

〈論 文〉

SEN시편에서의 무계함수 계산

안 득 만*

(1990년 10월 8일 접수)

Calculation of Weight Functions in Single Edge Notched Specimen

Deuk Man An

Key Words : Weight Function(무계함수), Regular Field(정상장), Fundamental Field(기초장), Stress Intensity Factor(응력확대계수), Maxwell-Betti's Reciprocity Theorem(맥스웰 베티의 상반정리), Griffith Crack(그리피스 균열)

Abstract

In this paper, the weight functions for the Mode I and Mode II in SEN (single edge notched) specimen are obtained by superposition of the displacements in the singular field of the Bueckner type and the displacements by opposite tractions induced by the singular field. The stress intensity factors, K_I and K_{II} , are calculated by the weight function theory in SEN specimen under the loading equivalent to uniform tension and shear at infinity in Griffith crack. And the results are compared with the exact solutions.

1. 서 론

응력확대계수는 구조물의 파괴를 해석하는데 있어서 매우 중요한 변수이다. 응력확대계수를 구하는 방법에는 여러가지가 알려져 있다⁽¹⁾. 그 중에서 무계함수이론(weight function theor)은 응력확대계수를 구하고자 하는 균열 끝에서 변위가 Bueckner형의 특이성을 가지고 경계 및 체적에 작용하는 하중이 없는 장(field)에서의 변위를 구하면 임의의 하중에 대한 응력확대계수는 다 구할 수 있다는 장점으로 인하여 많은 공학자들에 의하여 연구되고 있다^(2,3). 여기서 균열끝에서 변위가 Bueckner형의 특이성을 가지고 하중이 작용하지 않는 장을 기초장(fundamental field)이라하고 이때의 변위를 무계함수라 한다. 무계함수이론은

1970년 Bueckner에 의하여 처음 소개되었다⁽⁴⁾. 1972년 Rice⁽⁵⁾는 정상장(regular field)을 균열 길이에 대하여 미분하여서 기초장을 구하였고 무계함수이론을 Green의 함수로 해석하였다. 그리고 이 방법은 가상균열성장법(virtual crack extension method)이란 이름으로 응력확대계수를 수치해석으로 구하는데 쓰이고 있다⁽⁶⁾. 그러나 이 방법은 수치적으로 미분을 행함으로써 근본적으로 신뢰도에 문제가 있다. 1976년 Paris, McMeeking 그리고 Tada⁽⁷⁾ 등은 SEN(single edge notched)시편의 경우 균열 선단에 작은 구멍을 내고 구멍주위를 따라 Bueckner변위장을 주고 그의 경계선을 따라서는 하중이 작용하지 않는 혼합형 경계치문제를 유한요소법으로 해석하여 무계함수를 구했다. 그러나 이 방법은 균열선단에 있는 구멍의 반경을 정하는 기준이 없고 변위가 주어지는 부분이 응력과 변형률이 매우 큰 균열 선단이므로 이에 따른 오차가 있게 된다. 본 논문에서는 이러한 결점이 없는 방법으

* 정희원, 부산대학교 공과대학 생산기계공학과

로 무계함수를 구하는 방법을 제시하고 실제로 SEN 시편에서의 무계함수를 구하여 그리피스 균열과 등가인 하중이 SEN시편의 경계에 작용할 때의 응력확대계수를 구하여 엄밀해와 비교해 보고자 한다.

2. 이론해석

2.1 정상장(Regular Field)

본 논문에서 고려하는 문제는 등방성 재료로 된 2차원 문제 즉 평면 변형도 및 평면 응력인 경우이고 체적력(body force)은 없다고 가정한다. 작은 변형으로 가정하여 미소탄성이론을 사용한다. 그리고 유한한 탄성체가 가질 수 있는 탄성에너지는 유한하다고 가정한다. 이와 같은 가정이 성립하는 장을 정상장이라 한다. Kolosov-Muskhelishvili 함수 $\phi(z)$, $\psi(z)$ 를 사용하면 장량(field quantities)인 응력 및 변위등은 다음과 같이 나타낼 수 있다⁽⁸⁾.

$$\sigma_x = Re[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)} - z\overline{\phi''(z)} - \overline{\psi'(z)}] \quad (1)$$

$$\sigma_y = Re[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)} + z\overline{\phi''(z)} + \overline{\psi'(z)}] \quad (2)$$

$$\tau_{xy} = Im[\overline{z}\phi''(z) + \psi'(z)] \quad (3)$$

여기서 Re 및 Im 은 실수부와 허수부를 함수위에 있는 선은 공액 복소수(complex conjugate)를 각각 의미한다. 그리고 평면 변형도에서의 복수 변위벡터 w 즉 $w = u + iv$ 는

$$2\mu w = k\overline{\phi(z)} - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)} \quad (4)$$

로 나타낼 수 있다. 여기서 μ 와 k 를 영(Young)의 계수, E , 와 프와송(Poisson)의 비, ν , 를 사용하여 표현하면 다음과 같다.

