

〈論 文〉

차가운 물에 잠겨있는 수직운동 벽면주위의
자연대류에 관한 안정성
— $0.0 \leq R \leq 0.15$ 에서의 중립 안정—

황 영 규*

(1990년 8월 23일 접수)

**Hydrodynamic Stability of Buoyancy-induced Flows Adjacent to
a Vertical Isothermal Surface in Cold Pure Water**
—Neutral Stability in the Range $0.0 \leq R \leq 0.15$ —

Young-Kyu Hwang

Key Words : Hydrodynamic Stability(수동력학적 안정성), Density Extremum Parameter(최대 밀도 변수), Temperature of Maximum Density(최대 밀도 온도), Outside Buoyancy Force Reversal(외측 부력 반전), Neutral Stability Curve(중립 안정선 도), Linear Stability Equation(선형 안정방정식)

Abstract

The hydrodynamic stability equations are formulated for buoyancy-induced flows adjacent to a vertical, planar, isothermal surface in cold pure water. The resulting stability equations, when reduced to ordinary differential equation by a similarity transformation, constitute a two-point boundary-value(eigenvalue) problem, which was numerically solved for various values of the density extremum parameter $R = (T_m - T_\infty) / (T_0 - T_\infty)$. These stability equations have been solved using a computer code designed to accurately solve two-point boundary-value problems. The present numerical study includes neutral stability results for the region of the flows corresponding to $0.0 \leq R \leq 0.15$, where the outside buoyancy force reversals arise. The results show that a small amount of outside buoyancy force reversal causes the critical Grashof number G^* to increase significantly. A further increase of the outside buoyancy force reversal causes the critical Grashof number to decrease. But the dimensionless frequency parameter B^* at G^* is systematically decreased. When the stability results of the present work are compared to the experimental data, the numerical results agree in a qualitative way with the experimental data.

기 호 설 명

B : 무차원 주파수, x 값에 무관한 값으로써

$$B = \beta G^{\frac{1}{3}} \text{ 또는 } \frac{2\pi f}{\nu} \left(\frac{g}{\nu^2} \alpha r |T_0 - T_\infty|^{\frac{2}{3}} \right)$$

$C_i (i=1, 2, 3)$: 복소수 상수

C : 무차원화한 파(wave) 속도, $C = \beta / \alpha$

D : 특성 경계층 두께

$f(\eta)$: 일반화한 유동함수

f : 주파수

g : 중력가속도

G : 수정한 Grashof수, $4[gr(x) / 4]^{1/4}$

* 정희원, 성균관대학교 공과대학 기계설계학과

- G^* : 임계 Grashof수
- $Gr(x)$: Grashof수, $gx^3\alpha r|T_0 - T_\infty|^q / \nu^2$
- $H(\eta)$: 무차원화한 압력교란 증폭함수
- $\bar{H}(y)$: 차원있는 압력교란 증폭함수
- M : 고유벡터 성분에서 있어서 가장 큰 절댓값
- $O(\)$: 차원의 (of order)
- P : 수동력학적 압력 (hydrodynamic pressure)
- \bar{P} : P 에 해당하는 교란함수
- Pr : 프란틀
- q : Gebhart-Mollendorf⁽¹⁵⁾의 밀도관계식에서 사용되는 온도항의 염도와 압력관련 지수
- R : 최대밀도변수, $(T_m - T_\infty) / (T_0 - T_\infty)$
- $S(\eta)$: 무차원화한 온도교란 증폭함수
- $\bar{S}(y)$: 차원있는 온도교란 증폭함수
- t : 시간
- T : 온도
- u : X 방향 속도성분
- \bar{u} : u 에 해당하는 교란양
- U : 특성 경계층 속도
- v : Y 방향 속도성분
- \bar{v} : v 에 해당하는 교란양
- x, y : 좌표축
- Z : $-\delta q|R|^{q-1}R / |R|$
- Z_0 : 안정성방정식에서 부력교란 계수 $\delta q|\theta_0 - R|^{q-1}(\theta_0 - R) / |\theta_0 - R|$
- α : 무차원화한 교란 복소 wave수, $\alpha = \bar{\alpha}(4x / G)$
- $\bar{\alpha}$: 교란 복소 wave수, $\bar{\alpha}_R = 2\pi / \lambda$
- αr : Gebhart-Mollendorf⁽¹⁵⁾의 밀도관계식에서 사용되는 온도항의 계수
- β : 무차원화한 교란 주파수, $\beta = \bar{\beta}((16x^2) / (\nu G^3))$
- $\bar{\beta}$: 교란 주파수, $\bar{\beta} = 2\pi f$
- δ : 유동방향에 대한 상수, $\delta = +1$: 상향유동, $\delta = -1$: 하향유동
- η : 무차원화한 상사 변수, $Gy / 4x$
- η_∞ : 무한대에 대한 가정치
- $\eta_{P,1}$: 기본 유동의 수직방향 속도 분포곡선에 존재하는 변곡점의 위치
- θ : 무차원화하여 정규화한 온도, $(T - T_\infty) / (T_0 - T_\infty)$
- λ : 파장
- ν : 동점성계수
- ρ : 밀도

- $\phi(\eta)$: 무차원화한 속도교란 증폭함수
- $\bar{\phi}(y)$: 차원있는 속도교란 증폭함수
- $\bar{\phi}_i (i=1, 2, 3)$: 단순사격법에서 증첩시 사용되는 독립된 고유벡터
- ψ : 유동함수
- $\bar{\psi}$: 교란 유동함수

참 자

- b : 기본유동 성질에 대한
- I : 허수부에 대한
- m : 물의 최대밀도점에 대한
- o : 등온표면 조건에 대한
- R : 실수부에 대한
- ∞ : 경계층 바깥영역에 대한

1. 서 론

수동력학적 안정성(hydrodynamic stability) 문제는 강제유동의 경우뿐만 아니라 자연대류의 유동 현상을 연구하는 중요한 방법으로 발전되었으며, 이러한 연구 대상은 대부분 온도와 밀도의 관계를 선형적으로 취급하는 Boussinesq 제 2가정이 적용되는 경우에 국한되었다. 즉, 수직 등온벽 근처에서 부력에 의해 형성되는 자연대류에 관한 선형 안정방정식이 Plapp⁽¹⁾에 의해 최초로 유도된 이래 수많은 연구가 수행되었으며 Gebhart^(2~4), Gebhart 등⁽⁵⁾에 의해 정리 요약되었다.

그러나 차가운 물 속에 잠겨있는 벽면 주위에 형성되는 수직 자연대류와 같은 경우, Fig. 1에서와 같이 온도와 밀도의 관계가 비선형적이므로 일반적인 Boussinesq 제 2가정이 적용될 수 없다. 따라서 이러한 경우에 대한 수동력학적 안정성 연구는 수치적 및 실험적 제반 난점 때문에 일부 유동 영역에 관하여 연구들이^(6~10) 수행되었으나, 상대적으로 저조하다. 그렇지만 경계층내에 최대 밀도 온도 (temperature of maximum density)가 존재함으로써 그 유동 현상이 복잡 미묘하기 때문에 끊임없는 연구 대상이 되게 한다.

본 논문에서 안정성 해석 대상이 되는 기본유동 (base flow)은 순수한 찬물 속에 수직 등온 벽면이 잠겨있을때 벽면 가까이 부력에 의해 발생하는 층류자연대류이고, 최대 밀도 변수 R (density extremum parameter, $R = (T_m - T_\infty) / (T_0 - T_\infty)$)의 값이 $0 \leq R \leq 0.15$ 의 범위에 있을 경우이다. 이러한

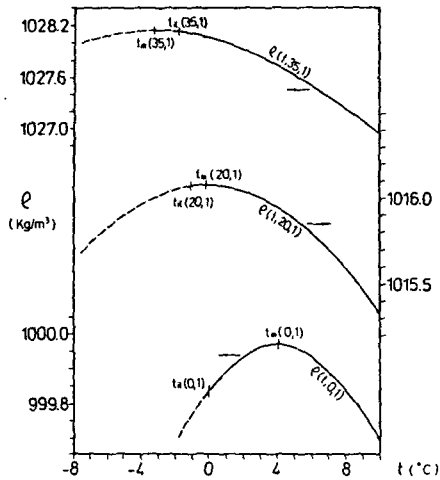


Fig. 1 Density-temperature profiles for 1 atm and salinities of 35‰, 20‰, and 0‰, as calculated by density relation of Gebhart and Mollendorf⁽¹⁵⁾

기본유동에 관하여 선형 안정성 방정식을 유도하고, 유도된 방정식을 두 점 경계값 문제(two-point boundary-value problem)로써 다루고, 최대 밀도 변수의 변화에 따른 임계 Grashof수, 교란 주파수 및 파수(wave number) 등의 변화에서 그 유동에 대한 안정성을 본 논문에서 예측하고자 한다. 이러한 이론적 연구는 구체적인 수동력학적 안정성의 물리적 실험조건들을 사전에 제시할 수 있으므로 후속적인 실험연구에 필요하다. 또한 이것은 저장, 냉동, 환경 제어등 제반 산업 기술에 필수적인 기초 연구이다.

