu &= \frac{x_m}{L}, \quad \alpha = \frac{M}{\rho A_1 L}, \quad \beta = -\frac{J}{\rho A_1 L^3}, \\ \nu &= \frac{\rho (A_2 - A_1) (L - x_d)}{\rho A_1 L}, \quad \sigma = \frac{x_s}{L} \end{aligned} \quad (14)$$

을 사용하여 식 (12)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{i_d-1} \int_0^1 \left[\frac{\lambda^2}{N^4} \eta^{(i)} \delta \eta^{(i)} + \frac{\lambda^2 R}{N^2} \phi^{(i)} \delta \phi^{(i)} + \phi_\zeta^{(i)} \delta \phi_\zeta^{(i)} \right. \\ & + \frac{S}{N^2} (\eta_\zeta^{(i)} - \phi^{(i)}) \delta (\eta_\zeta^{(i)} - \phi^{(i)}) \\ & - \frac{Q}{N^3 (1 + \alpha + \nu)} ((i-1) + \zeta) \eta_\zeta^{(i)} \delta \eta_\zeta^{(i)} \left. \right] d\zeta \\ & - \int_{\zeta_m}^1 \frac{\alpha Q}{N^2 (1 + \alpha + \nu)} \eta_\zeta^{(c)} \delta \eta_\zeta^{(c)} d\zeta \\ & - \sum_{i=c+1}^{i_d-1} \int_0^1 \frac{\alpha Q}{N^2 (1 + \alpha + \nu)} \eta_\zeta^{(i)} \delta \eta_\zeta^{(i)} d\zeta \\ & + \sum_{i=i_d}^N \int_0^1 \left[\frac{f^2 \lambda^2}{N^4} \eta^{(i)} \delta \eta^{(i)} + \frac{f^4 \lambda^2}{N^2} \phi^{(i)} \delta \phi^{(i)} \right. \\ & + f^4 \phi_\zeta^{(i)} \delta \phi_\zeta^{(i)} \\ & + \frac{f^2 S}{N^2} (\eta_\zeta^{(i)} - \phi^{(i)}) \delta (\eta_\zeta^{(i)} - \phi^{(i)}) \\ & - \left. \left\{ \frac{Q}{N^3 (1 + \alpha + \nu)} ((i_d - 1) \right. \right. \\ & \left. \left. + f^2 (i - i_d + \zeta)) \eta_\zeta^{(i)} \delta \eta_\zeta^{(i)} \right\} \right] d\zeta \\ & - \int_{\zeta_m}^1 \frac{\alpha Q}{N^2 (1 + \alpha + \nu)} \eta_\zeta^{(c)} \delta \eta_\zeta^{(c)} d\zeta \\ & - \sum_{i=c+1}^N \int_0^1 \frac{\alpha Q}{N^2 (1 + \alpha + \nu)} \eta_\zeta^{(i)} \delta \eta_\zeta^{(i)} d\zeta \\ & + \frac{\alpha \lambda^2}{N^3} \eta (\zeta_m)^{(c)} \delta \eta (\zeta_m)^{(c)} \\ & + \frac{\beta \lambda^2}{N} \phi (\zeta_m)^{(c)} \delta \phi (\zeta_m)^{(c)} \\ & + \frac{Q}{N^2} \{ K_0 \eta_\zeta (\zeta_s)^{(b)} + \eta_\zeta (1)^{(N)} \} \delta \eta (1)^{(N)} = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

식 (15)에서 \$S\$와 \$R\$은 각각 보의 전단 변형과 회전관성 매개변수를 나타내며, \$Q\$는 무차원화된 중동력, \$\alpha\$와 \$\beta\$는 집중 질량과 집중 질량을 제외한 단면 적을 \$A_1\$으로 갖는 보의 질량과의 비 및 집중 질량 회전관성 매개변수를 나타낸다. 또한 \$\zeta_a\$는 무차원화된 불연속 단면의 국부좌표 위치를 나타낸다.