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad k = 3 - 4\nu$$

그리고 평면 응력인 경우에는 k 대신 k^* 를 사용한다.

$$k^* = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$$

단위 면적당 작용하는 면력(traction) 벡터, Z , 와 모멘트, M , 같이 쓸 수 있다.

$$Z ds = (X + iY) ds = -idP \quad (5)$$

$$M = Re[x(z) - z\phi(z) - z\overline{z}\overline{\phi'(z)}] \quad (6)$$

여기서 $P(z)$ 와 $x(z)$ 는 다음과 같다.

$$P(z) = \phi(z) + z\overline{\phi'(z)} + \overline{\psi(z)}$$

$$x(z) = \int \psi(z) dz$$

직선 균열 문제를 다루는 경우에는 함수 $\psi(z)$ 대신

$$\rho(z) = \psi(z) + z\phi'(z)$$

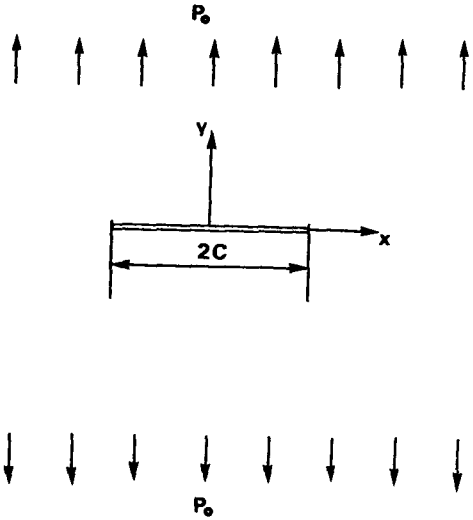


Fig. 1 Griffith crack under uniform tension at infinity

를 사용하면 편리하다⁽⁹⁾ 응력, 변위 및 함수 $P(z)$ 을 $\phi(z)$ 와 $\rho(z)$ 를 사용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\sigma_x = Re[\phi'(z) + 2\overline{\phi'(z)} - \overline{\rho'(z)} + (\overline{z} - z)\overline{\phi''(z)}] \quad (7)$$

$$\sigma_y = Re[\phi'(z) + \overline{\rho'(z)} - (\overline{z} - z)\overline{\phi''(z)}] \quad (8)$$

$$\tau_{xy} = -Im[\phi'(z) + \overline{\rho'(z)} - (\overline{z} - z)\overline{\phi''(z)}] \quad (9)$$

$$2\mu w = x\phi(z) - \overline{\rho(z)} + (\overline{z} - z)\overline{\phi'(z)} \quad (10)$$

그리고

$$P(z) = \phi(z) + \overline{\rho(z)} + (z - \overline{z})\overline{\phi'(z)}$$

이다. 이들 함수를 이용하여 그리피스(Griffith) 균열 즉, 균열 길이가 $2c$ 인 무한평판,에 인장응력 P_0 가 Fig. 1에서처럼 $y = \infty$ 에서 작용할 때 Kolosov-Muskhelishvili 함수 $\phi(z)$ 와 $\rho(z)$ 는 다음과 같다.

$$\phi(z) = \frac{P_0}{4}(2\sqrt{z^2 - c^2} - z) \quad (11)$$

$$\rho(z) = \frac{P_0}{4}(2\sqrt{z^2 - c^2} + z) \quad (12)$$

위와 같은 변형은 균열 면을 벌리는 형상으로서 모드 I 이 된다. 만약 Fig. 2에서처럼 무한대에서 전단력 Q_0 가 작용할 때 함수 $\phi(z)$ 와 $\rho(z)$ 는 다음과 같다.