최대 밀도점의 존재로 인하여 어느 한 국소 영역에서는 상향, 다른 국소 영역에서는 하향인 부력 반전(buoyancy force reversal)이 발생된다. 영역 $0 < R \leq 0.15$ 에서는 온도 경계층내 바깥쪽 끝부분에서 부력의 방향이 바뀌어지는 외측 부력 반전(outside buoyancy force reversal)이 일어난다. 이렇게 복잡한 기본 유동에 관한 이론 및 실험적 연구는 Wilson과 Vyas⁽¹¹⁾, Carey와 Gebhart⁽¹²⁾, El-Henawy등⁽¹⁴⁾, 여러 연구자들에 의하여 수행되었다. 최대 밀도 변수 R 의 값이 부력 반전이 발생하는 영역 ($0 < R < 0.5$)내의 경우, 찬 물 속에 잠겨 있는 수직 동온 벽 주위 형성되는 자연 대류는 매우 비정상적(unsteady)이라는 것이 실험을 통해 관찰되었다^(11,12). 또한 El-Henawy등⁽¹⁴⁾에 의해

$0.15149 \leq R \leq 0.15180$ 과 $0.29181 \leq R \leq 0.45402$ 의 두 범위에서 존재하는 정상상태 다중해(multiple-steady-state-solution)가 이론적으로 발견되었으며 이것은 실험에서 관찰된 비정상 유동과 깊은 상관 관계를 보였다.

안정성 해석시의 난점은 다음과 같이 특이성 문제와 두 점 경계값 문제를 열거할 수 있다. 최대 밀도점이 유동에 지대한 영향을 끼치는 기본 유동에 대한 관련방정식들을 유도시 온도와 밀도의 관계를 정확히 묘사하기 위해 Gebhart-Mollendorf 관계식⁽¹⁵⁾을 편이성 때문에 일반적으로 사용하게 된다. 그러나 이 밀도 관계식을 사용하여 안정방정식을 유도할 때 부력항을 부적절하게 취급하면 특이성 문제가 야기된다. 또 다른 안정성 해석상 문제는 두 점 경계값($\eta=0$, $\eta=\infty$) 문제로서 다룰 때 유동특성상 불가피하게 무한대의 가정치 η_∞ 를 상당히 큰 값으로 취해야만 한다는 것이다. 즉, 기본유동해를 구하기 위하여 무한대의 가정치 η_∞ 는 최대 밀도 변수 R 의 값에 따라 최소 23-200의 값을 취해야만 한다. 따라서 안정방정식의 수치해석시에도 기본 유동에서의 η_∞ 를 동일하게 취할 수 밖에 없다. 이러한 경우에 대부분의 기존 연구자들이 이용한 Nachtsheim⁽¹⁶⁾, Hieber⁽¹⁷⁾의 단순 사격법(simple shooting method)은 적분 및 중첩에서 오는 오차 축적으로 인하여 사용이 불가능하다. 앞에서 열거된 두가지 문제점들로 인하여 안정성에 대한 기존 수치적 연구는 단순한 경우에만 국한되었다.

Qureshi⁽⁶⁾, Qureshi와 Gebhart⁽⁷⁾는 등은 또는 균일 열속의 수직 벽면이 4°C의 물 속에 잠겨 있을 때 (즉, 주위 물의 온도가 최대 밀도 온도와 같은 때, $R=0$ 인 경우), 벽면 근처에서 발생하는 유동에 대한 안정성 문제를 취급하여 교란 증폭 폭선을 구하였으며, 또한 물의 염도를 변수로 하여 중립 안정선도들을 구하였다. Higgins⁽⁸⁾, Higgins와 Gebhart⁽⁹⁾는 등은 수직 벽면의 경우에 대해 $R=-0.5, 1, 2, 4$ 일 때 중립 안정선도들을 구하였다. 이때 그들은 수치해석시 Hieber⁽¹⁷⁾의 단순 사격법을 사용하였다. 최근에 El-Henawy등⁽²²⁾은 전형적인 수동력학적 안정성 해석을 할 때 발생하는 제반 수치적 난점들을 피하고자 실변수 변동(real value perturbation)의 기법을 시도하여 정상상태 다중해가 존재하는 유동영역에서 안정성을 다루었다. 그러나 실변수 변동 기법은 구체적으로 물리적인 조

전과 의미를 부여할 수 없는 단점이 있다.

본 논문에서는 외측 부력 반전이 발생하는 유동 영역 $0 < R \leq 0.15$ 에서 수동력학적 안정성을 예측하고자, Hwang⁽¹⁰⁾, 황영규^(18,19)의 연구를 바탕으로 하여 안정방정식을 적절히 취급하여 특이성 문제를 피하였고, Ascher 등⁽²⁰⁾에 의해 작성된 컴퓨터 코드 COLSYS를 이용한 orthogonal collocation 방법을 새롭게 적용하여 두 점 경계값 문제를 해결하였다. 이때 보조적으로 사용된 단순 사격법을 위해 Deuffhard와 Bader⁽²¹⁾의 컴퓨터 코드 BOUNDS를 이용하였다. 이렇게 하여 얻은 중립 안정 계산 결과로부터, 외측 부력 반전의 강도는 기본 유동의 속도 분포곡선에서 변곡점의 위치 및 변곡 강도 등의 형태를 기본 유동의 속도 분포곡선에서 변곡점의 위치 및 변곡 강도 등의 형태를 결정지울뿐만 아니라 수동력학적 안정성에 결정적으로 지대한 영향을 끼칠 수 있었다. 즉, 기본유동의 속도 분포곡선에서 한 개인 변곡점의 위치가 벽면($y=0$)으로 접근할수록 안정한 속도 분포곡선이 되고, 변곡 강도가 강할수록 불안정한 속도 분포곡선이 되는 것이다. 또한, 최대 밀도 변수가 $R=0$ 에서 $R=0.15$ 쪽으로 증가함에 따라 점차 좁은 영역의 주파수에 대하여 증폭된 교란이 발생하고, 그 선택적인 주파수(즉, 특정한 주파수에 대하여 교란이 선택적으로 가장 빨리 증폭 되는 주파수)는 계속 낮아질 것으로 예측되며, 이러한 예측은 기존 안정성 실험 결과^(8,13)와 정성적으로 일치함을 알 수 있었다.

2. 관련 방정식

2.1 기본 유동

순수한 차가운 물 속에 Fig. 2와 같이 유체가 투과할 수 없는 수직 등은 벽이 잠겨 있을 때, 벽 주

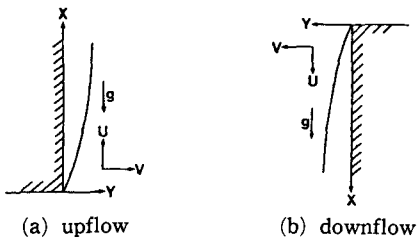


Fig. 2 The coordinate systems

위 부력에 의해 형성되는 교란이 없는 2차원 층류 자연대류를 기본 유동(base flow)으로 한다. 이 유동에 대한 물리적 조건을 용이하게 표현하기 위하여 최대 밀도 변수(density extremum parameter) R 이 다음과 같이 정의 되었다⁽¹⁵⁾.

$$R = \frac{T_m - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \quad (1)$$

여기서 T_m 은 물의 최대 밀도 온도 (즉, 압력이 1 bar에서 $T_m=4.029325^\circ\text{C}$)이고, T_0 는 수직 등은 벽면의 온도, T_∞ 는 벽면 주위 물의 온도(ambient temperature)이다.

최대 밀도 변수 R 이 $R \leq 0$, $R \geq 0.5$ 인 범위에서의 유동은 부력이 항상 한쪽 방향으로만 작용하므로 그 유동이 단순하지만 (즉, unidirectional flow), 앞절에서 언급한 것처럼 $0 < R \leq 0.15180$ 인 범위내의 R 값에서는 두 방향의 부력(bidirectional buoyancy force)이 존재하며 유동형태가 복잡하다. 예를 들면, $R=0$ 일때 즉, 주위 온도 T_∞ 가 최대 밀도 온도 T_m 와 같은 경우에는 밀도차 $\rho_\infty - \rho$ 가 항상 양이기 때문에 부력의 방향은 항상 양이다. 그러나 만일 $T_0=0^\circ\text{C}$, $T_\infty=4.44^\circ\text{C}$ 즉, $R=0.1$ 일때 부력은 Fig. 3과 같이 수직 등은벽 근처에서는 상향이고 온도 경계층의 바깥쪽 끝에서는 하향인 외측 부력 반전이 발생한다. 영역 $0 < R \leq 0.15$ 에서는 R 이 증가할 수록 외측 부력 반전의 강도가 세어지게 되어 경계층의 바깥쪽 끝부분에 존재하는 하향인 부력이 점차 커진다. 유동 영역 $0.15149 \leq R \leq 0.15180$ 에서는 외측 부력 반전의 강도가 더욱 세어짐에 따라 외측 유동 반전(outside flow reversal)이 발생하고, 동일한 R 값의 물리적 조건하에서도 열전달률($\theta'_0(0)$), 전단력($f''_0(0)$), 질량유동률($f_0(\infty)$) 등이 상이한 여러개의 유동해(즉, 정상상태 다중해)가 존재하게 된다⁽¹⁴⁾.