Fig. 3과 같이 각 요소의 거동을 근사적으로 양

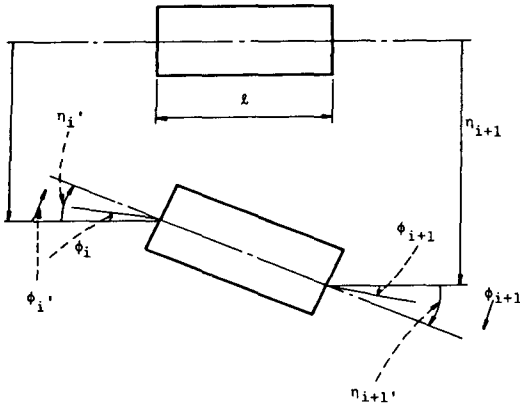


Fig. 3 Timoshenko beam element

쪽 노드 (node)에서의 변위와 기울기, 굽힘 기울기와 모멘트로써 나타내기 위해

$$\eta(\zeta)^{(i)} = \alpha_0 + \alpha_1 \zeta + \alpha_2 \zeta^2 + \alpha_3 \zeta^3 \quad (16)$$

$$\phi(\zeta)^{(i)} = \beta_0 + \beta_1 \zeta + \beta_2 \zeta^2 + \beta_3 \zeta^3 \quad (17)$$

으로 가정하면, \$\eta(\zeta)^{(i)}\$와 \$\phi(\zeta)^{(i)}\$는 다음과 같이 된다.

$$\eta(\zeta)^{(i)} = a^T(\zeta) H^{(i)} \quad (18)$$

$$\phi(\zeta)^{(i)} = a^T(\zeta) \Phi^{(i)} \quad (19)$$

여기서,

$$H^{(i)} = \{\eta_i, \eta_i', \eta_{i+1}, \eta_{i+1}'\}^T \quad (20)$$

$$\Phi^{(i)} = \{\phi_i, \phi_i', \phi_{i+1}, \phi_{i+1}'\}^T \quad (21)$$

로서 일반화된 좌표 벡터 (generalized coordinate vector)이며,

$$a^T(\zeta) = \{1 - 3\zeta^2 + 2\zeta^3, \zeta - 2\zeta^2 + \zeta^3, 3\zeta^2 - 2\zeta^3, -\zeta^2 + \zeta^3\} \quad (22)$$

로써 형상 함수 벡터 (shape function vector)이다.

식 (18)과 (19)를 이용하여 식 (15)를 정리하면,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{i_d-1} \left[\delta H^{T(i)} \frac{\lambda^2}{N^4} [A] H^{(i)} + \delta \Phi^{T(i)} \frac{\lambda^2 R}{N^2} [A] \Phi^{(i)} \right. \\ & \quad + \delta \Phi^{T(i)} [B] \Phi^{(i)} \\ & \quad + \left\{ \delta H^{(i)} \delta \Phi^{(i)} \right\} \frac{S}{N^2} \begin{bmatrix} [B] & [Q_1] \\ [Q_2] & [A] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H^{(i)} \\ \Phi^{(i)} \end{Bmatrix} \\ & \quad - \delta H^{T(i)} \frac{Q \{ (i-1)[B] + [C] \}}{N^3(1+\alpha+\nu)} H^{(i)} \\ & \quad - \frac{aQ}{N^3(1+\alpha+\nu)} \{ \delta H^{T(c)} [E] H^{(c)} \\ & \quad + \sum_{i=c+1}^{i_d-1} \delta H^{T(i)} [B] H^{(i)} \} \\ & \quad + \sum_{i=i_d}^N \left[\delta H^{T(i)} \frac{f^2 \lambda^2}{N^4} [A] H^{(i)} + \delta \Phi^{T(i)} \frac{f^4 \lambda^2 R}{N^2} \right. \\ & \quad \left. [A] \Phi^{(i)} + \delta \Phi^{T(i)} f^4 [B] \Phi^{(i)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \{ \delta H^{(i)} \delta \Phi^{(i)} \} \frac{f^2 S}{N^2} \begin{bmatrix} [B] & [Q_1] \\ [Q_2] & [A] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H^{(i)} \\ \Phi^{(i)} \end{Bmatrix} - \delta H^{T(i)} \\ & \frac{Q \{ (i_d-1)[B] + f^2(i-i_d)[B] + f^2[C] \}}{N^3(1+\alpha+\nu)} H^{(i)} \\ & + \delta H^{T(c)} \frac{a\lambda^2}{N^3} [D] H^{(c)} + \delta \Phi^{T(c)} \frac{\beta\lambda^2}{N} [D] \Phi^{(c)} \\ & + \delta H^{T(i)} \frac{Q}{N^2} \{ K_6 [L_1] H^{(b)} + [L_2] H^{(N)} \} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

와 같은 행렬 방정식을 얻게 된다.

