

〈論 文〉

## 단섬유 복합재료의 탄성계수 예측

임 태 원\* · 한 경 섭\*\*

(1990년 11월 1일 접수)

### Prediction of Effective Stiffness on Short Fiber Reinforced Composite Materials

Taewon Lim and Kyung S. Han

**Key Words :** Effective Stiffness(유효강성), Laminate Analogy(2차원 유사적층판해석), Transformed Laminate Analogy(3차원 유사적층판해석), 2-D Random Composite(2차원 분포복합재료), 3-D Random Composite(3차원 분포복합재료)

#### Abstract

Effective stiffness of short fiber composite with a three-dimensional random orientation of fibers is derived theoretically and compared with available experimental data. The laminate analogy and transformed laminate analogy are used for modulus prediction of 2-D and 3-D random composites, respectively. The effective stiffness of random oriented fiber composite can be expressed in terms of longitudinal and transverse stiffnesses of unidirectional composites. The result of transformed laminate analogy is more accurate than other approaches such as, Christensen-Waals equation and Lavengood-Goettler equation, etc. Also the effective properties of random oriented fiber composite can be expressed in terms of fiber and matrix properties such as elastic modulus, shear modulus and Poisson's ratio.

#### 1. 서 론

단섬유 복합재료는 우수한 비탄성계수, 비강도, 저렴성, 가공성, 대량생산성 등의 장점으로 인하여 구조용재료로서 많은 관심의 초점이 되고 있다. 그러나, 재래의 재료들과는 상이한 복합재료 특유의 이방성때문에 정확한 물성의 측정 및 예측이 어려워 사용에 많은 제한을 받고 있다. 특히, 비선형 응력-변형률 관계(non-linear stress-strain relation), 불균일한 보강재의 분포, 보강재와 기지의 미소균열(microcrack) 등이 복합재료의 물성에 미치는 영향이 규명되어야 재료의 효율적인 이용이 가능하게 된다. 따라서 복합재료의 물성을 예측하

기 위한 다양한 연구가 보고되어 있다<sup>(1-15)</sup>.

Cox<sup>(1)</sup>는 보강재의 분포함수를 사용하여, Laws<sup>(2)</sup>과 Chou<sup>(3)</sup>는 self-consistent method를, 그리고 Aboudi<sup>(5)</sup>는 일차연속이론(first order continuum theory)을 기초로 하여 복합재료의 탄성계수 예측식을 제시하였다. 한편, Christensen<sup>(6)</sup>은 Cox의 예측식과 실험 결과로부터 실험식을 제안하였다. Tsai-Pagano<sup>(7)</sup>는 2차원 유사적층판해석(laminate analogy)을 이용하여 보강재가 이차원적으로 분포되어 있는 복합재료의 탄성계수를 예측하였으며, Manera<sup>(8)</sup>는 2차원 유사적층판해석과 Puck<sup>(9)</sup>의 결과로 탄성계수 예측식을 제시하였다. 그러나 대부분의 연구보고들은 경험식을 토대로 유도되었기 때문에 특정한 재료에 국한되어 있으며, 보강재의 부피분율의 제한, 보강재 및 기지물성의 제한 등 일반성이 결여되어 있다. 또, 2차원 유사