순수한 물 속에 잠긴 수직 등은 벽 주변의 층류

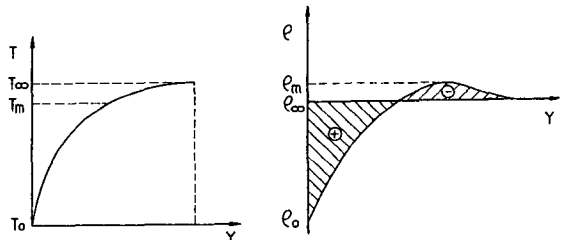


Fig. 3 Illustration of density behavior near T_m ; $R = 0.1$, outside buoyancy force reversal

자연대류에 대한 경계층 방정식을 상사 변환하기 위하여 다음과 같은 무차원 유동 함수 ψ_b , 변수 η , 온도 θ_b 가 정의 된다^(14,16).

$$\psi_b(x, y) = \nu G f_b(\eta), \quad \eta = \frac{yG}{4x}, \quad \theta_b = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \quad (2)$$

또한 Grashof수 Gr 과 수정한 Grashof수 G 는 다음과 같고

$$Gr(x) = \frac{gx^3 a_T}{\nu^2} |T_0 - T_\infty|^q, \quad G = 4(Gr(x)/4)^{1/4}, \quad (3)$$

여기서 $a_T = 9.297173 \times 10^{-6} (\text{°C})^{-q}$ 이고, $q = 1.894816$ 이다.

온도와 밀도의 관계는 Gebhart-Mollendorf 관계식⁽¹⁵⁾이 사용되어 기본 유동에서의 부력항은 다음과 같이 표현되며

$$\frac{(\rho_\infty - \rho)}{\rho_m} g = \delta g a_T [|\theta_b - R|^q - |R|^q] |T_0 - T_\infty|^q, \quad (4)$$

여기서 상향 유동에 대하여 $\delta = +1$, 하향 유동에 대하여는 $\delta = -1$ 이다.

상사 변환된 기본 유동 방정식은 다음과 같다.

$$f_b''' = -\delta [|\theta_b - R|^q - |R|^q] + 2(f_b')^2 - 3f_b f_b'', \quad (5.a)$$

$$\theta_b'' = -3 Pr f_b \theta_b', \quad (5.b)$$

여기서 Pr 은 프란틀 수이며 11.6이다.

경계조건은 다음과 같다.

$$f_b(0) = f_b'(0) = \theta_b(0) - 1 = f_b'(\infty) = \theta_b(\infty) = 0, \quad (6)$$

식 (5.a), (5.b)와 경계조건 (6)의 경계값 문제의 수치해는 컴퓨터코드 COLSYS⁽²⁰⁾와 BOUNDS⁽²¹⁾를 이용하여 절대 오차 10^{-7} 이하의 정확도로 구하였다. 유동 영역 $0 \leq R \leq 0.15$ 에서 구하여진 기본 유동의 속도 및 온도 분포곡선은 Fig. 4와 Fig. 5에 나타나 있다.

부력 반전은 속도장 및 온도장에서 대단히 중요한 역할을 한다. 외측 부력 반전이 발생되는 영역 $0 < R \leq 0.15$ 에서는 온도 경계층의 바깥쪽에서 생기는 하향 부력을 점성력이 극복하므로 수직 방향의 속도는 항상 상향이고, 속도 분포 곡선은 오직 한 개의 변곡점 (point of inflection) $\eta_{P,1}$ (즉, $f_b''(\eta_{P,1}) = 0$)을 갖는다. 또 R 값이 증가함에 따라 온도 경계층은 현저히 두터워진다. 온도 경계층의 두께가 증가함으로 필연적으로 속도 경계층의 두께로 증가하며 $f_b(\infty)$ 의 값이 (즉, net mass flow, $f_b(\infty) =$

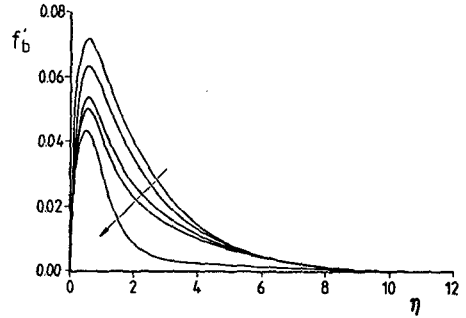


Fig. 4 Distributions of vertical velocity component $f'_b(\eta)$ of the base flows. The arrow indicates increasing R for $R=0.0, 0.05, 0.10, 0.11667$ and 0.15

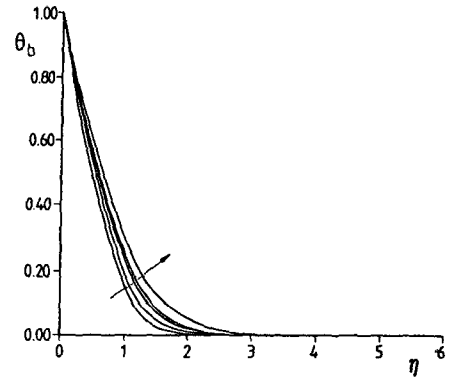


Fig. 5 Distributions of normalized temperature $\theta_b(\eta)$ of the base flow. The arrow indicates increasing R for $R=0.0, 0.05, 0.10, 0.11667$ and 0.15

$\int_0^\infty f_b'(\eta) d\eta$ 감소하므로 유동은 활발하지 못하게 된다^(6,14). (Fig. 4에서 R 의 증가에 따른 속도 경계층 두께가 증가하는 것이 쉽게 확인되지 않지만, 실제 수치적으로는 $\eta \leq 9$ 에서 $R=0$ 일때의 $f_b(\eta)$ 값이 제일 작고 R 이 증가할 때 f_b 의 값이 계속 커진다.) 최대 밀도 변수 R 이 0에서 0.1로 증가함에 따라 수직 속도 성분의 변곡점 위치는 Table 1에서와 같이 점성력이 강한 수직 등온 벽($\eta=0$)쪽으로 접근해 간다.

유동 영역 $0.1 \leq R \leq 0.15$ 에서는 R 이 증가해도 변곡점의 위치 $\eta_{P,1} = 1.0 \sim 0.97$ 근처에서 머물며 거의 변화하지 않으나 변곡점의 강도 $-f_b''(\eta_{P,1})$ 는 더욱 커진다. (Table 1 및 Fig. 4 참조) 그러나 El-Henawy등⁽¹⁴⁾이 구한 정상상태 다중해가 존재하는

Table 1 The location of point of inflection $\eta_{P,I}$ and its strength $-f''_b(\eta_{P,I})$ at various values of R

R	$\eta_{P,I}$	$-f''_b(\eta_{P,I})$
0.0	1.163	0.02847
0.05	1.086	0.02575
0.10	1.004	0.02574
0.116667	0.982	0.02693
0.133333	0.967	0.02925
0.15	0.971	0.03441

영역인 $0.1549 \leq R \leq 0.15180$ 에서는 강한 외측 부력 반전에 의하여 변곡점에서 그 부력 강도가 심해짐에 따라 속도 분포곡선에 두개의 변곡점이 존재하는 해가 있는 것을 밝혀졌다.

자연대류의 속도 분포 곡선은 강제 대류의 경우보다 변곡 강도가 매우 큰 변곡점을 본질적으로 가지고 있다. 강제 대류의 경우 속도 분포곡선의 형태 및 변곡점의 위치와 수동력학적 안정성과는 밀접한 관계를 이루고 있다. (예를 들면 Schlichting⁽²³⁾ 참조) 자연대류의 경우에서도 강제대류의 경우에 해당되는 속도 분포곡선과 안정성과의 관계를 유추할 수 있으며 본 논문의 뒷부분 (4, 2) 고찰에서 다루었다.

2.2 안정성 방정식

2차원 선형 안정성 이론을 적용하여 기본 유동의 온도와 압력 및 속도 분포에 미소한 교란을 중첩시키면 다음과 같이 섭동된 물리량들을 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 u(x, y, t) &= u_b(x, y) + \tilde{u}(x, y, t), \\
 v(x, y, t) &= v_b(x, y) + \tilde{v}(x, y, t), \\
 P(x, y, t) &= P_b(x, y) + \tilde{P}(x, y, t), \\
 T(x, y, t) &= T_b(x, y) + \tilde{T}(x, y, t).
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

식 (7)을 비정상, 비압축성, 2차원 유동에 대한 Navier-Stokes 방정식과 에너지 방정식에 대입한 다음 기본 유동을 평행유동으로 간주하고 [즉, $u_b = u_b(y)$, $v_b = 0$, $\theta_b = \theta_b(y)$], 교란항들을 선형화하면 수동력학적 선형안정방정식이 얻게 된다. 그러나 Qureshi^(6,7), Higgins^(8,9) 등은 압력 교란항을 소거함으로써 부력항에서 특이성(singularity) 문제가 야기되었다. 그러므로 본 연구에서는 특이성 문

제를 해결하기 위하여 압력 교란항을 소거하지 않았으며, 부력항은 다음과 같이 취급하였다.