식 (23)의 일반화된 좌표 \$H\$와 \$\Phi\$를

$$\{H^T \ \Phi^T\} = V^T \quad (24)$$

라 놓고 식 (24)를 식 (23)에 대입하고 \$N\$개의 요소에 대하여 조합하면 최종적으로 다음과 같은 결과 행렬 방정식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} & \{ \lambda^2 ([M_1] + [M_2] + [M_3]) + ([K_1] + [K_7]) \\ & \quad - \frac{Q}{N^2} ([K_2] + [K_8]) - \frac{Q}{N} ([K_3] \\ & \quad + [K_4] - [K_5] - [K_6]) \} V = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

식 (25)는 행렬 고유치 방정식

$$\{ \lambda^2 [M] + [K] \} V = 0 \quad (26)$$

로 쓸 수 있고 고유치 문제를 푸는 프로그램이 사용되어야 한다.

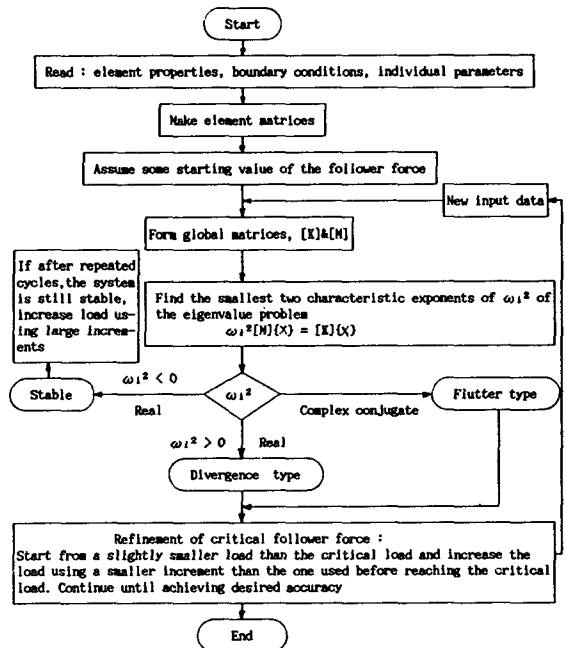


Fig. 4 Flow chart for software of nonconservative problem

Fig. 4는 본 연구에서 사용한 프로그램에 대한 흐름도(flow chart)를 보여준다.

2.4 안정성의 해석

비 보존력을 받는 탄성계의 안정성 해석에 있어서는 일반적으로 동적 안정성 해석 방법이 적용되어진다. 이러한 방법은 비 보존계에 작은 진동을 수반하는 초기 교란이 존재하는 것으로 가정한 후, 이 교란의 크기가 시간에 따라 감소하는 경향을 지니면 안정한 것으로 해석하고 반면에 진동이 시간에 따라 무한대로 증가하는 경향을 가지면 불안정한 것으로 해석한다⁽¹³⁾.

고유치의 값은 일반적으로 다음과 같은 형태의 복소수

$$\omega = \omega_R + i\omega_I \quad (27)$$

로 나타낼 수 있으며, 이 고유치는 계의 안정성과 관련하여 다음과 같이 해석된다.

(1) $\omega_R < 0$ 인 경우 : 시간이 지남에 따라 교란의 폭이 감소하므로 계는 안정하다.

(2) $\omega_R = 0$ 의 경우 : 시간의 증가에 따라 일정한 폭의 교란을 갖는 주기적인 진동이 존재하므로 계는 안정한 것으로 해석된다.

(3) $\omega_R = \omega_I = 0$ 의 경우 : 강체 운동(rigid body motion)을 수반하는 경우이며, 이 경우 계는 안정한 것으로 간주된다.

(4) $\omega_R > 0$ 의 경우 : 시간의 증가와 함께 교란의 폭은 계속 증가되어 계는 불안정하게 되며, ω_I 의 부호에 따라 다음과 같은 두가지 형태로 분류된다.

- (i) $\omega_I = 0$; 진동이 발생치 않는 발산형(divergence type)의 불안정
- (ii) $\omega_I \neq 0$; 진동의 수반과 함께 교란의 폭이 무한히 증가하는 플러터형(flutter type)의 불안정

3. 수치결과 및 고찰

본 연구에서는 중동력을 받고 단의 변화가 있는 자유 Timoshenko보의 동적 안정성을 유한 요소법을 이용하여 해석하였고, 유한 요소의 수는 8개로 나누었으며, 고유치를 구하는 문제는 EISPACK PACKAGE에 있는 일반적 고유치 문제에 대한 프로그램을 개발 이용하였다. 연구 결과의 타당성 검토를 위해 기존의 Euler-Bernoulli보의 조건식과 비교하였으며, 특히, 단의 위치변화, 질량 분포의

영향, 방향 제어의 변화에 대한 보의 동적 안정성에 관한 연구를 하여 다음과 같은 결과를 얻었다.