$$\phi(z) = \frac{iQ_0}{4}(z - \sqrt{z^2 - c^2}) \quad (13)$$

$$\rho(z) = \frac{iQ_0}{4}(z + \sqrt{z^2 - c^2}) \quad (14)$$

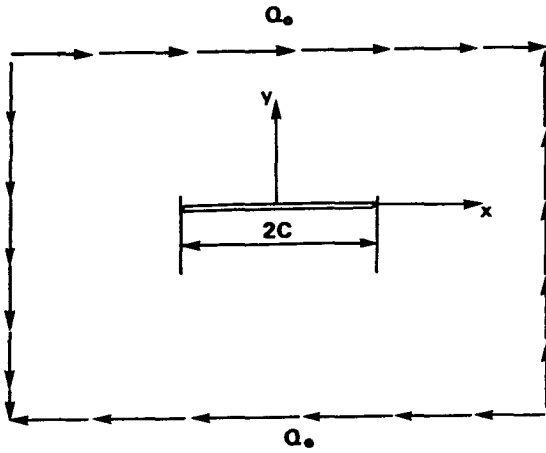


Fig. 2 Griffith crack under uniform shear at infinity

위의 변형은 균열면을 x 방향으로 미끄러지게 하는 모드 II가 된다. 식 (11), (12), (13), (14) 등에서 알 수 있듯이 정상장인 경우 균열 끝 부근에서 함수 $\phi(z)$, $\rho(z)$ 는 점근적으로 (asymptotically) 다음과 같다.

$$\phi(z) \cong a\sqrt{z-c} \quad (15)$$

$$\rho(z) \cong b\sqrt{z-c} \quad (16)$$

여기서 a, b 는 복소 상수 (complex constant)이다. 복소상수 a, b 는 균열면에서 면력이 없다는 조건때문에 서로 독립적으로 변할 수 없다. 식 (7), (8), (9)를 사용하여 균열 선단에서의 응력을 구하면 응력은 $1/\sqrt{r}$ 의 특이점 (singularity)을 가진다. 여기서 r 은 균열 끝에서부터의 거리를 나타낸다. 일반적으로 복소상수 a, b 대신 실수부와 허수부로 나누어서 새로운 변수 K_I 와 K_{II} 를 사용한다. 이들 새로운 변수를 응력확대계수라 한다. 등방성 재료인 경우에는 Mode I인 경우에는 응력 변위 등이 균열면에 대하여 대칭이고 모드 II 일때에는 스쿼 (Skew)대칭이 된다. 이러한 관계는 일반적으로 이방성 재료인 경우에는 성립되지 않는다. 균열 끝을 중심으로 한 극좌표계, r, θ , 를 사용하여 각 모드에 대한 응력을 쓰면 다음과 같다.

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (17)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (18)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (19)$$

그리고 모드 II 일 때에는 다음과 같다.

$$\sigma_x = \frac{K_{II}}{\sqrt{\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (20)$$

$$\sigma_y = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (21)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (22)$$

그리피스 균열인 경우 각 모드에서의 응력확대계수는 식 (11), (12), (13), (14)을 사용하여 균열 끝에서의 응력 σ_y 와 τ_{xy} 를 식 (8)과 (9)으로부터 구한 다음 식 (18), (22)와 비교하면 다음과 같다.

$$K_I = P_0 \sqrt{\pi c} \quad (23)$$

$$K_{II} = Q_0 \sqrt{\pi c} \quad (24)$$

2.2 기초장 (Fundamental Field)

기초장은 유한물체에서 균열면 및 모든 경계에서 면력이 없고 응력확대계수를 구하고자 하는 균열 끝부분에서의 변위가 $1/\sqrt{r}$ 의 거동을 하는 변위장을 일컫는 말이다. 무한 물체인 경우에는 무한대에서의 응력 및 변위가 각각 $1/r\sqrt{r}$, $1/\sqrt{r}$ 로써 변하고 모든 면에서의 면력이 없는 변위장을 말한다. 그리고 이러한 성질을 갖는 기초장에서의 변위를 무게함수 (weight function)라 한다. 균열 끝을 포함하는 탄성에너지는 변위가 $1/\sqrt{r}$ 에 비례하므로 무한대가 된다. 이와 같은 이유로 기초장은 유일 (uniqueness)하지 않게 된다. 그러나 표준화 (normalization)는 할 수 있다. 이러한 성질을 갖는 기초장을 구하는 방법은 표준화된 Bueckner형의 특이함수 $\phi_s(z)$, $\rho_s(z)$ 와 이들 함수에 의하여 생기는 면력을 없애는 정상장 $\phi_r(z)$ 및 $\rho_r(z)$ 를 중첩하여 구한다. 즉 모드 I인 경우 균열 끝을 좌표의 원점으로 생각하였을 때 표준화 된 특이함수는 다음과 같다.

$$\phi_s(z) = \rho_s = \frac{a}{\sqrt{z}} \quad (25)$$

여기서

$$a = -\frac{2\mu}{k+1}$$

이다. 이들 함수에 의한 변위는 식 (10)으로부터 다음과 같이 구해진다.