Gebhart-Mollendorf의 밀도관계식⁽¹⁵⁾을 사용하면 부력항은 기본유동에서 식 (4)와 같으며, 섭동된 부력항은 다음과 같다.

$$g(\rho_\infty - \rho) = \delta g \rho_m \alpha_T |T_0 - T_\infty|^q [|\theta_b - R + \tilde{\theta}|^q + |R|^q].
 \tag{8}$$

위의 식에서 θ_b 에 대한 Taylor series 전개는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$|\theta_b - R + \tilde{\theta}|^q - |\theta_b - R|^q = Z_0 \tilde{\theta} + 0(\tilde{\theta}^2),
 \tag{9}$$

여기서 $\tilde{\theta} \rightarrow 0$ 이면 $0(\tilde{\theta}) / \tilde{\theta} \rightarrow 0$ 이다.

또한 식(9)에 나타난 부력 교란 계수(buoyancy disturbance coefficient) Z_0 를 다음과 같이 정의한다.

$$Z_0 = \delta \frac{(\theta_b - R)}{|\theta_b - R|} q |\theta_b - R|^{(q-1)}
 \tag{10}$$

선형 안정성 문제를 용이하게 다루기 위해 다음과 같은 형태의 교란 유동함수 $\tilde{\psi}$, 교란 온도 $\tilde{\theta}$, 교란 압력 \tilde{P} 를 가정한다.

$$\begin{aligned}
 \tilde{\psi} &= \bar{\psi}(y) e^{i(\alpha x - \beta t)}; \tilde{u} = \tilde{\psi}_y, \quad \tilde{v} = -\tilde{\psi}_x, \\
 \tilde{\theta} &= \bar{S}(y) e^{i(\alpha x - \beta t)}, \\
 \tilde{P} &= \bar{H}(y) e^{i(\alpha x - \beta t)},
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

파수 (wave number) α 는 복소수이고 파 주파수 (wave frequency) β 는 실수이며 다음과 같이 정의된다.

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_R + i\bar{\alpha}_I = \frac{2\pi}{\lambda} + i\bar{\alpha}_I,$$

$$\bar{\beta} = \bar{\beta}_R = 2\pi f,$$

여기서 $\text{bar}(\)$ 는 차원이 있는 양들을 나타내고, $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ 는 x 의 함수이다. [즉, $\alpha = 0(x^{-1/4})$, $\beta = 0(x^{1/4})$].

교란량들을 무차원화하기 위해 다음과 같이 특성 길이 D 와 특성속도 U 를 채택하였으며

$$D = \frac{4x}{G}, \quad U = \frac{\nu G^2}{4x},
 \tag{12}$$

이에 의해 무차원화된 교란량들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \phi(\eta) &= \frac{\bar{\psi}(y)}{UD}, \quad S(\eta) = \frac{\bar{S}(y)}{T_0 - T_\infty}, \\
 H(\eta) &= \frac{\bar{H}(y)}{\rho U^2}, \quad \alpha = \bar{\alpha}D, \quad \beta = \frac{\bar{\beta}D}{U}.
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

기본 유동은 1차원으로 가정하고, 특성값 U 와 D 의 x 에 대한 미분치를 무시하고, 교란량을 선형화한 운동량 및 에너지 방정식에 식 (9)~(13)를 대입하고 정리하여 얻어진 무차원화된 선형 안정방

정식(즉, Orr-Sommerfeld 방정식)은 다음과 같다.

X-운동량 방정식

$$[f'_b - C]\phi' - f'_b \phi = -H + \frac{1}{iaG} [\phi''' - \alpha^2 \phi'] + Z_0 S], \quad (14.a)$$

Y-운동량 방정식

$$[f'_b - C]\phi = -\frac{H'}{\alpha^2} + \frac{1}{iaG} [\phi'' - \alpha^2 \phi], \quad (14.b)$$

에너지 방정식

$$[f'_b - C]S - \theta'_b \phi = \frac{1}{iaG Pr} [S'' - \alpha^2 S], \quad (14.c)$$

여기서 $C = \frac{\beta}{\alpha}$

윗식에서 Grashof수 G 는 x 의 함수이므로 x 즉, G 가 고정되면 α , β 는 구해야 할 복소수의 고유값(eigenvalue)들이며, f_b , θ_b 는 기본 유동에서의 값들이다.

무차원화한 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi(0) = \phi'(0) = S(0) = \phi'(\infty) = S(\infty) \\ = H(\infty) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

위의 문제 (14.a)~(14.c)는 고유값 문제로서, 제차의 선형 6차 복소수 상미분 방정식(complex-valued, sixth-order, linear system of homogeneous differential equation)이며 경계조건 (15)에 의한 두 점 경계값 문제(two-point boundary-value problem)이다.

3. 수치해석 방법

3.1 단순사격법(Simple Shooting Method)

본 연구에서는 Hieber⁽¹⁷⁾의 단순사격법이 사용되었다. 이때 필요한 점근해(asymptotic solution)는 다음과 같다.

(i) 비점성해(inviscid solution)

$$\begin{aligned} \phi_1 &= e^{-\alpha \eta}, \\ S_1 &= 0, \\ H_1 &= -\beta e^{-\alpha \eta}. \end{aligned} \quad (16)$$

(ii) 온도와 속도가 결합되지 않은 점성해

$$\begin{aligned} \phi_2 &= e^{-\alpha_2 \eta}, \\ S_2 &= 0, \\ H_2 &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

(iii) 온도항과 속도항이 결합된 점성해(viscous coupled solution)

$$\phi_3 = -\frac{\alpha_3 Z}{(\alpha CG)^2 Pr (Pr - 1)} e^{-\alpha_3 \eta},$$

$$S_3 = e^{-\alpha_3 \eta},$$

$$H_3 = -\frac{Z}{C Pr G^2} e^{-\alpha_3 \eta}, \quad (18)$$

여기서

$$\alpha_2^2 = \alpha^2 - iaCG,$$

$$\alpha_3^2 = \alpha^2 - iaPrCG,$$

$$Z = -\delta \frac{R}{|R|} g |R|^{q-1}.$$

점근해 식(16)~(18)은 η 가 무한대에 근접할 때만 유효한 근사해이다. 이 식들을 이용하면 안정방정식 (14.a)~(14.c)를 적분하는데 필요한 초기값들을 η_∞ 에서 정의할 수 있으므로, 중첩에 필요한 고립된 고유벡터 $\vec{\Phi}_i(\phi_i, S_i, H_i)$ ($i=1, 2, 3$)를 구할 수 있다.

경계 조건 식 (15)의 무한대의 가정치 $\eta = \infty$ 에서 만족되어야 할 조건들은 단순 감소함수인 점근해 식 (16)~(18)에 의하여 만족된다. 그러나 $\eta = 0$ 에서는 중첩법(superposition principles)에 의한

$$\vec{\Phi} = c_1 \vec{\Phi}_1 + c_2 \vec{\Phi}_2 + c_3 \vec{\Phi}_3$$

가 경계 조건들을 만족시키는 고유값을 구하여야 한다. 여기서 $c_1 = 1 + i$ 로 놓고, 상수 c_2 , c_3 를 결정하기 위해 경계 조건 $\phi(0) = S(0) = 0$ 를 사용하였다. 각각의 고유벡터 $\vec{\Phi}_1(\phi_1, S_1, H_1)$, $\vec{\Phi}_2(\phi_2, S_2, H_2)$, $\vec{\Phi}_3(\phi_3, S_3, H_3)$ 는 각각 해당하는 점근해를 이용하여 초기값들을 결정한 후 $\eta = \eta_\infty$ 에서 $\eta = 0$ 으로 동시에 또는 별도로 각각 전분된 후에 합해졌다. 이렇게 중첩된 함수는 또 다른 경계조건 $\phi'(0) = 0$ 를 만족시키는 고유값 α , β 를 구해야만 한다. 중립 안정성(neutral stability)에 관한 문제는 고유값의 허수부 α_I 를 0으로 놓고 안정성 방정식과 경계조건을 만족하는 실수부 α_R 과 β_R 을 구하는 문제이다. 수정한 Grashof수 G 의 값을 고정시키고 α_R 과 β_R 의 값을 가정한 후 $\eta = 0$ 에서 중첩한 $\phi'(0)$ 의 값이 오차 한계 $|\phi'(0)| < 10^{-6}$ 을 만족하는가를 확인한다. 만약 이 오차 한계를 만족시키지 않을 때에는 새로운 값의 α_R , β_R 을 뉴턴의 수정 방법으로 가정하고 반복 계산을 수행하여 수렴하는 α_R , β_R 을 구하였다. (경우에 따라서는 β_R 의 값을 고정시키고 G 값을 구하는 방법을 사용하였다.)

위의 계산 과정에서 초기값 적분문제에서 편의상 기본 유동 방정식과 유동 방정식과 안정 방정식을 결합한다면 실수인 17개의 1차 미분방정식의 구성요소를 구하기 위하여 적분되어야 한다. 만일, 기본 유동을 계산한 후 참고문헌들^(10,18,20)과 같이 B

-spline의 계수들을 별도로 화일에 저장하였다가 기본유동의 값들이 안정방정식의 계수로 필요할때 재사용을 한다면, 고유벡터들 $\vec{\phi}_i(\phi_i, S_i, H_i)$ ($i=1, 2, 3$)를 각각 적분시 12개의 실수 1차 미분방정식을 적분해야 한다. 이러한 적분 문제를 취급하기 위하여 BOUNDS⁽²¹⁾의 Runge-Kutta-Fehlberg integration routine(MTH=2)와 Bulirsch-Stoer rational extrapolation routine(MTH=1)이 사용되었다. 또한 기본 유동을 B-spline으로 처리하기 위하여 COLSYS⁽²⁰⁾가 이용되었다.

