

〈論 文〉

4°C 물에 잠겨있는 경사진 등은 벽주위 비평행 자연대류의 파형 안정성

황 영 규* · 장 명 룬**

(1990년 8월 23일 접수)

The Wave Stability of the Nonparallel Natural Convection Flows Adjacent to an Inclined Isothermal Surface Submerged in Water at 4°C

Young-Kyu Hwang and Myoung-Ryun Jang

Key Words : Wave Instability(파형 불안정성), Parallel Flow(평행 유동), Nonparallel Flow(비평행 유동), Neutral Stability Curve(중립안정곡선), Density Extremum(최대 밀도점), Angle of Inclination(경사각)

Abstract

A wave instability problem is formulated for natural convection flows adjacent to a inclined isothermal surface in pure water near the density extremum. It accounts for the nonparallelism of the basic flow and temperature fields. Numerical solutions of the hydrodynamic stability equations constitute a two-point boundary value problem which are accurately solved using a computer code COLSYS. Neutral stability results for Prandtl number of 11.6 are obtained for various angles of inclination of a surface in the range from -10 to 30 deg. The neutral stability curves are systematically shifted toward modified Grashof number $G=0$ as one proceeds from downward-facing inclined plate ($\gamma < 0^\circ$) to upward-facing inclined plate ($\gamma > 0^\circ$). Namely, an increase in the positive angle of inclination always cause the flows to be significantly more unstable. The present results are compared with the results for the parallel flow model. The nonparallel flow model has, in general, a higher critical Grashof number than does the parallel flow model. But the neutral stability curves retain their characteristic shapes.

기 호 설 명

<p>C : 무차원화한 파(wave) 속도, $C = \beta/\alpha$</p> <p>C_p : 정압비열</p> <p>D : 특성 경계층 두께</p> <p>$f(\eta)$: 일반화한 유동함수</p> <p>f : 주파수</p> <p>g : 중력가속도</p> <p>G : 수정한 Grashof수, $4(Gr(x/4))^{1/4}$</p>	<p>G^* : 임계 Grashof수</p> <p>$Gr(x)$: Grashof수, $gx^3\alpha_T T_0 - T_\infty /\nu^2$</p> <p>$H(\eta)$: 무차원화한 압력교란 증폭함수</p> <p>$\bar{H}(y)$: 차원있는 압력교란 증폭함수</p> <p>k : 열전도계수</p> <p>M : 고유벡터 성분에 있어서 가장 큰값</p> <p>$O(\)$: 차원의 (of order)</p> <p>P : 수동력학적 압력(hydrodynamic pressure)</p> <p>\bar{P} : P에 해당하는 교란함수</p> <p>Pr : 프란틀 수</p>
--	--

* 정회원, 성균관대학교 공과대학 기계설계학과

** 정회원, 성균관대학교 대학원

- q : Gebhart and mollenderf⁽¹⁶⁾의 밀도관계식에서 사용되는 온도항의 염도와 압력관련 지수
- R : 최대밀도변수, $(T_m - T_\infty)/(T_0 - T_\infty)$
- $S(\eta)$: 무차원화한 온도교란 증폭함수
- $S'(y)$: 차원있는 온도교란 증폭함수
- t : 시간
- T : 온도
- U : X 방향 속도성분
- \bar{U} : u 에 해당하는 교란양
- V : Y 방향 속도성분
- \bar{V} : v 에 해당하는 교란양
- x, y : 좌표 축
- Z_0 : 안정성방정식에서 부력교란 계수 $\delta q|\theta_b - R|^{q-1}(\theta_b - R)/|\theta_b - R|$
- α : 무차원화한 교란복소파수(wave number), $\alpha = \bar{\alpha}(4x/G)$
- $\bar{\alpha}$: 교란복소파수, $\bar{\alpha}_R = 2\pi/\lambda$
- α_r : Gebhart and Mollendorff⁽¹⁶⁾의 밀도관계식에서 사용되는 온도항의 계수
- β : 무차원화한 교란 주파수, $\beta = \bar{\beta}((16x^2)/(\nu G^3))$
- $\bar{\beta}$: 교란 주파수, $\bar{\beta} = 2\pi f$
- γ : 수직으로부터 기울어진 각도
- δ : 유동방향에 대한 상수, $\delta = +1$: 상향 유동
 $\delta = -1$: 하향유동
- η : 무차원화한 상사변수, $Gy/4x$
- η_∞ : 무한대에 대한 가정치
- θ : 무차원화하여 정규화한 온도, $(T - T_\infty)/(T_0 - T_\infty)$
- λ : 파장
- ν : 동점성계수
- ρ : 밀도
- $\phi(\eta)$: 무차원화한 속도교란 증폭함수
- $\bar{\phi}(y)$: 차원있는 속도교란 증폭함수
- ψ : 유동함수
- $\bar{\psi}$: 교란 유동함수
- 첨 자**
- b : 기본유동 성질에 대한
- I : 허수부에 대한
- m : 물의 최대밀도점에 대한
- o : 등온표면 조건에 대한
- R : 실수부에 대한
- ∞ : 경계층 바깥영역에 대한