$$u_s = \frac{1}{2(1-\nu)\sqrt{r}} \left(2\nu - 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \cos \frac{\theta}{2} \quad (26)$$

$$v_s = \frac{1}{2(1-\nu)\sqrt{r}} \left(2 - 2\nu - \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \sin \frac{\theta}{2} \quad (27)$$

그리피스 균열인 경우에는 식 (26)과 (27)의 변위가 바로 무계함수가 된다. 유한 물체인 경우에는 $\phi_s(z)$, $\rho_s(z)$ 에 의한 면력이 경계면에 발행하게 된다. 따라서 이와 크기는 같고 방향이 반대되는 면력에 의한 장에서의 변위를 식 (26)과 (27)로 주어진 변위와 합하면 유한 물체에서의 무계함수가 된다.

모드 II에서의 표준화된 특이함수는

$$\phi_s(z) = -\rho_s(z) = -\frac{\alpha i}{\sqrt{z}} \quad (28)$$

와 같이 되고 변위는 다음과 같다.

$$u_s = \frac{1}{2(1-\nu)\sqrt{r}} \left(2 - 2\nu + \cos\frac{\theta}{2} \cos\frac{3\theta}{2} \right) \sin\frac{\theta}{2} \quad (29)$$

$$v_s = \frac{1}{2(1-\nu)\sqrt{r}} \left(1 - 2\nu + \sin\frac{\theta}{2} - \sin\frac{3\theta}{2} \right) \cos\frac{\theta}{2} \quad (30)$$

모드 I에서와 같이 그리피스 균열에서의 무계함수는 식 (29)와 (30)으로 주어지고 유한 물체에서는 Bueckner 특이함수에 의하여 경계면에 발생하는 면력과 방향이 반대인 하중이 작용하는 정상장 $\phi_r(z)$, $\rho_r(z)$ 에서의 변위를 중첩하여 구한다.

2.3 무계함수 이론

2차원 문제인 경우 응력확대계수를 구하고자하는 균열 끝 부분에 원통형의 작은 구멍이 있는 도형을 생각한다. 이 도형에서 경계를 따라 기초장과 정상장에 의한 면력과 변위를 구하여 Maxwell-Betti의 상반정리를 적용한 다음 구멍의 반지름을 0으로 보내면 응력확대계수가 정상장의 하중을 매개함수로 한 FUNCTIONAL이 된다. 즉, K_I 과 K_{II} 를 경계를 따른 선 적분(line integral)으로 나타낼 수 있다⁽⁹⁾.

$$K_I = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \int (Xu_r^I + Yv_r^I) ds \quad (31)$$

$$K_{II} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \int (Xu_r^{II} + Yv_r^{II}) ds \quad (32)$$

여기서 X, Y 는 응력확대계수를 구할려고하는 정상장에서의 면력이고 u_r^I, v_r^I 와 u_r^{II}, v_r^{II} 는 각각 모드 I, 모드 II에서의 무계함수이다.

3. 수치 해석

Griffith균열인 경우 등방성에서의 무계함수는 모드 I에서 식 (26)과 (27)로 주어지모 모드 II에서

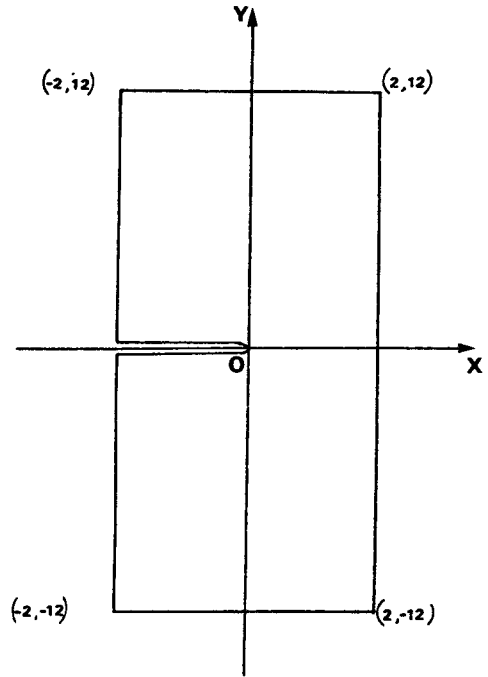


Fig. 3 Geometry of SEN specimen

는 식 (29), (30)로 주어진다. 그러나 유한 물체에서 무계함수를 해석적으로 구하는 것은 특별한 기하학적인 경우를 제외하고는 불가능하다⁽¹⁰⁾. 본 연구에서는 유한요소법을 사용하여 SEN 시편에서 평면변형도 조건에서의 무계함수를 각 모드에 대하여 구하고자 한다. Fig. 3은 SEN 시편의 형상과 치수를 보여준다. 유한요소법에 사용된 요소는 삼각형이고 591개의 질점과 1976개의 요소로 분할하였다.