(1) 중동력의 방향이 제어되지 않는 경우

중동력의 방향이 제어되지 않는 경우, 계는 2개의 영(zero)의 값을 갖는 고유치(1, 2차)를 가지며 이들은 각각 강체의 선형운동(rigid body translation)과 강체의 회전운동(rigid body rotation)에 관계된다. 안정성 해석에 있어서 강체성 불안정 현상은 발생되지 않는다고 가정하고 영이 아닌 고유치들로부터 안정성을 해석하였다.

Fig. 5에서는 단의 변화가 있는 경우와 단의 변화가 없는 두 경우에 대하여 집중 질량의 영향을 보여준다. 그림에서 알 수 있듯이 집중질량의 존재로 인하여 임계 중동력 값이 증가된다. 또한, 집중 질량이 존재하는 경우 단의 변화가 있는 쪽($Q_{cr}/\pi^2 = 13.7$)이 단의 변화가 없는 쪽($Q_{cr}/\pi^2 = 16.3$)보다 임계 중동력 값이 15.9% 감소됨을 알 수 있으나 집중질량이 없는 경우는 단의 변화가 없는($Q_{cr}/\pi^2 = 10.4$) 것이 단의 변화가 있는 쪽(Q_{cr}/π^2

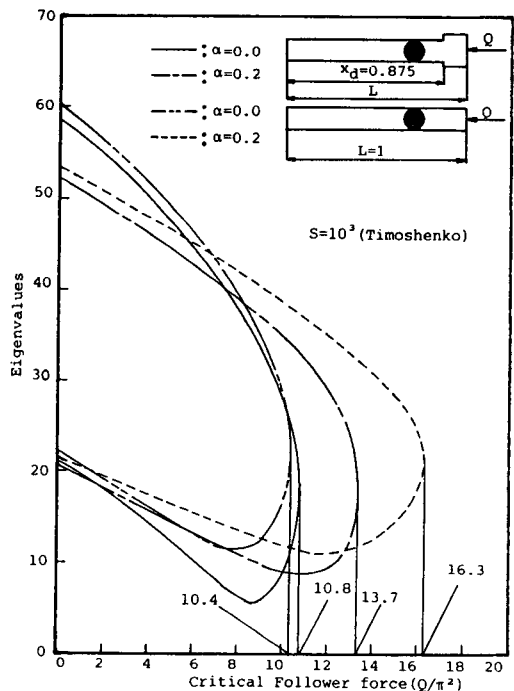


Fig. 5 Critical follower force upon concentrated mass of the beam without force direction control ($R=0.0, K_s=0.0, \mu=0.7, \xi_d=0.875, \beta=0.0, f=1.2$)

=10.8)보다 임계 종동력 값이 3.7% 감소됨을 알 수 있다.

Fig. 6은 방향이 제어되지 않는 불연속 단면의 경우에 대하여 보 내의 집중질량의 크기와 위치가 계의 동적 안정성에 미치는 영향을 나타낸다. 첫째

집중질량의 위치 μ 가 $\mu \leq 0.5$ 에서는 집중질량의 크기 α 가 증가함에 따라 플러터형 불안정을 유발하는 임계 종동력 Q_{cr}/π^2 값은 감소되나 $\mu > 0.5$ 에서는 α 의 증가에 따라 임계 종동력 값은 증가된다. 둘째, 보의 전단 변형 매개변수 S 값이 $S=10^6$ 인