\* 뉴욕주립대학(버팔로) 기계항공공학과

\*\* 정회원, 포항공과대학 기계공학과

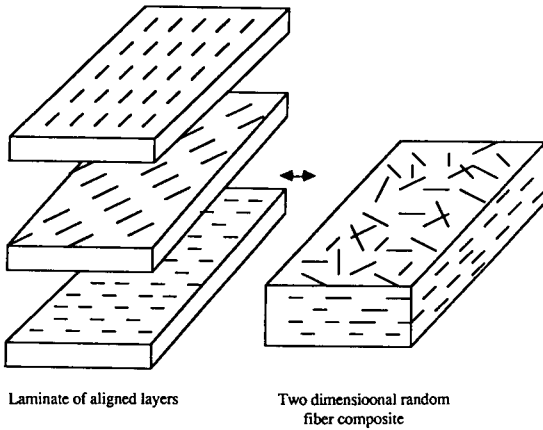


Fig. 1 Laminate analogy model

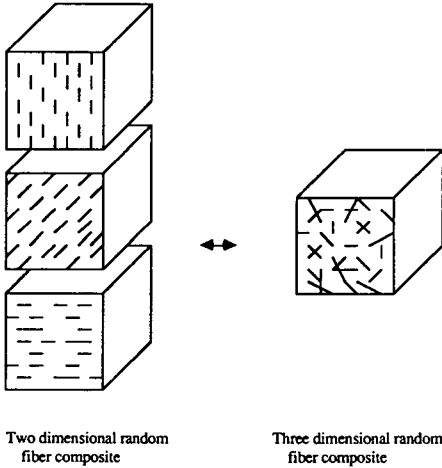


Fig. 2 Transformed laminate analogy model

적층판해석만을 사용했으므로 실제 복합재료의 탄성계수를 정확하게 예측하지 못하는 실정이다.

본 연구에서는 2차원 유사적층판해석과 3차원 유사적층판해석을 사용하여 보강재가 3차원으로 분포되어 있는 복합재료의 탄성계수, 전단탄성계수, 프와송비를 이론적으로 계산하였다. 2차원 유사적층판해석과 3차원 유사적층판해석은 각 재료의 물성치 평균이 전체 재료의 물성이라는 가정으로부터 시작된다. 즉, 매우 얇은 일방향성 복합재료를 0°에서 180°까지 모든 각도에 대해 적층하면, 2차원 분포 복합재료가 얻어지고(Fig. 1), 또, 2차원 분포 복합재료를 나머지 축방향에 대한 모든 각도에서 적층하면, 3차원 분포 복합재료가 얻어진다는 것이

다(Fig. 2). 이 경우 random 복합재료의 물성은 적층이론(lamination theory)으로 계산할 수 있게 된다. 자세한 과정은 본문에서 소개하고자 한다.

## 2. 2차원 유사적층판해석에 의한 탄성계수 예측

2차원 random 복합재료의 탄성계수 예측을 위해 기준 좌표축에 대한 보강재의 경사각이  $\alpha$ 인 일방향성 단섬유 적층판(unidirectionally oriented short fiber laminate)을 고려하였다. 이 경우의 강성도(stiffness)  $Q'_{ij}$ 는 transformation matrix에 의해 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} Q'_{11} &= Q_{11}\cos^4\alpha + Q_{22}\sin^4\alpha \\ &\quad + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\alpha\cos^2\alpha \\ Q'_{22} &= Q_{22}\cos^4\alpha + Q_{11}\sin^4\alpha \\ &\quad + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\alpha\cos^2\alpha \\ Q'_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})\sin^2\alpha\cos^2\alpha \\ &\quad + Q_{12}(\cos^4\alpha + \sin^4\alpha) \\ Q'_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})\sin^2\alpha\cos^2\alpha \\ &\quad + Q_{66}(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) \\ Q'_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\cos^3\alpha\sin\alpha \\ &\quad - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})\cos\alpha\sin^3\alpha \\ Q'_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\cos\alpha\sin^3\alpha \\ &\quad - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})\cos^3\alpha\sin\alpha \end{aligned} \quad (1)$$

또, 2차원 유사적층판해석의 가정으로부터 2차원 random 복합재료의 강성도  $\bar{Q}_{ij}$ 는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\bar{Q}_{ij} = \sum_{k=1}^n Q'_{ij} a^{(k)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi Q'_{ij} da \quad (2)$$

여기서,  $a^{(k)} = h^{(k)}/h$ ,  $h^{(k)}$ 는 적층판 한 개(ply)의 두께이고,  $h$ 는 적층 복합재료 전체의 두께이다. 식 (1)을 식 (2)에 대입하면, 2차원 random 복합재료의 강성도와 일방향성 단섬유 적층판의 강성도와와의 관계가 얻어진다.