3.1 모드 I

먼저 식 (25)에 의하여 발생하는 면력을 경계를 따라 계산한다. 계산된 면력과 방향이 반대인 힘을 경계를 따라서 질점에 등가적으로 작용할 때에 SEN 시편에 생기는 변위를 계산하여 식 (26)과 (27)의 변위와 합하면 무계함수가 구해진다. 즉 식 (5)와 (6)을 사용하면 Fig. 4에서 선 증분 ds 에 전달되는 힘과 모멘트는 다음과 같다.

$$Xds = d \left(\frac{\alpha y}{r\sqrt{r}} \cos\frac{3}{2}\theta \right) \quad (33)$$

$$Yds = d \left(\frac{\alpha y}{r\sqrt{r}} \sin\frac{3}{2}\theta + \frac{2\alpha}{\sqrt{r}} \cos\frac{1}{2}\theta \right) \quad (34)$$

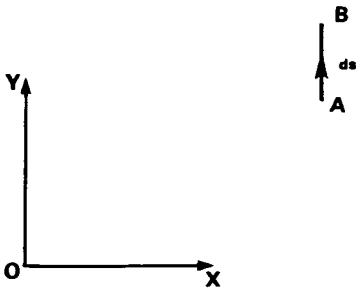


Fig. 4 Orientation of the arc element ds

$$Mds = -d \left\{ \frac{\alpha}{2} \sqrt{r} \left(3\cos \frac{1}{2} \theta + \cos \frac{3}{2} \theta \right) \right\} \quad (35)$$

위에서 주어진 힘과 모멘트를 평형방정식을 사용하여 Fig. 4의 점 A와 점 B에 적용하는 집중 등가 하중으로 바꾸면 다음과 같다.

$$X_A = \frac{1}{2} X' - \frac{xY' - yX' - M'}{ds} \quad (36)$$

$$X_B = \frac{1}{2} X' + \frac{xY' - yX' - M'}{ds} \quad (37)$$

여기서 X', Y', M' 는 각각 식 (33)~(35)에서 주어진 Xds, Yds, Mds , 즉 구간 AB사이에 작용하는 x 방향 및 y 방향의 힘과 모멘트이다. 그리고 x, y 는 점 A와 점 B의 중심 좌표이다. 탄성계수 $E=1500$, 프와송비 $\nu=0.25$ 로 가정하였다. 식 (36) 및 (37)에 의하여 계산된 하중을 경계를 따라 각 절(node)에 작용했을 때 각 절점에서의 변위를 유한요소법으로 구한다. 이렇게 구한 변위와 Bueckner 특이함수에 의한 변위를 합하면 무계함수가 구해진다. Table 1은 이 계산 결과 경계에 있는 절점에서의 무계함수를 보여준다.

3.2 모드 II

모드 II에서의 무계함수 계산도 모드 I에서와 같은 과정을 밟는다. 즉, 식 (28)에 의하여 경계에 발생하는 하중과 방향이 반대인 면력을 등가집중하중으로 바꾼 다음 유한요소법으로 변위를 구하여 Bueckner 특이함수에 의한 변위와 합하면 무계함수가 구해진다. 모드 II에서 식 (33)~(35)에 대응하는 식들은 다음과 같다.

$$Xds = d \left(\frac{\alpha y}{r\sqrt{r}} \sin \frac{3}{2} \theta - \frac{2\alpha}{\sqrt{r}} \cos \frac{1}{2} \theta \right) \quad (38)$$

$$Yds = -d \left(\frac{\alpha y}{r\sqrt{r}} \cos \frac{3}{2} \theta \right) \quad (39)$$

$$Mds = -d \left\{ \frac{\alpha}{2} \sqrt{r} \left(\sin \frac{1}{2} \theta + \sin \frac{3}{2} \theta \right) \right\} \quad (40)$$

Table 2는 모드 II에서 SEN 시편의 경계에 있는 절점에서의 무계함수이다.