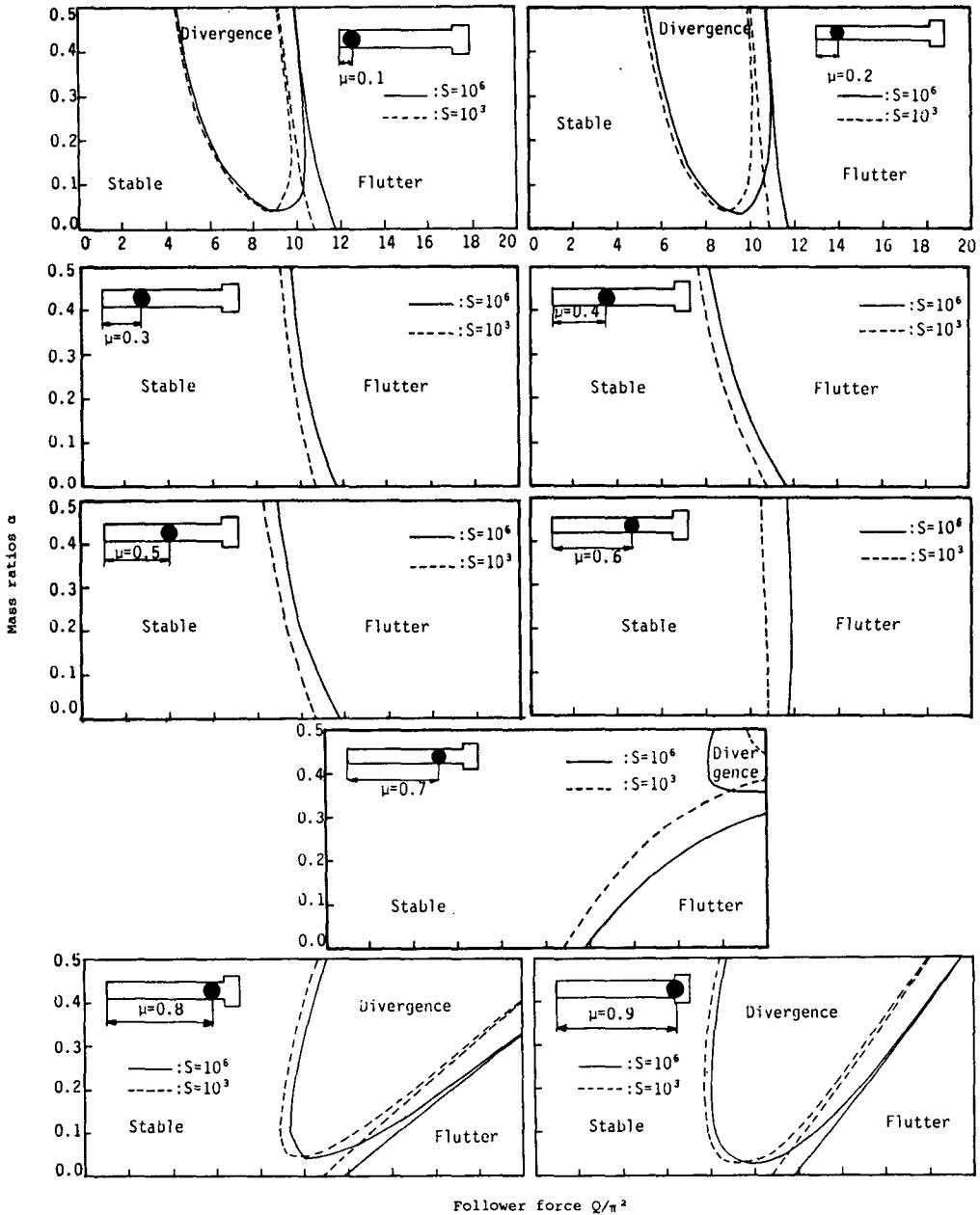


Fig. 6 Stability for first two bending vibration modes of discontinuous beam without force direction control ($R=0.0, K_\theta=0.0, \xi_d=0.875, \beta=0.0, f=1.2$)

Euler-Bernoulli 보의 경우가 $S=10^8$ 인 Timoshenko보의 경우보다 플러터형 불안정을 유발하는 임계 종동력 값이 더 크다. 이는 균일 단면의 경우인 이전의 연구결과⁽¹¹⁾에서와 같은 경향을 나타낸다. 세째, 최대 안정 영역을 나타내는 집중질량의 위치는 $\mu=0.7$ 이며 집중 질량의 크기는 $S=10^6$ 일 때 $0.31 < \alpha < 0.36$, $S=10^8$ 일때, $0.38 < \alpha < 0.45$ 의 범위이다.

Fig. 7은 집중질량의 위치와 크기를 고정시킨 상태에서 불연속 단면의 위치 변화에 따른 고유치의 변화를 나타내는 그림으로써 불연속 단면의 위치 $\xi_d=0.75$ 에서 가장 작은 임계 종동력 값을 나타내며, $\xi_d=0.375$ 에서 최대 임계 종동력 값을 갖는다.

(2) 종동력의 방향이 제어되는 경우

종동력의 방향이 제어되는 경우 영의 값을 갖는 고유치(1차)가 1개 나타나며 강제운동 중 회전에 관계되는 강제운동을 제어하게 된다.

Fig. 8은 전단변형 매개변수 S 값과 단의 변화에 따른 임계 종동력 값을 보여준다. 첫째, 불연속 단면이 존재하는 경우, 집중질량의 유무에 관계없이

임계 종동력 값은 증가된다. 이는 방향이 제어되지 않고 집중질량이 존재하는 경우와는 상이한 경향을 나타낸다. 둘째, 전단변형 매개변수 S 값은 $S > 10^8$ 에서는 불연속 단면의 유무에 관계없이 임계 종동력 값에 거의 영향을 미치지 못한다.