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= \frac{1}{8}(3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}) = \bar{Q}_{22} \\ \bar{Q}_{12} &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66}) \\ \bar{Q}_{16} &= \bar{Q}_{26} = 0 \\ \bar{Q}_{66} &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66}) \end{aligned} \quad (3)$$

한편, 적층판의 탄성계수, 전단탄성계수 및 프와송비는 강성도로 표시할 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned} E_L &= (Q_{11}Q_{22} - Q_{12}^2)/Q_{22} \\ \nu_{LT} &= Q_{12}/Q_{22} \end{aligned}$$

$$E_T = (Q_{11}Q_{22} - Q_{12}^2) / Q_{11}$$

$$G_{LT} = Q_{66} \quad (4)$$

마찬가지로, 2차원 random 복합재료의 물성(탄성계수, 전단탄성계수, 프와송비)도 아래와 같이 강성도로 나타낼 수 있다.

$$\bar{E} = (\bar{Q}_{11}^2 - \bar{Q}_{12}^2) / \bar{Q}_{11} = (\bar{Q}_{22}^2 - \bar{Q}_{22}^2) / \bar{Q}_{22}$$

$$\bar{\nu} = \bar{Q}_{12} / \bar{Q}_{22} = \bar{Q}_{12} / \bar{Q}_{11}$$

$$\bar{G} = \bar{Q}_{66} \quad (5)$$

식 (3)을 식 (5)에 대입하면, 2차원 random 복합재료의 물성을 일방향성 단섬유 적층판의 강성도로 표시할 수 있다. 즉,

$$\bar{E} = [Q_{11}^2 + Q_{22}^2 - 4Q_{12}^2 + 2Q_{11}Q_{22} + 8Q_{12}Q_{66} + 4Q_{11}Q_{66} + 4Q_{22}Q_{66}] / [3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}]$$

$$\bar{\nu} = \frac{Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66}}{3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}}$$

$$\bar{G} = \frac{1}{8} (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66}) \quad (6)$$

### 3. 3차원 유사적층판해석에 의한 탄성계수 예측

2차원 유사적층판해석의 경우처럼 축 3과 보강재의 경사각(off axis angle)이  $\beta$ 인 2차원 random 복합재료를 고려하면, 이 경우의 강성도는 2차원 random 복합재료의 강성도로 표시된다. 즉,

$$Q''_{11} = \bar{Q}_{11}\cos^4\beta + \bar{Q}_{22}\sin^4\beta + 2(\bar{Q}_{12} + 2\bar{Q}_{66})\sin^2\beta\cos^2\beta$$

$$Q''_{22} = \bar{Q}_{22}\cos^4\beta + \bar{Q}_{11}\sin^4\beta + 2(\bar{Q}_{12} + 2\bar{Q}_{66})\sin^2\beta\cos^2\beta$$

$$Q''_{12} = (\bar{Q}_{11} + \bar{Q}_{22} - 4\bar{Q}_{66})\sin^2\beta\cos^2\beta + \bar{Q}_{12}(\cos^4\beta + \sin^4\beta)$$

$$Q''_{66} = (\bar{Q}_{11} + \bar{Q}_{22} - 2\bar{Q}_{12} - 2\bar{Q}_{66})\sin^2\beta\cos^2\beta + \bar{Q}_{66}(\cos^4\beta + \sin^4\beta)$$

$$Q''_{16} = (\bar{Q}_{11} - \bar{Q}_{12} - 2\bar{Q}_{66})\sin\beta\cos^3\beta - (\bar{Q}_{22} - \bar{Q}_{12} - 2\bar{Q}_{66})\sin^3\beta\cos\beta$$

$$Q''_{26} = (\bar{Q}_{11} - \bar{Q}_{12} - 2\bar{Q}_{66})\sin^3\beta\cos\beta - (\bar{Q}_{22} - \bar{Q}_{12} - 2\bar{Q}_{66})\sin\beta\cos^3\beta \quad (7)$$

2차원 유사적층판해석의 경우와 유사하게 0°에서 180°까지 적분을 하면, 3차원 random 복합재료의 강성도  $\bar{Q}_i$ 는 2차원 복합재료의 강성도로부터 얻어 지는데 그 결과는 다음과 같다.

$$\bar{Q}_{11} = \frac{1}{8} (3\bar{Q}_{11} + 3\bar{Q}_{22} + 2\bar{Q}_{12} + 4\bar{Q}_{66}) = \bar{Q}_{33}$$

$$\bar{Q}_{13} = \frac{1}{8} (\bar{Q}_{11} + \bar{Q}_{22} + 6\bar{Q}_{12} - 4\bar{Q}_{66})$$

$$\bar{Q}'_{15} = \bar{Q}'_{35} = 0$$

$$\bar{Q}'_{55} = \frac{1}{8} (\bar{Q}_{11} + \bar{Q}_{22} - 2\bar{Q}_{12} + 4\bar{Q}_{66}) \quad (8)$$