4. 엄밀해와 비교

Fig. 5에서와 같이 점선을 따라 면력을 계산하여 점선으로만 된 물체의 경계를 따라 하중을 작용하면 응력 및 변형률은 무한평판안에 있을 때와 같게 된다. 그리고 균열 끝 c 에서의 응력확대계수도 두 물체에서 같게 된다. Griffith 균열에서 인장응력 P_0 및 전단응력 Q_0 가 무한대에서 작용할 때 점 c 에서의 응력확대계수는 식 (23)과 (24)로 주어진다. Fig. 5에서 점선으로된 부분은 SEN 시편으로 볼 수 있다. 따라서 인장응력 P_0 및 전단응력 Q_0 가 무한대에서 작용할 때 Fig. 5의 점선을 따라 면력을 계산하여 SEN 시편의 경계에 작용하면 응력확대계수는 식 (23) 및 (24)와 같게 된다. 인장응력 P_0 가 무한대에서 작용할 때 Fig. 5의 선 증분 ds 에 작용하는 힘과 모멘트를 양균열 끝에서의 길이 r_1, r_2 와 각도 θ_1, θ_2 를 사용하여 표현하면 다음과 같다.

$$Xds = P_0 d \left[\left\{ \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} \left(x \cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + y \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) - 1 \right\} \right] \quad (41)$$

$$Yds = P_0 d \left[\left\{ y \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} \left(x \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + y \cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) - \sqrt{r_1 r_2} \cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right\} \right] \quad (42)$$

$$Mds = \frac{P_0}{2} d \left\{ y^2 - c^2 \log R - \frac{4xy^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right\}$$

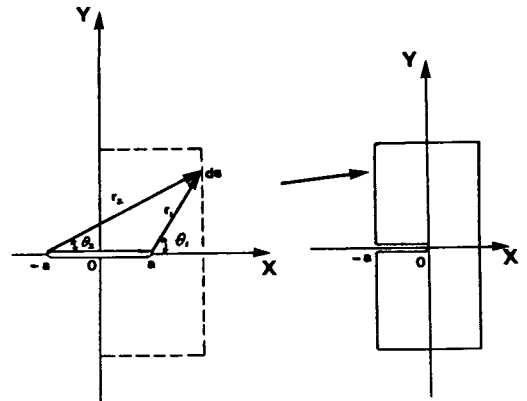


Fig. 5 Griffith crack and SEN specimen

Table 1 Normalized Mode I weight function along the boundary in SEN specimen

<i>x</i>	<i>y</i>	<i>u</i>	<i>v</i>
2.0	0.0	0.5533	0.0
2.0	0.25	0.6320	-0.2597
2.0	0.5	0.8073	-0.4994
2.0	0.75	1.0746	-0.7056
2.0	1.0	1.4118	-0.8703
2.0	1.25	1.7915	-0.9931
2.0	1.5	2.2044	-1.0852
2.0	2.0	3.0605	-1.1897
2.0	2.5	3.9329	-1.2353
2.0	3.0	4.8024	-1.2507
2.0	3.5	5.6623	-1.2558
2.0	4.0	6.5206	-1.2550
2.0	4.5	7.3640	-1.2672
2.0	5.0	8.2278	-1.2504
2.0	5.5	9.0681	-1.2608
2.0	6.0	9.9249	-1.2481
2.0	6.5	10.7665	-1.2569
2.0	7.0	11.6202	-1.2472
2.0	7.5	12.4638	-1.2545
2.0	8.0	13.3154	-1.2468
2.0	8.5	14.1600	-1.2529
2.0	9.0	15.0105	-1.2466
2.0	9.5	15.8561	-1.2518
2.0	10.0	16.7056	-1.2464
2.0	10.5	17.5512	-1.2507
2.0	11.0	18.3998	-1.2462
2.0	11.5	19.2474	-1.2496
2.0	12.0	20.0930	-1.2450
1.5	12.0	20.0947	0.4010
1.0	12.0	20.0939	1.4464
0.5	12.0	20.0947	2.2936
0.0	12.0	20.0950	2.1410
-0.5	12.0	20.0950	2.9884
-1.0	12.0	20.0039	3.8359
-1.5	12.0	20.0008	4.6833
-2.0	12.0	19.9975	5.5311
-2.0	11.5	19.2466	5.5319
-2.0	11.0	18.4015	5.5308
-2.0	10.5	17.5513	5.5318
-2.0	10.0	16.7059	5.5310
-2.0	9.5	15.8564	5.5318
-2.0	9.0	15.0116	5.5313
-2.0	8.5	14.1600	-1.2529
-2.0	8.0	13.3163	-1.2466
-2.0	7.5	12.4645	-1.2518
-2.0	7.0	11.6203	-1.2464
-2.0	6.5	10.7675	-1.2507
-2.0	6.0	9.9250	-1.2462
-2.0	5.5	9.0715	-1.2496
-2.0	5.0	8.2303	-1.2450
-2.0	4.5	7.3778	-1.2450
-2.0	4.0	6.5407	-1.2450
-2.0	3.5	5.6955	-1.2450
-2.0	3.0	4.8526	-1.2450
-2.0	2.5	4.0130	-1.2450
-2.0	2.0	3.1691	-1.2450
-2.0	1.5	3.3168	-1.2450
-2.0	1.25	1.9138	-1.2450
-2.0	1.0	1.4693	-1.2450
-2.0	0.75	1.0527	-1.2450
-2.0	0.5	0.6384	-1.2450
-2.0	0.25	0.2268	-1.2450
-2.0	0.0	-0.1884	-1.2450