3.2 Orthogonal Collocation 방법

안정방정식의 해를 구하는데 있어서 단순사격법으로는 R 의 증가에 따라 η_∞ 의 값이 불가피하게 증가함으로 적분이 거의 불가능하거나, 또는 가능할지라도 초기값 적분문제의 누적오차와 그것으로 인한 심각한 중첩오차로 인하여 계산이 부정확하여 안정 계산의 초기단계에만 적용하였다. 이러한 문제점들을 피하고, 정확하게 두 점 경계조건 문제를 만족하는 해를 구하기 위해 orthogonal collocation 방법이 사용된다. 본 연구에서는 orthogonal collocation 방법의 컴퓨터 코드 COLSYS를 이용했다. 중요한 것은 최대 밀도 변수 R 이 $0 \leq R \leq 0.15$ 인 유동 영역에서 단순 사격법의 사용이 거의 불가능하지만 orthogonal collocation 방법으로는 안정성 계산이 가능하다는 사실이다.

경계 조건 식 (15)를 실수부와 허수부로 분리하면,

$$\begin{aligned} \phi_R(0) &= \phi_I(0) = \phi'_R(0) = \phi'_I(0) \\ &= S_R(0) = S_I(0) = 0, \\ \phi'_R(\eta_\infty) &= \phi'_I(\eta_\infty) = S_R(\eta_\infty) = S_I(\eta_\infty) \\ &= H_R(\eta_\infty) = H_I(\eta_\infty) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

직접적으로 식 (19)의 경계조건을 만족시키기 어려우므로 무용해(trivial solution)를 피하고 크기를 조절하여 고유벡터의 최대값이 0(1)이 되도록 아래와 같이 경계조건을 약간 수정한 후 단순사격법에서와 마찬가지로 뉴턴의 수정방법을 이용하여 원래의 경계조건 $|\phi'_R(0)| + |\phi'_I(0)| = 0$ 을 10^{-6} 이하로써 만족하는 고유값 α, β 를 구하였다.

$$\begin{aligned} \phi_R(0) &= \phi_I(0) = S_R(0) = S_I(0) = 0, \\ \phi_R(\eta_\infty) &= K, \\ \phi_I(\eta_\infty) &= \phi'_R(\eta_\infty) = \phi'_I(\eta_\infty) = S_R(\eta_\infty) = S_I(\eta_\infty) \\ &= H_R(\eta_\infty) = H_I(\eta_\infty) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

여기서 K 는 $10^{-9} \leq K \leq 10^{-5}$ 사이의 0이 아닌 값으

로 정한다. 만일 K 값이 약간 크면 고유벡터의 값들이 너무 커져서 발산하게 되므로 η_∞ 와의 관계를 고려하여 적절하게 조절해야 한다. (앞의 식에서 $\phi(\eta_\infty) = 0$ 를 취한 이유는 η 가 η_∞ 에 접근할 때 $|\phi_I|$ 의 크기가 $|\phi_R|$ 보다 상대적으로 매우 작기 때문이다.)

식 (20)에서 $\phi_R(\eta_\infty) = K$ 대신에 $S'_R(0)$ 가 0이 아닌 $10^{-3} \leq K \leq 10^{-1}$ 범위의 값을 취하여 고유벡터의 크기를 조절할 수 있다. [여기서 $S'_I(0)$ 는 조건으로 취하지 않았다.]

위에서 언급한 두가지 방법들에서 $\phi(\eta_\infty)$ 나 $S(0)$ 가 복소수 임에도 불구하고 (실수부만 택하여) 오직 한 개의 영이 아닌 조건을 설정하였기 때문에 어색해 보이지만, 처음 해를 구할때 이 방법들외에는 다른 용이한 방법이 없다. 일단 이러한 방법으로 고유벡터를 구한 다음 크기를 재조정하면 (즉, Fig. 9~Fig. 12처럼), 이 재조정된 벡터의 수치를 사용하여 두 개의 영이 아닌 조건들을 설정할 수 있다. 예를 들면, 다음과 같은 조건을 사용할 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi_R(0) &= \phi_I(0) = S_R(0) = S_I(0) = 0, \\ S'_R(0) &= K_1, \quad S'_I(0) = K_2, \\ \phi'_R(\eta_\infty) &= \phi'_I(\eta_\infty) = S_R(\eta_\infty) = S_I(\eta_\infty) \\ &= H_R(\eta_\infty) = H_I(\eta_\infty) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

이러한 방법은 일단 구하여진 해의 정확도를 재확인하거나, 좀 더 정확한 고유벡터를 구하려는 경우에 적용될 수 있다. 또한 식 (21)에서 $S'_R(0), S'_I(0)$ 대신에 $\phi_R(\eta_\infty), \phi_I(\eta_\infty)$ 로 대치할 수 있다.

앞에서 언급된 방법들로 얻어진 해가 원래의 경계 조건 (19)을 만족하는지를 확인하기 위해 다음의 조건을 만족 해야 한다.

$$\begin{aligned} \min_{0 \leq \eta \leq \infty} \left(\frac{|\phi'_R(0)|}{|\phi'_R(\eta)|}, \frac{|\phi'_I(0)|}{|\phi'_I(\eta)|} \right) &\leq 10^{-4}, \\ \max_{0 \leq \eta \leq \infty} \left(\frac{|\phi'_R(0)|}{|M|}, \frac{|\phi'_I(0)|}{|M|} \right) &\leq 10^{-7}, \end{aligned} \quad (22)$$

여기서 M 은 고유벡터의 절대값중 최대값이다.

식 (22)의 필요성에 대한 부가적인 설명을 한다면, 식 (20)과 같은 방법들로 해를 구하였을 때, 구하여진 해가 정확하게 경계조건 $\phi'_R(0) = \phi'_I(0) = 0$ 을 만족하는가를 판단하기 위한 기준으로서 필요한 것이다. 물론 컴퓨터 코드 COLSYS를 사용시 오차한계 TOL을 설정하지만, 이 오차한계는 절대오차이므로 구한 해가 TOL을 만족한다고 해서 반드시 참 해라고 인정할수는 없다. 전부 영인 경계조

건을 가지고 있는 경우 참 값의 고유벡터를 구하면, 이 고유벡터의 100배, 또는 1/100배이던지 고유벡터인 것은 사실이다. 그러나 정규화(normalization)되지 않은 수치결과만으로는 과연 구하여진 해가 무용해인지 유용해인지 판별하기가 어렵다. 이러한 문제점을 해결하기 위해 식 (22)가 사용되어, 엄격하게 유용해만을 가리고자 하였다.

기본 유동의 해는 B-spline으로^(10,18,20) 저장되었다가 계산 수행시 계수로 사용되었고, 일단 수렴한 중립 안정성 방정식의 해는 연속적인 계산을 하기 위해 B-spline으로 저장시켰다.

4. 결과 및 고찰

4.1 수치결과

본 연구에서는 수치계산의 노력을 어떤 하나의 특정한 최대 밀도 변수 R 에 대한 중립 안정선도(neutral stability curve) 및 교란의 증폭선도(contours of constant amplification)만을 구하는 것 보다는 비교적 넓은 범위의 최대 밀도 변수 R 과 임계 Grashof수 G^* 와의 관계를 구하는 데 중점을 두었으므로 대부분의 계산은 중립 안정선도의 G^* 부근에만 국한되었다. 임계 Grashof수 G^* 는 중립 안정선도의 횡축에서 가장 작은 G 값을 뜻하며, $G < G^*$ 인 경우 교란은 감쇠되고 $G > G^*$ 인 경우 최소한 교란의 일부는 증폭된다.

앞 절(3.1, 3.2)에서 언급한 단순 사격법 및 orthogonal collocation 방법들을 실제 안정성 문제들에 적용하여 계산하였다. 이때 단순 사격법은 collocation 방법 사용을 위해 계산의 시작에 필요한 고유벡터의 초기값들만을 가정하기 위해 이용되었을 뿐이고, 대부분의 수동력학적 안정성에 대한 수치결과는 컴퓨터 코드 COLSYS에 의한 orthogonal collocation 방법을 이용하여 얻어졌다. 모든 계산은 VAX/VMS 11-750의 2배 정밀도로 수행되었고 한 점 계산에 소요되는 평균 CPU는 600초 가량이었다. 두 점 경계값 문제 $(0, \eta_\infty)$ 에서 무한대의 가정치 η_∞ 는 $R=0.0\sim 0.05$ 일때 $\eta_\infty=23.2$, $R=0.05\sim 0.10$ 일때 $\eta_\infty=30$, $R=0.10\sim 0.13333$ 일때 $\eta_\infty=35$, $R=0.15$ 일때 $\eta_\infty=70$ 로 취했다.