3차원 random 복합재료의 강성도로부터 복합재료의 물성은 다음과 같이 구해진다.

$$\bar{E} = \bar{Q}'_{11} - \frac{2\bar{Q}'_{13}^2}{\bar{Q}'_{11} + \bar{Q}'_{13}}$$

$$\bar{\nu} = \frac{\bar{Q}'_{13}}{\bar{Q}'_{11} + \bar{Q}'_{13}} \quad (9)$$

$$\bar{G} = \bar{Q}'_{55}$$

식 (3)과 식 (8)을 식 (9)에 대입하면 복합재료의 물성은 일방향성 단섬유 적층판의 강성도로 표시되어 질 수 있다. 즉,

$$\bar{E} = \frac{1}{16} \left[ 6Q_{11} + 6Q_{22} + 4Q_{12} + 8Q_{66} - \frac{(Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66})^2}{Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{12}} \right]$$

$$\bar{\nu} = \frac{Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66}}{4Q_{11} + 4Q_{22} + 8Q_{12}} \quad (10)$$

$$\bar{G} = \frac{1}{8} (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66})$$

## 4. 고 찰

2차원 적층판해석과 3차원 적층판해석에 의해 예측된 random 복합재료의 물성은 식 (4)에 의해 일방향성 단섬유 적층판의 기계적 성질로 표시되어진다.

2차원 random 복합재료의 경우

$$\bar{E} = \frac{1}{8\{1 - (E_T/E_L)\nu_{LT}^2\}} \left[ 3E_L + 3E_T + 2\nu_{LT}E_T + 4G_{LT}\{1 - (E_T/E_L)\nu_{LT}^2\} - \frac{[E_L + E_T + 6\nu_{LT}E_T - 4G_{LT}\{1 - (E_T/E_L)\nu_{LT}^2\}]^2}{3E_L + 3E_T + 2\nu_{LT}E_T + 4G_{LT}\{1 - (E_T/E_L)\nu_{LT}^2\}} \right] \quad (11)$$

$$\bar{\nu} = \frac{E_L + E_T + 6\nu_{LT}E_T - 4G_{LT}\{1 - (E_T/E_L)\nu_{LT}^2\}}{3E_L + 3E_T + 2\nu_{LT}E_T + 4G_{LT}\{1 - (E_T/E_L)\nu_{LT}^2\}}$$

$$G = \frac{E_L + E_T - 2\nu_{LT}E_T + 4G_{LT}\{1 - (E_T/E_L)\nu_{LT}^2\}}{8\{1 - (E_T/E_L)\nu_{LT}^2\}}$$

3차원 random 복합재료의 경우

$$\bar{E} = \frac{1}{8\{1 - (E_T/E_L)\nu_{LT}^2\}} \left[ 3E_L + 3E_T + 2\nu_{LT}E_T + 4G_{LT}\{1 - (E_T/E_L)\nu_{LT}^2\} - \frac{E_L + E_T + 6\nu_{LT}E_T - 4G_{LT}\{1 - (E_T/E_L)\nu_{LT}^2\}}{2E_L + 2E_T + 4\nu_{LT}E_T} \right]$$

$$\bar{\nu} = \frac{E_L + E_T + 6\nu_{LT}E_T - 4G_{LT}\{1 - (E_T/E_L)\nu_{LT}^2\}}{4E_L + 4E_T + 8\nu_{LT}E_T}$$

$$\bar{G} = \frac{E_L + E_T - 2\nu_{LT}E_T + 4G_{LT}\{1 - (E_T/E_L)\nu_{LT}^2\}}{8\{1 - (E_T/E_L)\nu_{LT}^2\}} \quad (12)$$

식 (12)를 Tsai-Pagano<sup>(7)</sup>의 가정에 의해 정리하면 아래와 같은 최종 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \frac{1}{8} \left[ 3E_L + 5E_T - \frac{(E_L + E_T)^2}{2E_L + 3E_T} \right] \\ \bar{\nu} &= \frac{E_L + E_T}{4E_L + 6E_T} \\ \bar{G} &= \frac{1}{8} (E_L + 2E_T) \end{aligned} \quad (13)$$

그리고 일방향성 단섬유 보강 복합재료의 기계적 성질과 보강재와 기지의 물성 간의 관계<sup>(12,16)</sup>로부터 random 복합재료의 물성을 보강재와 기지의 물성만으로 예측할 수 있게 된다[부록 참고].