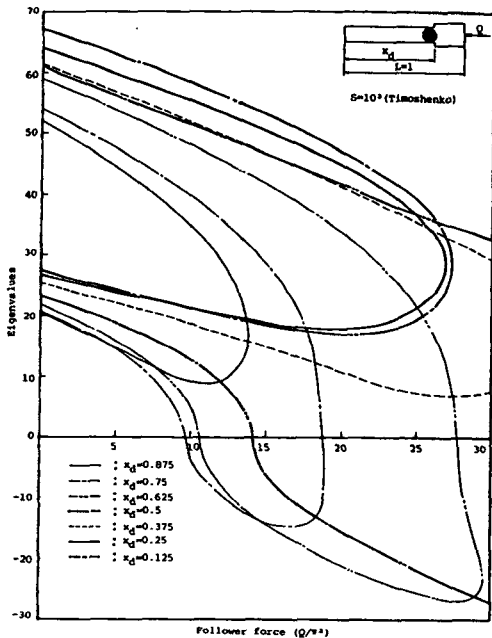


Fig. 7 Stability dependence upon discontinuity variations of beam without force direction control ($R=0.0$, $K_\theta=0.0$, $\mu=0.7$, $\alpha=0.2$, $\beta=0.0$, $f=1.2$)

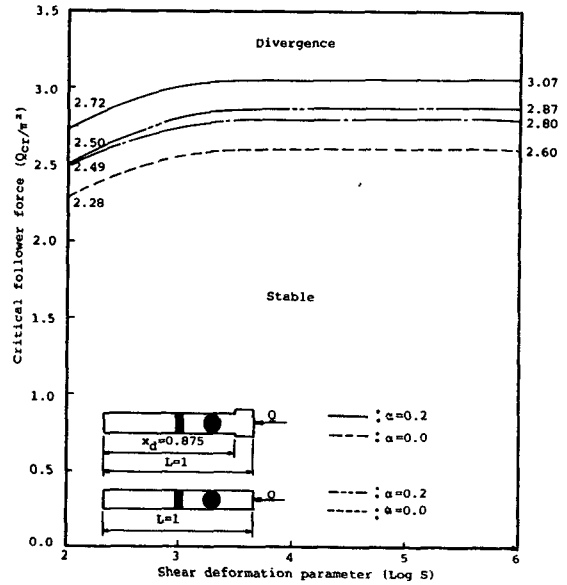


Fig. 8 Dependence of divergence force at instability upon shear deformation parameter of the beam and concentrated mass of the beam with force direction control ($R=0.0$, $K_\theta=1.0$, $\mu=0.7$, $\beta=0.0$, $\sigma=0.5$, $f=1.2$)

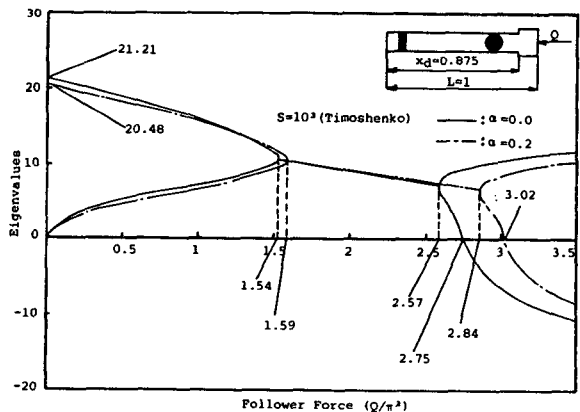


Fig. 9 Dependence of critical follower force according to the location of sensor of the beam with force direction control ($R=0.0$, $K_\theta=1.0$, $\mu=0.7$, $\beta=0.0$, $\xi_d=0.875$, $\sigma=0.1$, $f=1.2$)

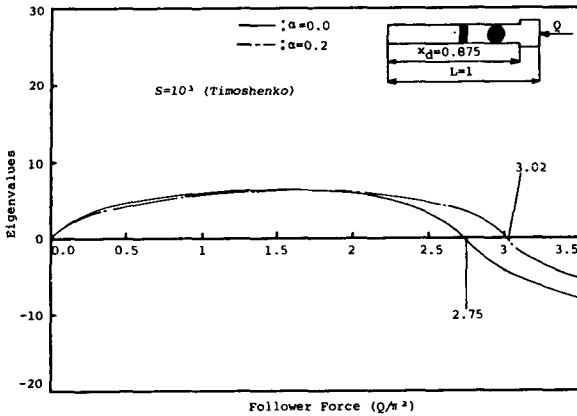


Fig. 10 Dependence of critical follower force according to the location of sensor of the beam with force direction control ($R=0.0, K_\theta=1.0, \mu=0.7, \beta=0.0, \xi_d=0.875, \sigma=0.5, f=1.2$)