Table 2 Normalized Mode II weight function along the boundary in SEN specimen

<i>x</i>	<i>y</i>	<i>u</i>	<i>v</i>
2.0	0.0	0.0	0.3177
2.0	0.25	0.1512	0.3351
2.0	0.5	0.2653	0.3893
2.0	0.75	0.3577	0.4666
2.0	1.0	0.4102	0.5579
2.0	1.25	0.3707	0.6419
2.0	1.5	0.3748	0.7208
2.0	2.0	0.2342	0.8448
2.0	2.5	0.0402	0.9224
2.0	3.0	-0.1766	0.9643
2.0	3.5	-0.3965	0.9863
2.0	4.0	-0.6162	0.9981
2.0	4.5	-0.8463	0.9963
2.0	5.0	-1.0513	1.0048
2.0	5.5	-1.2757	1.0001
2.0	6.0	-1.4829	1.0035
2.0	6.5	-1.7022	0.9999
2.0	7.0	-1.9102	1.0017
2.0	7.5	-2.1269	0.9993
2.0	8.0	-2.3355	1.0004
2.0	8.5	-2.5507	0.9989
2.0	9.0	-2.7600	0.9997
2.0	9.5	-2.9745	0.9987
2.0	10.0	-3.1843	0.9992
2.0	10.5	-3.3982	0.9985
2.0	11.0	-3.6082	0.9987
2.0	11.5	-3.8218	0.9988
2.0	12.0	-4.0321	0.9982
1.5	12.0	-4.0328	0.7869
1.0	12.0	-4.3291	0.5749
0.5	12.0	-4.0329	0.3629
0.0	12.0	-4.0330	0.1509
-0.5	12.0	-4.0329	-0.0610
-1.0	12.0	-4.0332	-0.2729
-1.5	12.0	-4.0334	-0.4845
-2.0	12.0	-4.0340	-0.6962
-2.0	11.5	-3.8203	-0.6972
-2.0	11.0	-3.6101	-0.6962
-2.0	10.5	-3.3962	-0.6973
-2.0	10.0	-3.1864	-0.6962
-2.0	9.5	-2.9720	-0.6975
-2.0	9.0	-2.7627	-0.6963
-2.0	8.5	-2.5476	-0.6976
-2.0	8.0	-2.3390	-0.6961
-2.0	7.5	-2.1233	-0.6976
-2.0	7.0	-1.9158	-0.6958
-2.0	6.5	-1.6993	-0.6973
-2.0	6.0	-1.4939	-0.6955
-2.0	5.5	-1.2769	-0.6973
-2.0	5.0	-1.0752	-0.6965
-2.0	4.5	-0.8576	-0.6997
-2.0	4.0	-0.6604	-0.7033
-2.0	3.5	-0.4547	-0.7143
-2.0	3.0	-0.2469	-0.7343
-2.0	2.5	-0.0334	-0.7701
-2.0	2.0	0.2022	-0.8263
-2.0	1.5	0.4783	-0.8973
-2.0	1.25	0.6197	-0.9202
-2.0	1.0	0.8005	-0.9685
-2.0	0.75	0.9750	-0.9903
-2.0	0.5	1.1520	-1.0021
-2.0	0.25	1.3227	-1.0052
-2.0	0.0	-1.4850	-1.0052

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2(x^2y - y^3)}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \\
 & + y\sqrt{r_1 r_2} \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \\
 & - x\sqrt{r_1 r_2} \cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \}
 \end{aligned}$$

(43)

$$\begin{aligned}
 R^2 = & \left(x + \sqrt{r_1 r_2} \cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right)^2 \\
 & + \left(y + \sqrt{r_1 r_2} \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right)^2
 \end{aligned}$$

이다. 그리고 무한대에서 전단응력 Q_0 가 작용할 때 선 증분 ds 에 작용하는 x 및 y 방향의 힘과 모멘트는 다음과 같다.