위의 이론적 결과를 유리섬유와 polycarbonate 기지의 2차원 random 복합재료의 물성<sup>(13)</sup>과 SiC 휘스커와 알루미늄 기지의 3차원 random 복합재료의 물성<sup>(14)</sup>과 비교하면 다음과 같다. Table 1은 이론적 계산을 위해 필요한 보강재 및 기지의 물성들을 보여주고 있다. 2차원 및 3차원 복합재료의 실험치와 여러 이론치들이 Table 2와 3에 각각 나타나 있으며, 보강재의 파괴분율에 따른 실험치와 이론치와의 비교를 Fig. 3과 4에서 잘 보여주고 있다. Table 2와 Fig. 3은 2차원 random 복합재료의 결과이고, Table 3과 Fig. 4는 3차원 random 복합재료의 경우이다. 2차원인 경우의 실험치는 Tock 등<sup>(13)</sup>의 결과이며, 3차원인 경우의 실험치는 Lim 등<sup>(14)</sup>의 결과이다.

Fig. 3에서 나타난 바처럼 Tsai-Pagano, Christensen-Waals 그리고 본 연구에서 제안된 식 모두 2차원 random 복합재료의 탄성계수를 정확히 예측하고 있으나, 3차원의 경우에는 3차원 유사적층판해석으로부터 유도된 식이 Christensen-Waals 그리고 Lavengood-Goettler에 의해 제안된 식들보다 실험결과에 더 근접하게 탄성계수를 예측한다는 것을 알 수 있다. 그러나 높은 보강재의 파괴분율에서 실험치가 이론치보다 큰 값을 가지는데, 이는 보강재의 양이 증가할수록 보강재의 간섭형상이 심해져 보강재들이 완전한 3차원으로 분포되지 않고 방향성을 가짐에 기인한다. 보강재의 종횡비(aspect ratio)와 탄성계수와의 관계를 Fig. 5와 6에 표시하였다. 실험치는 Ashton 등<sup>(15)</sup>의 boron/epoxy재의 결과이며, 이때의 boron의 탄성계수는 410GPa, epoxy의 탄성계수는 3.5 GPa,

Table 1 Materials properties

Polycarbonate	1/8 in. E-glass fiber	Aluminum	Sic
$E=2\text{GPa}$ $\nu=0.35$	$E=82\text{GPa}$ $\nu=0.22$ Aspect ratio : 313	$E=69\text{GPa}$ $\nu=0.33$	$E=700\text{GPa}$ $\nu=0.2$ Aspect ratio : 13.5

Table 2 Experimental data and theoretical values of 2-D random fiber composites with various volume fractions. System is 1/8 inch E-glass in polycarbonate matrix<sup>(13)</sup> (GPa)

$E$	$V_f$	0	0.1	0.2	0.3	0.4
Exp. data		2.0	5.2	9.0	10.0	13.7
$E$ (Tsai-Pagano)		2.2	5.4	8.5	12.4	16.3
$E$ (Christensen-Waals)		2.2	5.2	8.1	11.1	14.1
$E$ (Present analysis Eq. 11)		2.1	5.2	8.3	11.5	14.9

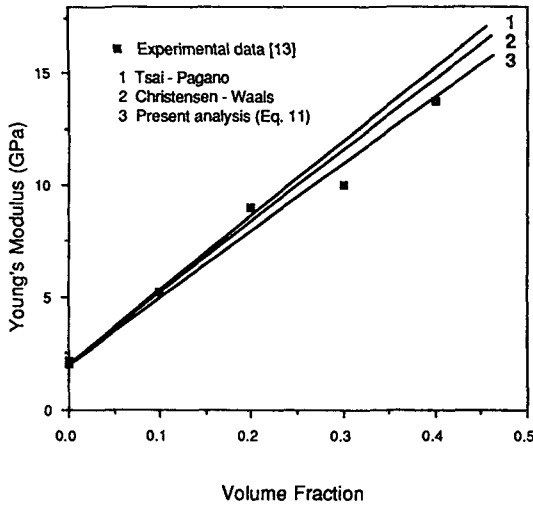
Table 3 Experimental data and theoretical values of 3-D random fiber composites with various volume fractions. System is Al/SiC composite<sup>(14)</sup> (GPa)