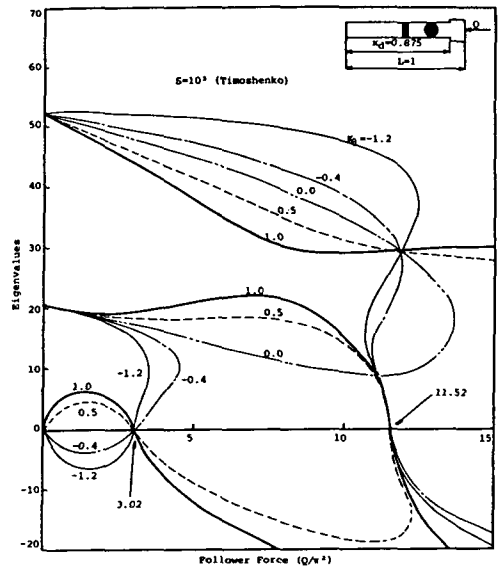


Fig. 12 Critical follower force of instability depended upon control constant of discontinuous beam with force direction control. ($R=0.0, \alpha=0.2, \beta=0.0, \mu=0.7, \xi_d=0.875, \sigma=0.5, f=1.2$)

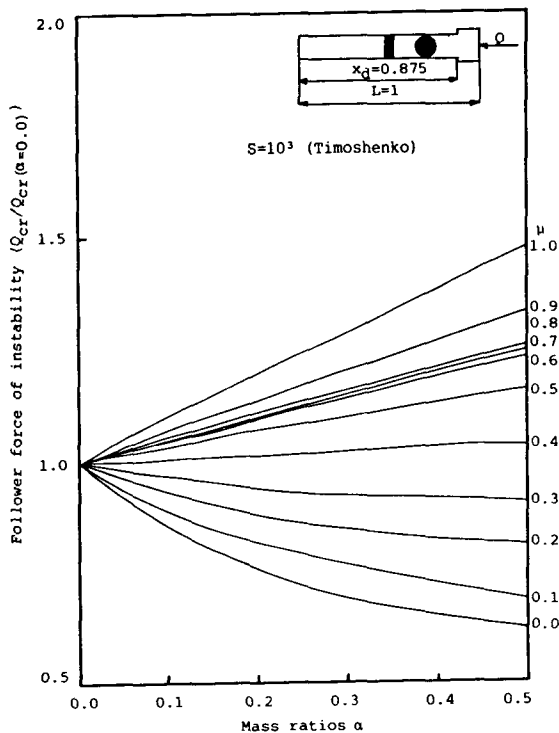


Fig. 11 force at instability of discontinuous Timoshenko beam with force direction control ($R=0.0, K_\theta=1.0, \beta=0.0, \xi_d=0.875, \sigma=0.5, f=1.2$)

센서의 위치 변화 및 집중질량의 크기가 계의 동적 안정성에 미치는 영향의 한 예가 Fig. 9와 Fig. 10에서 보여진다. 센서가 보의 앞부분($\sigma=0.1$)에

위치하는 경우는 초기 플러터형 불안정, 보의 중간 부분($\sigma=0.5$)에 위치하는 경우는 발산형의 불안정이 나타나며 후자의 경우가 더 큰 임계 종동력 값을 갖는다. 또한 단면형상이 변하는 본 연구의 경우가 균일 단면인 이전의 연구⁽¹¹⁾에서의 임계 종동력 값보다 집중질량의 유무에 관계없이 더 크다.

Fig. 11는 종동력의 방향이 제어되는 경우, 집중질량의 크기, α 와 집중 질량의 위치 μ 의 변화에 따른 임계 종동력 값을 나타낸다. 집중질량의 위치 μ 가 $\mu \geq 0.4$ 부분에서는 집중질량의 크기 α 가 증가됨에 따라 임계종동력 값은 증가되나 $\mu < 0.4$ 부분에서는 집중질량의 크기 α 가 증가함에 따라 임계 종동력 값은 감소된다.

Fig. 12는 방향이 제어 되는 경우, K_θ 의 변화에 따른 안정, 불안정을 보여 주는 그림으로 K_θ 가 $K_\theta > 0$ 일 때는 추진력이 영부터 증가하여 $Q/\pi^2=3.02$ 가 될때까지는 안정하나 $K_\theta < 0$ 일때는 $Q/\pi^2=3.02$ 때까지 불안정한 상태를 나타낸다.