여기서

$$Xds = Q_0 d \left[y \left\{ \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} \left(y \cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - x \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \right\} - \sqrt{r_1 r_2} \cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right] \quad (44)$$

$$Yds = Q_0 d \left[y \left\{ \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} \left(x \cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + y \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \right\} \right] \quad (45)$$

$$Mds = Q_0 d \left[\frac{y}{\sqrt{r_1 r_2}} \left\{ (x^2 - y^2) \cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + 2xy \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right\} \right] \quad (46)$$

위의 식들을 식 (36)과 (37)을 사용하여 질점에서의 등가집중하중으로 바꾼 다음 Table 1 및 Table 2에 주어진 무계함수를 사용하여 응력확대계수를 구하면 엄밀해와 비교해 볼 수 있다. 엄밀해는 모두 I 인 경우 식 (23)으로 주어지고 모드 II에서는 식 (24)와 같다. 여기서 $P_0=10000$, $Q_0=10000$ 를 각각 택하면 그림 3.에서 c 는 2가 되므로 K_I , K_{II} 는 똑같이 25066이 된다. 무계함수에 의한 K_I 및 K_{II} 의 계산은 식 (31)과 (32)를 사용하여 구한다. 즉 경계를 따라서 구한 등가집중하중과 거 지점에서의 무계함수를 Table 1, Table 2에서 구하여 서로 곱한다음 수치적으로 적분하면 K_I 은 24355가 되고 K_{II} 는 24697로 구해진다.

5. 결 론

SEN 시편에서의 무계함수를 표준화된 Bueckner 형의 특이함수에 의한 변위와 이 특이장에 의하여 SEN 시편의 경계를 따라 발생하는 면력과 반대방향의 하중에 의한 정상장에서의 변위를 중첩하여 구했다. 이 방법은 종래에 다른 연구자들에 의하여 제안된 방법이 가지고 있는 단점을 개선한 것이다. 이 방법으로 구한 무계함수의 정확도를 알아보기 위하여 그리피스 균열에서 무한대에 일정한 인장응력과 전단응력이 작용하는 하중과 등가인 하중을 SEN 시편의 경계를 따라 작용했을 때 무계함수 이론을 사용하여 모드 I 및 모드 II에서의 응력확대계수를 구했다. 비교 결과 특이요소를 사용하지 않은 유한요소법으로 2% 오차 내외의 응력확대계수를 구할 수 있었다.

후 기

이 논문은 1989년도 한국과학재단 연구비로 수행된 것이며, 이에 사의를 포함합니다.

참 고 문 헌

- (1) Kannien, M.F. and Popelar, C.G., 1985, "Advanced Fracture Mechanics", Oxford University Press.
- (2) Petroski, H.J. and Achenbach, J.D., 1978, "Computation of the Weight Function From a Stress Intensity Factor", Engineering Fracture Mechanics, 10, pp. 257~266.
- (3) Labbens, R.C., Heliot, J. and Pellissier-Tanon, A., 1976, "Weight Functions for Three-Dimensional Symmetrical Crack Problems", ASTM STP 601, pp. 448~470.
- (4) Bueckner, H.F., 1970, "A Novel Principle for the Computation of Stress Intensity Factors", ZAMM, Band 50, No.9, pp. 529~546.
- (5) Rice, J.R., 1972, "Some Remarks on Elastic Crack-Tip Stress Field", Int. J. Solids Structures, Vol.8, No. 6, pp. 751~758.
- (6) Vainshtok, V.A., 1982, "A Modified Virtual Crack Extension Method of the Weight Functions Calculation for Mixed Mode Fracture Problem", International Journal of Fracture, Vol.19, pp. R9~R15.
- (7) Paris, P.C., McMeeking, R.M. and Tada, H., 1976, "The Weight Function Method for Determining Stress Intensity Factors", ASTM STP 601, pp. 471~489.
- (8) Muskhelishvili, N. I., 1953, "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity", Noordhoff, Leiden.
- (9) Bueckner, H.F., 1973, "Field Singularities and Related Integral Representation", in Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems, Edited by G.C. Sih, Noordhoff International Publishing, Leiden, pp. 239~314.
- (10) An, D., 1988, "Weight Function Theory for Notched Structures", Research Report, Pusan Nat. Uni., Vol. 35, pp. 27~29.