$E$	$V_f$	0	0.15	0.2	0.23	0.28
Exp. data		69	90.1	102.5	107.3	120
$E$ (Lavengood-Goettler)		69	89.3	95.5	99.1	105
$E$ (Christensen-Waals)		69	100.3	110.7	116.9	127.4
$E$ (Present analysis Eq. 13)		69	91.9	97.1	101.9	109.8

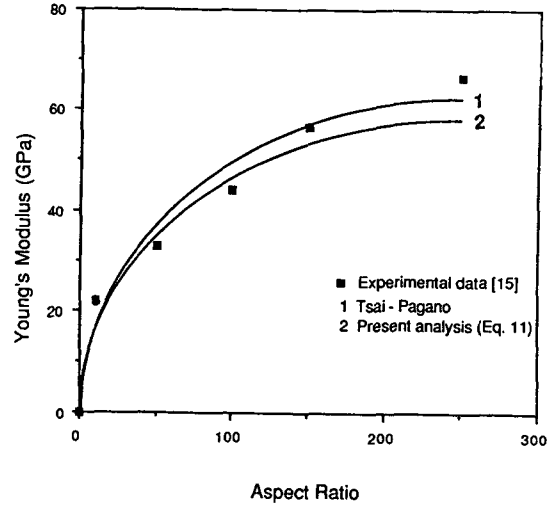
Table 4 Experimental data and theoretical values of 2-D and 3-D random fiber composites with various aspect ratio. System is a boron/epoxy composite and volume fraction is 0.4<sup>(15)\*</sup> (GPa)

$E$	Aspect ratio	10	50	100	150	250
Exp. data*		21.7	32.9	44.0	56.7	66.3
$E^*$ (Tsai-Pagano)		21.6	43.6	53.0	57.3	61.4
$E^*$ (Present analysis Eq. 11)		20.1	39.8	48.1	52.0	55.5
$E^{**}$ (Lavengood-Goettler)		16.4	28.2	33.8	35.5	37.6
$E^{**}$ (Present analysis Eq. 13)		18.3	36.6	45.3	48.0	51.4

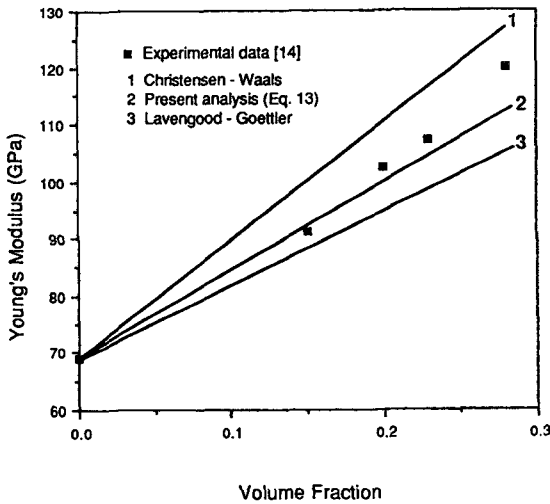
\* : 2-D case    \*\* : 3-D case



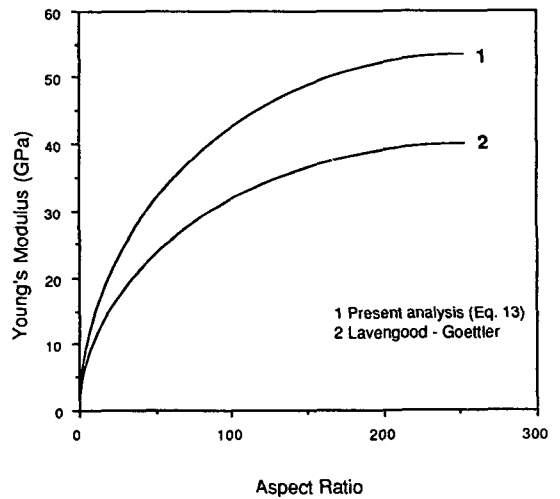
**Fig. 3** Comparison between experimental data and theoretical values of 2-D random fiber composite System is 1/8 inch E-glass in polycarbonate matrix<sup>(13)</sup>