안정성 계산 오차의 기준인 식 (22)를 만족시키는 중립 안정성 계산 결과들이 $0 \leq R \leq 0.15$ 의 유동 영역에서 구하여 졌으며 대표적인 수치결과들이 Table 2에 정리되었다. 즉, 최대 밀도 변수 $R=$

Table 2 Neutral stability results for various values of R at $Pr=11.6$ and $q=1.894816$

R	α_R	β_R	G
0.05	0.3779	0.035	49.51
	0.4445	0.040	46.34
	0.5121	0.045	44.85
	0.5981	0.051	44.16
	0.7208	0.059	44.97
	0.7852	0.063	46.02
	0.8517	0.067	47.49
0.10	0.4798	0.0376	48.18
	0.5185	0.040	47.33
	0.6034	0.045	46.55
	0.6924	0.050	46.90
	0.7573	0.0535	48.00
	0.8268	0.057	49.57
0.1167	0.5005	0.037	48.31
	0.5354	0.039	47.70
	0.5712	0.041	47.35
	0.6081	0.043	47.22
	0.6460	0.045	47.37
	0.6762	0.0466	47.63
0.1333	0.5671	0.0385	47.75
	0.5969	0.040	47.69
	0.6337	0.0418	47.82
	0.6674	0.0434	48.14
	0.7019	0.045	48.61
	0.7363	0.0466	49.25
0.15	0.3702	0.026	52.95
	0.4066	0.028	50.79
	0.4870	0.0321	48.11
	0.5313	0.0343	47.51
	0.6992	0.0415	49.00
	0.7718	0.0444	51.00
	0.8290	0.04655	53.03

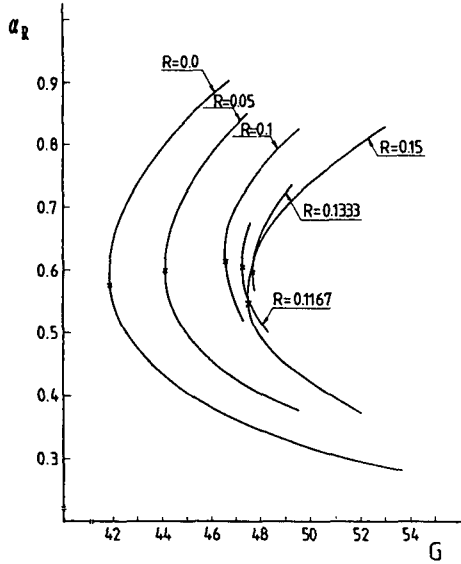


Fig. 6 Neutral stability curves in the (G, α_R) -plane. The mark (x) represents the critical point (G^*, α_R^*)

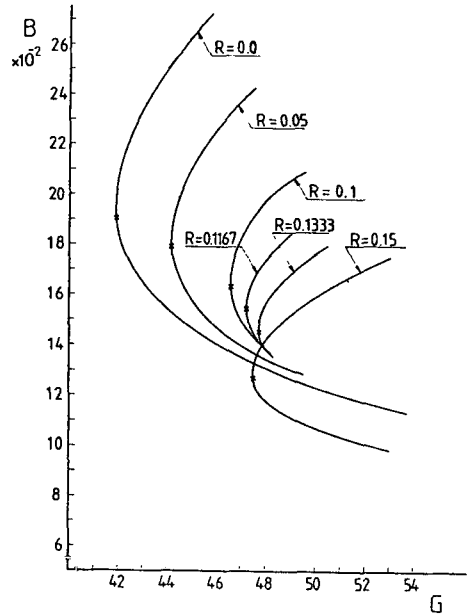


Fig. 8 Neutral stability curves in the (G, B) -plane. The mark (x) represents the critical point (G^*, B^*)

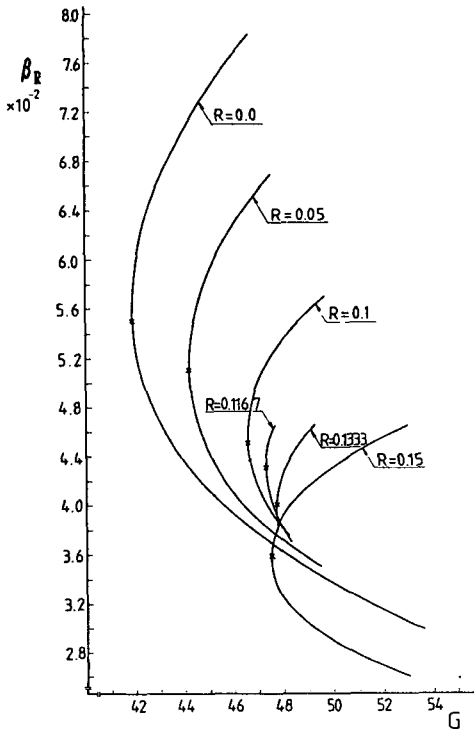


Fig. 7 Neutral stability curves in the (G, β_R) -plane. The mark (x) represents the critical point (G^*, β_R^*)

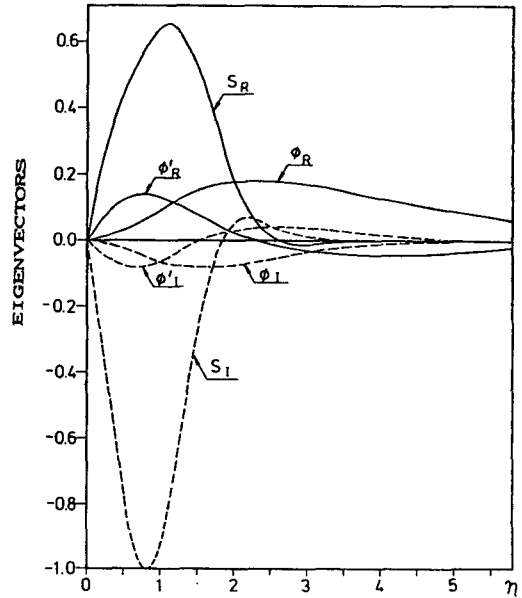


Fig. 9 Plots of eigenvector components vs. η corresponding to the solution at $R=0.0, \alpha_R=0, \alpha_R=0.3688, \beta_R=0.038,$ and $G=46.67$

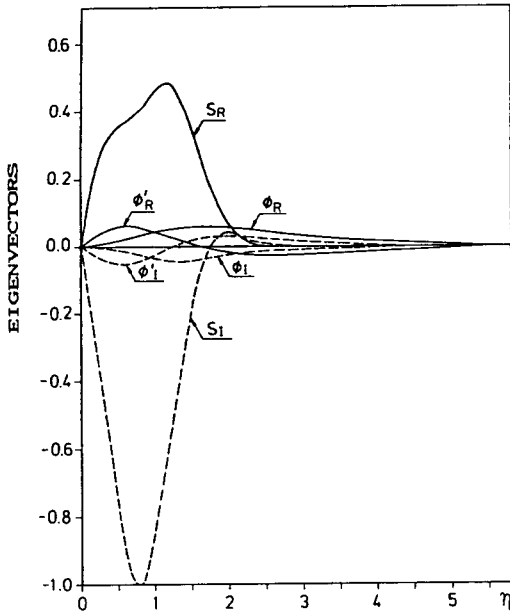


Fig. 10 Plots of eigenvector components vs. η corresponding to the solution at $R=0.0$, $\alpha_I=0$, $\alpha_R=0.9070$, $\beta_R=0.078$, and $G=46.67$

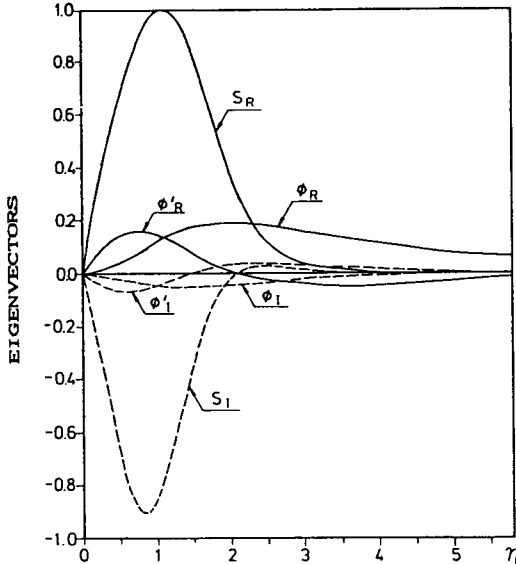


Fig. 11 Plots of eigenvector components vs. η corresponding to the solution at $R=0.15$, $\alpha_I=0$, $\alpha_R=0.3702$, $\beta_R=0.026$, and $G=52.95$