4. 결 론

본 연구에서는 불연속 단면과 집중질량을 갖는 자유 Timoshenko보에 일정크기의 종동력이 작용

할 때에 대한 보의 동적 안정성을 유한요소법을 이용한 수치해석을 하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 종동력의 방향이 제어되지 않는 경우
 - (i) 불연속 단면의 유무에 관계없이 집중질량의 존재는 임계 종동력 값을 증가시킨다.
 - (ii) 집중질량의 위치 μ 가 $\mu \leq 0.5$ 에서는 집중질량의 크기 α 가 증가함에 따라 임계 종동력 값은 감소하고 $\mu > 0.5$ 에서는 α 의 증가에 따라 임계 종동력 값이 증가한다.
 - (iii) 보의 불연속 단면의 위치 $\xi_a = 0.75$ 부근에서 최소 임계 종동력 값을 나타낸다.
- (2) 종동력의 방향이 제어되는 경우
 - (i) 보의 전단변형 매개변수 S 값이 $S > 10^3$ 부분에서는 S 값이 임계 종동력 값에 미치는 영향은 거의 없다.
 - (ii) 집중질량의 위치 μ 가 $\mu \geq 0.4$ 에서는 집중질량의 크기 α 가 증가함에 따라 임계 종동력 값은 증가하나 $\mu < 0.4$ 에서는 α 의 증가에 따라 임계 종동력 값은 감소한다.
 - (iii) 집중질량의 유무에 관계없이 불연속 단면의 위치 ξ_a 가 $\xi_a \geq 0.25$ 에서는 불연속 단면의 위치가 추진력이 작용하는 쪽에 가까울수록 임계 종동력 값은 감소되고 $\xi_a = 0.25$ 에서 최대 임계 종동력 값을 나타낸다.
 - (iv) 방향제어상수 K_θ 가 $K_\theta > 0.0$ 일때는 추진력이 영부터 증가하여 임계 종동력 값이 될 때까지 안정하나, $K_\theta < 0.0$ 에서는 불안정하다.

참 고 문 헌

- (1) Silverberg, S., 1959, "The Effect of Longitudinal Acceleration upon the Natural Modes of Vibration of a Beam", Technical Report, Space Technology Lab.
- (2) Beal, T.R., 1965, "Dynamic Stability of Flexible Missile under Constant and Pulsating Thrusts", AIAA Jour., Vol. 3, No. 3, pp. 486~494.
- (3) Mote, C.D., 1971, "Nonconservative Stability by Finite Element", Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the ASCE, Vol. 3, p. 645~659.
- (4) Barsoum, R.S., 1971, "Finite Element Method Applied to Problem of Stability of a Nonconservative Systems", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 3, pp. 63~87.
- (5) Matsumoto, G.Y. and Mote, C.D., 1972, "Time Delay Instabilities in Large Order System with Controlled Follower Force", Journal of Dynamic System, Measurement and Control, Trans. of ASME, Vol. 94, pp. 330~334.
- (6) Wu, J.J., 1975, "On the Stability of a Free-Free Beam under Axial Thrust Subjected to Directional Control", Journal of Sound and Vibration, Vol. 43, No. 1, pp. 45~52.
- (7) Wu, J.J., 1976, "Missile Stability Using Finite Elements on Unconstrained Variational Approach", AIAA journal, Vol. 14, No. 3, pp. 313~319.
- (8) Wu, J.J., 1976, "On Missile Stability", Journal of Sound and Vibration, Vol. 49, No. 1, pp. 141~147.
- (9) 박영필, 김찬수, 1981, "유한요소법에 의한 미사일의 안정성에 관한 연구", 대한기계학회논문집, 제 5 권, pp. 293~302.
- (10) Park, Y.P. and Mote, C.D., 1985, "The Maximum Controlled Follower Force on a Free-Free Beam Carrying a Concentrated Mass", Journal of Sound and Vibration, Vol. 98, No. 2, pp. 247~256.
- (11) Park, Y.P. and Ryu, B.J., 1987, "Effect of a Concentrated Mass on the Stability of a Free Timoshenko Beam under a Controlled Follower Force", KSME/JSME Vibration Conference '87, pp. 309~318.
- (12) 박영필, 류봉조, 지태한, 1988, "주기적인 종동력을 받는 양단 자유 Timoshenko보의 파라미터 불안정", 대한기계학회 춘계학술대회 초록집, pp. 77~83.
- (13) Timoshenko, S.P., 1975, "Theory of Elastic Stability (2nd edition)", McGraw-Hill Company, pp. 286~295.