**Fig. 5** Dependence of Young's modulus on fiber aspect ratio in 2-D random fiber composite. System is boron/epoxy composite<sup>(15)</sup>



**Fig. 4** Comparison between experimental data and theoretical values of 3-D random fiber composite. System is Al/SiC composite<sup>(14)</sup>



**Fig. 6** Dependence of Young's modulus on fiber aspect ratio in 3-D random fiber composite. System is boron/epoxy composite<sup>(15)</sup>

전단탄성계수는 각각 170GPa과 1.4 GPa이며 프와 송비는 0.2와 0.4였다. 두 그림에서 보는 바처럼 일정한 보강재의 부피분율에서 종횡비에 따라 탄성 계수가 증가하나, 큰 종횡비에서는 그 증가효과가 현저히 감소한다. 또, Fig. 5에 나타났듯이 본 연구의 결과와 Tsai-Pagano의 예측식이 모두 실험치와 잘 일치함을 볼 수 있다. 한편, 종횡비가 증가

할수록 이론치와 실험치간의 차이 또한 증가하는데, 이러한 현상은 보강재 사이의 상호관계와 배열 상태 등으로 설명할 수 있다. 보강재의 양이 적고, 종횡비가 작을 때는 보강재간의 상호 영향을 무시할 수 있으나, 양이 많아지고, 종횡비가 커지면 이들간의 영향과 보강재의 배열 등을 고려하여야만 복합재료의 물성을 정확히 예측할 수 있다고 사료

된다. 따라서, 앞에서 잠시 언급한 바처럼, 보강재의 배열 상태가 다소 방향성을 가지게되어 실험치가 이론치보다 큰값을 가지게되는 것이다. 보강재간의 상호관계가 복합재료의 물성에 미치는 효과는 현재까지 정확히 알려지지 않았지만, 이에대한 연구는 복합재료의 물성을 보다 정확히 예측하기 위하여 추후에 행하여 지리라 믿는다.

## 5. 결 론

본 연구에서는 3차원 random 복합재료의 물성들(탄성계수, 전단탄성계수, 프와송비) 3차원 적층판 해석을 이용하여 예측하였으며 다음과 같은 결과를 얻을 수 있었다.

(1) 3차원 유사적층판해석을 이용하면, 다른 이론식보다 더 정확한 복합재료의 물성을 예측 할 수 있다.

(2) 보강재와 기지의 물성들로부터 3차원 random 복합재료의 물성들을 손쉽게 구할 수 있다.

(3) 더 정확한 이론식을 추론하기 위하여 보강재간의 상호관계가 물성에 미치는 효과를 규명해야 할 필요가 있다.

## 참 고 문 헌

- (1) Cox, H. L., 1952, "The Elasticity and Strength of Paper and Other Fibrous Materials", Brit. J. Appl. Phys., Vol. 3, p. 72.
- (2) Laws, N. and McLaughlin, R., 1979, "The Effect of the Fiber Length on the Overall Moduli of Composite Materials", J. Mech. Phys. Solids, Vol. 27, p. 1.
- (3) Chou, T. W., Nomura, S., and Taya, M., 1980, "A Self consistent Approach to the Elastic Stiffness of Short Fiber Composite", J. of Comp. Mat., Vol. 14, p. 178.
- (4) Lavengood, R. E. and Goettler, L. A., 1971, HPC 71-141, Monsanto/Washington University, ARPA/ONR Assoc.
- (5) Aboudi, J., 1983, "The Effective Moduli of Short Fiber Composites", Intl. J. Solids Structures, Vol. 19, No. 8, p. 693.
- (6) Christensen, R. M. and Waals, F. M., 1972, "Effective Stiffness of Randomly Oriented Fiber Composite", J. of Comp. Mat., Vol. 6, p. 518.
- (7) Tsai, S. W. and Pagano, N. J., 1968, "Invariant Properties of Composite Materials", Composite Material Workshop, Technomic Pub., Stamford,

Conn., p. 233.