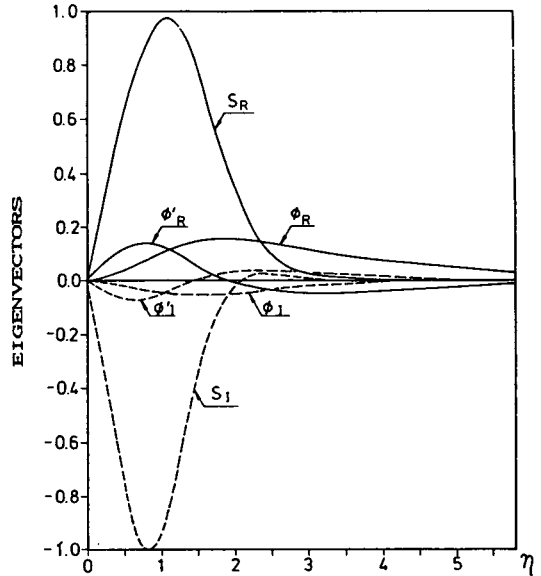


Fig. 12 Plots of eigenvector components vs. η corresponding to the solution at $R=0.15$, $\alpha_I=0$, $\alpha_R=0.4870$, $\beta_R=0.032$, and $G=48.11$

(G, α_R) 평면이 Fig. 6에, 주파수를 의미하는 고유값 β_R 과의 관계를 나타내는 (G, β_R) 평면이 Fig. 7에 도시되어 있다. 또한 물리적으로 일정한 주파수 (constant frequency)를 뜻하는 B 와 G 의 관계를 나타내는 (G, B) 평면이 Fig. 8에 도시되었다. ($B = \beta_R G^{1/3}$)

경계 조건 식 (19)와 고유벡터에 대한 오차 기준 식 (22)를 만족시키는 전형적인 고유벡터는 그 크기를 고유벡터성분의 최대 절댓값이 1이 되도록 조정(normalization) 하였으며, $R=0.0$ 에 대하여 Fig. 9, Fig. 10에, $R=0.15$ 에 대하여 Fig. 11, Fig. 12에 도시 되어 있다.

4.2 고찰

만일 수직 등은 벽면 온도 T_0 와 주위 유체 온도 T_∞ 의 차이 $T_0 - T_\infty$ 가 일정하다면, 최대 밀도 변수 R 이 서로 다른 경우 안정 평면들 (G, α_R), (G, β_R)과 (G, B)에 나타난 안정성 계산 결과들을 쉽게 정량적으로 상호 비교할 수 있다. 그 이유는 무차원수들 G, α, β, B 는 그 정의에서 $T_0 - T_\infty$ 에 의존하기 때문이다. 즉, 동일한 값의 수정한 Grashof수 G 는 R 에 관계없이 항상 일정한 물리적인 값 x 를 나타낸다. 그러므로 여기서는 $|T_0 - T_\infty|$ 의 값이 일정하다고 가정하고서 고찰을 한다.

0.0, 0.05, 0.10, 0.11667, 0.13333, 0.15인 각 R 값에서 수정한 Grashof수 G 와 물리적인 교란의 파수를 의미하는 고유값 α_R 과의 관계를 나타내는

유동 영역 $0 \leq R \leq 0.15$ 에서의 고유벡터는 일반적으로 그 형태가 매우 가파르다. (Fig. 9~Fig. 12 참조) 벡터의 절댓값이 최대치를 갖는 위치 η^* 는 B 의 값을 고정하였을 때 R 이 증가함에 따라 $\eta=0$ 을 향하여 이동하며, 동시에 $\eta=0$ 근처에서 벡터의 가파른 정도는 극심하여 진다. 반면에 R 이 증가할수록 외측 부력 반전의 증대로 인하여 유동이 비활발하여 $f_b(\infty)$ 가 감소하므로 무한대에 대한 가정치 η_∞ 는 계속 증가를 해야한다. (기본 유동에 관한 문헌들^(5,14) 참조) 즉, R 의 증가는 식 (14.a)~(14.c), (15)의 두 점 경계 조건 문제를 더욱 난이하게 한다.

중립 안정선도들에서 최대 밀도 변수 R 과 임계 Grashof수 G^* 의 관계를 살펴보면, $0 \leq R \leq 0.13333$ 에서는 R 이 증가함에 따라 G^* 는 증가하며, 반면에 R 이 계속 증가하면 $0.1333 < R < 0.15$ 의 어떤 R 의 값을 경계로 G^* 가 감소하는 경향을 나타낸다. (Fig. 6~Fig. 8 참조) 즉, $R=0$ 일때 G^* 는 41.88이고, $R=0.1333$ 이 되기까지 R 이 증가하면 G^* 가 증가하여 $G^*=47.69$ 이며, 계속 R 이 증가하여 $R=0.15$ 가 되면 G^* 는 약간 감소하여 $G^*=47.51$ 이 된다.

안정 평면 (G, B)에서 일정한 주파수는 종축의 B 값이 일정한 직선으로 나타나는데 $G=G^*$ 일 때의 B 값을 B^* 로 정의하면, B^* 는 최초로 교란이 확대되기 시작하는 지점 G^* 에서의 주파수를 의미한다. B^* 는 최대 밀도 변수 R 이 증가함에 따라 일관성 있게 계속하여 감소하는 경향을 나타낸다. (Fig. 8 참조) 즉, R 이 증가할수록 유동은 낮은 주파수의 교란에 대해 불안정하다. 그러나 α_R^* (G^* 에서의 α 값)는 R 이 증가를 하여도 현저하게 그 값이 변하지 않으므로, 위치 G^* 에서의 교란 파수는 큰 변동이 없을 것이다. (Fig. 6 참조). 따라서 중립 안정성에 대한 계산은 $R=0.15$ 까지만 되어 있지만, 계산이 되어 있지 않은 $0.15 < R \leq 0.1518$ 인 영역(즉, 정상상태 다중해가 존재하는 유동영역)에서는 임계 Grashof수 G^* 의 값과 B^* 의 값(즉, $G=G^*$ 일때 B 의 값)이 $R=0.15$ 에서의 G^*, B^* 보다는 감소할 것이라는 추측이 현재의 계산 결과로부터 가능하다.

이상과 같은 안정성의 계산 결과로부터 외측 부력 반전이 발생하는 기본 유동의 속도 분포곡선 형태와 중립 안정성과는 긴밀한 관계를 가지고 있다. 즉, R 값이 0에서 0.1로 증가하면서 Table 1과

Fig. 3에서와 같이 기본 유동의 수직방향 속도 분포곡선에서 변곡점의 위치는 점성력이 큰 수직 등은 벽($\eta=0$)쪽으로 접근해가고, 이 유동에 해당되는 안정 계산결과는 G^* 값이 계속 증가하였다. 이것은 $0 \leq R \leq 0.1$ 범위내에서는 R 값이 증가함에 따라 더 안정(stable)해 진다는 것을 의미한다.

그러나 $0.1 < R \leq 0.15$ 에서는 R 이 증가해도 기본 유동의 속도 분포곡선에서 변곡점의 위치는 $\eta=1.0$ 근처에서 머물러 변화가 없으나 변곡점의 강도는 더욱 심해지고, 이 구간에 해당되는 G^* 는 약간 증가하다가 $0.13333 < R < 0.15$ 에서 감소하는 경향을 보였다. (Table 1 참조) 따라서 속도 분포곡선의 변곡 강도가 심해질수록 (즉, 기본유동에서 외측 부력반전의 크기가 어느 정도 이상 커질수록) 유동은 불안정(unstable)할 것이다.

El-Henawy등⁽¹⁴⁾이 구한 $0.15149 < R < 0.15180$ 에서 존재하는 정상상태 다중해중 최소한 한 개는 강한 외측 유동반전(outside flow reversal)으로 인하여 기본 유동의 수직방향 속도 분포곡선에 두개의 변곡점을 갖고 있다. 두 개의 변곡점을 가진 유동은 한 개의 변곡점을 가진 유동보다는 훨씬 불안정할 것으로 추측할 수 있다.

유동 영역 $0.15 < R \leq 0.15180$ 에 해당되는 기본 유동의 속도 분포곡선 형태는 참고문헌 (14)에 도시되어 있드시 $R=0.15$ 의 속도 분포곡선 형태보다 변곡 강도가 상대적으로 크고, 변곡점의 위치 (여기서 다중해의 경우, 첫번째 변곡점)는 거의 바뀌지 않는다. 이미 앞에서 고찰한 바와 같이 R 의 값이 0.13333에서 0.15로 증가할 때 속도 분포곡선 형태 및 여기서 해당되는 안정 계산 결과의 변화 추세(즉, G^* 와 B^* 의 감소 경향등)를 고려하면 다음과 같은 예측이 가능하다.

유동 영역 $0.15 < R \leq 0.15180$ 에 해당되는 유동은 해당되는 유동은 $R=0.15$ 의 유동보다는 일반적으로 낮은 주파수의 교란에 대해 불안정하고 또 불안정하기 시작하는 선단부(leading edge)로 부터의 위치는 상대적으로 짧은 거리에 있을 것이다.

유동 영역 $0 \leq R \leq 0.15$ 에서 (G, B) 평면의 중립 안정선도가 그리는 형태는 최대 밀도 변수 R 이 증가함에 따라 점차 작은 값의 B^* 을 가지며, G^* 를 중심으로 폭이 넓고 뭉툭한 형태(blunt body)에서 폭이 좁고 뾰족한 형태(sharp body)로 바뀌어 진다. 그러므로 교란의 확대(amplification of disturbance)로 바뀌어 진다. 그러므로 교란의 확대

(amplification of disturbance)는 R 이 증가함에 따라 낮은 주파수의 영역에서 발생할 것이며, 그 영역은 점차 좁아질 것이다. 층류에서 미세한 교란이 일정한 주파수에 따라 증폭되어 난류의 교란으로 천이될 경우, 주파수에 따라 민감하게 교란의 확대 정도가 다르다. 이때 가장 빨리 교란이 증폭되는 선택적인 주파수는 최대 밀도 변수 R 의 증가에 따라 점차 낮아질 것이며 또한 상대적으로 빨리 증폭될 것으로 예측된다.