- (8) Manera, H., 1977, "Elastic Properties of Randomly Oriented Short Fiber-Glass Composites", J. of Comp. Mat., Vol. 11, p. 235.
- (9) Puck, A., 1967, "Zur Beanspruchung und Verformung von GFK Mehrschichtenverb und Banelementen", Teil 1, Kunststoffe, Vol. 57, p. 284.
- (10) Phan-Thien, N., 1980, "A Micromechanic Theory of Chopped-Fiber reinforced Materials", Fiber Sci. Tech., Vol. 13, p. 423.
- (11) Halpin, J. C. and Pagano, N. J., 1969, "The Laminatrate Approximation for Randomly Oriented Fibrous Composites", J. of Comp. Mat., Vol. 3, p. 720.
- (12) 임태원, 권영두, 황운봉, 한경섭, 1990, "일방향으로 배열된 단섬유 보강 복합재료의 탄성률 예측", 대한기계학회논문집, 제14권, 제2호, p. 407.
- (13) Tock, R. W. and McMakins, D. E., 1969, "Experimental Studies of the Tensile Properties of Discontinuous Fiber Reinforced Plastics", Mosanto/Washington University, ONR/ARPA Assoc. Report HPC 69-97.
- (14) Lim, T., Lee, C.S., Kim, Y.H., and Han, K.S., Submitted to J. of Comp. Mat.
- (15) Ashton, J. E., Halpin, J. C., and Petit, P. H., 1984, Revised Primer on Composite Materials: Analysis, Technomic Pub., Chapter 7
- (16) Halpin, J. C. and Kardos, J. L., 1976, "The Halpin-Tsai Equations: A Review", Poly. Eng. & Sci., Vol. 16, No. 5, p. 344.

## 부 록

일방향성 단섬유 보강 복합재료(unidirectionally oriented short fiber composite)의 축방향 및 횡방향 탄성계수(longitudinal and transverse modulus),  $E_L$ 과  $E_T$ 는 Halpin-Tsai 식<sup>(16)</sup>으로부터 구할 수 있다.

$$\frac{E_L}{E_m} = \frac{1+2(1/d)\eta_L V_f}{1-\eta_L V_f}$$

$$\frac{E_T}{E_m} = \frac{1+2\eta_T V_f}{1-\eta_T V_f} \quad (A-1)$$

여기서,

$$\eta_L = \frac{R-1}{R+2(1/d)}$$

$$\eta_T = \frac{R-1}{R+2}$$

$E_f, E_m$  : 보강재 및 기지의 탄성계수

$$R = E_f/E_m$$

$1/d$  : 보강재의 aspect ratio

한편, 보강재와 기지의 프와송비의 영향을 고려하며, 축방향 및 횡방향 탄성계수는 다음과 같이 얻어진다<sup>(12)</sup>.

$$\begin{aligned} E_L &= E_i \left\{ 1 + \frac{(1/d)(R^*-1)}{(1/d)+C} \right\} \\ E_T &= E_i \left\{ 1 + \frac{(R^*-1)}{1+C'} \right\} \end{aligned} \quad (A-2)$$

여기서,

$$C' = \frac{R^*-1}{(E_p/E_i)-1} - 1$$

$$E_p = \frac{9\kappa_p G_p}{(3\kappa_p + G_p)}$$

$$\frac{\kappa_p}{\kappa_m} = \frac{1 + \zeta_k \eta_k V_f}{1 - \eta_k V_f}$$

$$\frac{G_p}{G_m} = \frac{1 + \zeta_G \eta_G V_f}{1 - \eta_G V_f}$$

$$\zeta_k = \frac{2(1-\nu_m)}{1+\nu_m}$$

$$\zeta_G = \frac{7-5\nu_m}{8-10\nu_m}$$

$$\eta_k = \frac{(\kappa_f/\kappa_m)-1}{(\kappa_f/\kappa_m)+\zeta_k}$$

$$\eta_G = \frac{(G_f/G_m)-1}{(G_f/G_m)+\zeta_G}$$

$E_u$  : 탄성계수의 상한 값,

$$E_u = E_m \{ 1 + (R-1) V_f \}$$

$E_l$  : 탄성계수의 하한값,

$$E_l = \frac{E_m R}{R + (1-R) V_f}$$

$$R^* = E_u / E_l$$

$\kappa_f, \kappa_m$  : 보강재 및 기지의 bulk modulus

$G_f, G_m$  : 보강재 및 기지의 전단 탄성 계수

$\nu_m$  : 기지의 프와송비