이러한 예측은 $R=0$, $R=0.12$ 일 때 Higgins의 hot film에 의한 안정 실험결과^(6,13)와 비교하면 정성적으로 잘 일치한다. Higgins는 $R=0$ 일때 $G=378$ 에서 교란이 증폭되어 실험에 의해 계속될 수 있는 활발한 거동을 보여주는 최초의 난류 징후(즉, 실험상의 천이점, bursts of turbulence)를 발견하였으나, $R=0.12$ 일 때는 $G=385$ 에서 최초의 난류 징후를 발견하였다. 또한 $R=0$ 일때 교란이 증폭되어진 주파수는 $R=0.12$ 의 경우보다 비교적 높은 주파수를 따라 증폭되었다. 이것은 본 연구결과에서 $R=0.12$ 에 해당하는 중립 안정선도는 $R=0.0$ 의 선도보다 오른쪽에 위치함과, $R=0.12$ 에 해당되는(교란이 빨리 증폭되는) 선택적인 주파수가 $R=0.0$ 의 선택적인 주파수보다 낮다는 예측과 부합된다. 또한 Higgins⁽⁶⁾는 $R=0.0$ 과 $R=0.12$ 의 경우, $G=417$ 에서 상당히 증폭된 교란을 발견하였으며, 이때 $R=0.12$ 의 교란이 $R=0.1$ 의 교란보다 더욱 빨리 증폭되는 것을 알았다. (이론적으로 구한 임계 Grashof수와 실제 실험을 통하여 관찰된 천이점과의 차이는 주위 유동 자체에 개재된 난성의 강도와 공간상의 교란 증폭 형태에 좌우된다. Higgins의 실험^(6,13)은 가능한 한 외부로부터 오는 교란들을 격리하고 인위적으로 전혀 교란을 가하지 않았으므로, 교란이 유동방향으로 증폭되는 것이 중요한 실험이었다. 본 논문의 임계 Grashof수(예를 들면, $R=0.0$ 에서 $G^*=41.88$)는 Higgins의 천이점($R=0.0$ 에서 $G=378$)에 비해 상당히 작은 값이다. 이러한 차이는 불안정점(즉, 임계 Grashof수 G^* 에 해당되는 지점)으로부터 교란이 주 유동방향으로 증폭, 발전되어 천이점에 이르기까지 거리를 나타낸다.)

5. 결 론

유동 영역 $0 < R \leq 0.15$ 인 범위에서 존재하는 의

측 부력 반전은 기본 유동의 형태뿐만 아니라 수동력학적 안정성에 증대한 역할을 한다. 최대 밀도 변수와 임계 Grashof수의 관계를 안정성 계산에서 구함으로써, 기본 유동의 속도 분포곡선에서 변곡점의 위치가 점성력이 큰 벽면($\eta=0$)으로 근접할수록 안정한 유동의 속도 분포곡선이 되었으며, 변곡점에서의 변곡 강도가 강할수록 불안정한 속도 분포곡선이 되었다.

중립 안정곡선의 형태는 안정 평면(G, B)에서 최대 밀도 변수 R 의 값이 증가함에 따라서 교란 주파수 영역의 폭이 넓고 몽푼한 형태에서 상대적으로 낮고 폭이 좁은 뾰족한 형태로 바뀌어졌다. 따라서 교란의 확대는 R 이 증가할수록 상대적으로 좁은 영역의 주파수에서 발생하고, 가장 교란이 빨리 증폭되는 주파수는 점차 낮은 수의 주파수가 될 것이다. 이러한 예측은 기존 안정성 실험과 정성적으로 일치한다.

후 기

본 연구는 1985년도 전반기 한국과학재단 연구비(853-0907-002-1)의 지원하에 이루어진 연구결과와 일부로써 관계자에게 심심한 사의를 표하는 바입니다.

참 고 문 헌

- (1) Plapp, J.E., 1957, "Laminar Boundary Layer Stability in Free Convection", Doctoral Dissertation, Calif. Instit. Tech. Pasadena, Calif.
- (2) Gebhart, B., 1969, "Natural Convection Flow, Instability and Transition", ASME pap. No. 69-HT-29.
- (3) Gebhart, B., 1971, "Heat Transfer", 2nd ed. McGraw-Hill Book Co., NY
- (4) Gebhart, B., 1979, "Buoyancy Induced Flow Motions Characteristic of Applications in Technology", J. Fluids Engineering, Vol. 101, pp. 5~27.
- (5) Gebhart, B., Jaluria, Y., Mahajan, R. L., and Sammakia, B., 1988, "Buoyancy-Induced Flows and Transport", Hemisphere Pub. Co., NY.
- (6) Qureshi, Z.H., 1980, "Stability and Measurements of Fluid and Thermal Transport in Vertical Buoyancy Induced Flows in Cold Water", Doctoral Dissertation, State University of New York at Buffalo, NY.
- (7) Qureshi, Z.H. and Gebhart, B., 1986, "The Stability of Vertical Thermal Buoyancy Induced Flows in

- Cold Pure and Saline Water", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 29, pp. 1383~1392.
- (8) Higgins, Z.M., 1981, "Stability of Buoyancy Induced Flow of Water Near the Density Extremum, Adjacent to a Vertical Isothermal Surface", Ph. D. Thesis, State University of New York at Buffalo, NY.
- (9) Higgins, J.M., and Gebhart, B., 1983, "The Stability of Vertical Buoyancy-Induced Flow in Cold Water", *J. Heat Transfer*, Vol. 105, pp. 767~773
- (10) Hwang, Y.G., 1984, "The Stability of Some Multiple Steady State and The Effect Motion Pressure in Vertical Natural Convection in Cold Pure Water", Ph. D. Thesis, State University of New York at Buffalo, NY.
- (11) Wilson, N. W., and Vyas, B.D., 1979, "Velocity Profiles Near a Vertical Ice Surface Melting into Fresh Water", *Trans. A.S.M.E.C., J. Heat Transfer*, Vol. 10, pp. 313~317.
- (12) Carey, V.P., and Gebhart, B., 1981, "Visualization of the Flow Adjacent to a Vertical Ice Surface Melting in Cold Pure Water", *J. Fluid Mech.* Vol. 107, pp. 37~55.
- (13) Higgins, J.M., and Gebhart, B., 1982, "Measurements of Instability and Disturbance Growth in Vertical Buoyancy Induced Flows in Cold Water", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 25, pp. 1397~1409.
- (14) El-Henawy, I., Gebhart, B., Hassard, B., Kazarinoff, N., and Mollendorf, J.C., 1982, "Numerically Computed Multiple Steady States of Vertical Buoyancy-Induced Flows in Cold Pure Water", *J. Fluid Mech.*, Vol. 122, pp. 235~250.
- (15) Gebhart, B., and Mollendorf, J.C., 1977, "A New Density Relation for Pure and Saline Water", *Deep Sea Res.* Vol. 24, pp. 831~848.
- (16) Nachtsheim, P.R., 1963, "Stability of Free-Convection Boundary Layer Flows", NASA TN D-2089.
- (17) Hieber, C.A., 1969, "On the Mixed Convection From a Sphere at Small Reynolds and Grashof Numbers, On the Stability of Vertical Natural Convection Boundary Layers", Doctoral Dissertation, Cornell Univ., Ithaca, NY.
- (18) 황영규, 1988, "수직 자연 대류의 수동력학적 안정성 계산에 관한 수치해석 방법", 태양에너지학회, 제 8권, 1호, pp. 82~94.
- (19) 황영규, 1986, "차가운 물에 잠겨 있는 수직 등온 벽면 주위의 부력 영향으로 인한 자연 대류에 관한 Hydrodynamic Stability 고찰", 1985년도 전반기 한국과학재단 지원 연구 최종 보고서.
- (20) Asher, U., Christiansen, J., and Russell, R.D., 1978, "COLSYS-A Collocation Code for Boundary-Value Problem. Codes for Boundary-Value Problem in Ordinary Differential Equation, (Ed. G. Goos & J. hartmanis)", *Lecture Notes in Computer Science*. No. 76, pp. 164~185.
- (21) Deuflhard, R., and Bader, G., 1982, "Multiple Shooting Techniques", Revisited Preprint No. 163, Institut für Angewandte Math., Universität Heidelberg, Heidelberg, F.R.G.
- (22) El-Henawy, I., and Hassard, B.D., and Kazarinoff, N.D., 1986, "A Stability Analysis of Non-Time-Periodic Perturbations of Buoyancy-Induced Flows in Pure Water Near 4°C", *J. Fluid Mech.* Vol. 163, pp. 1~20.
- (23) Schlichting, H., 1977, "Boundary Layer Theory", 7th ed., McGraw-Hill Book Co., NY.