1. 서 론

자연대류의 안정성 문제는 교란의 형태에 따라서 파형 불안정성(wave instability)과 와류 불안정성(vortex instability) 문제로 나눌 수 있다. 경사진 벽면 부근에 대한 와류 불안정성 연구는 Haaland와 sparrow⁽¹⁾, Chen와 Tzuoo⁽²⁾ 그리고 Hsu와 Cheng⁽³⁾등에 의하여 연구되었는데, 벽면이 수평에 가까울수록 유동은 불안정한 와도(vorticity)와 온도 교란이 야기되므로 와류 불안정성 문제가 되고, 수직에 가까울수록 와류 형태의 교란은 안정되며 파형 불안정성 문제가 됨을 밝혔다. 본 연구는 경사각이 수직으로부터 미소한 범위에서 연구되었으므로 파형 불안정성 문제로 다루었다.

수직한 벽면에 있어서 파형 불안정성 문제는 유동이 Tollmien-Schlichting 형태가 되므로 평행유동(parallel flow)으로 가정할 수 있으나, 경사진 벽면인 경우에 있어서는 경사각이 수직으로부터 증가하게 되면 벽면에 대하여 법선(normal)방향의 속도성분이 점차 커지게 되므로 평행유동의 가정은 타당하지 않게 된다. 그러므로 본 연구는 비평행성을 고려하였고, 평행유동을 가정한 경우와 상호 비교하였다.

경사진 벽면 부근에서 비평행성을 고려한 파형 불안정성 문제는 Haaland와 Sparrow⁽⁴⁾ 및 Tzuoo 등⁽⁵⁾에 의하여 연구되었는데, 그들은 플란틀 수가 7인 상온의 물이거나, 0.7부근의 공기에서와 같이 온도와 밀도의 관계가 선형적인 경우에만 국한되어 연구하였다. 그러나 본 연구는 플란틀 수가 11.6인 순수한 찬물속에서 발생하는 자연대류에 관한 안정성 문제를 다루었으며, 이 경우는 온도와 밀도의 관계가 비선형적인 경우에 해당된다.

경계층내에 최대밀도온도가 존재하게 되면 상향 유동과 하향유동이 동시에 일어나는 비정상적인 유동현상을 보이게 되는데⁽⁶⁻⁸⁾, 이 경우에 있어서는 수치해석상의 어려움 때문에 연구가 매우 부진하다. 최대밀도점 부근에서 형성되는 자연대류에 관한 안정성 연구는 Qureshi⁽⁹⁾, Higgins⁽¹⁰⁾, El-henawy등⁽¹¹⁾과, Hwang⁽¹²⁻¹⁵⁾에 의하여 연구되었는데, El-henawy등⁽¹¹⁾은 실변수 섭동법(real value perturbation)을 이용하여 안정성을 연구하였다. Hwang⁽¹²⁻¹⁵⁾은 유동반전(flow reversal)이 일어나는 복잡한 유동형태에서 중립안정곡선(neutral

stability curve) 및 일부 영역에서 교란 증폭곡선 (spatial amplification contour)을 구하여 유동의 안정성을 예측하였다. 그때 그는 두점 경계값 문제 (two-point boundary-value problem)를 만족시키기 위해서는 단순히 점근해를 이용한 단순 사격법 (simple shooting method)으로는 계산이 불가능하므로 multiple shooting이나, orthogonal collocation 방법을 사용함으로써 두점 경계값을 만족시키는 안정성 방정식의 결과를 정확히 계산하였다. 그런데 지금까지의 연구는 벽면이 수직한 경우로써 평행유동으로 가정한 경우이다. 본 연구는 경사진 벽면 부근에서 비평행성을 고려하였으므로 방정식의 형태가 다소 복잡해지는데, 이 경우도 단순 사격법으로는 계산이 불가능하므로 Hwang^(12~15)이 사용하였던 두점 경계값 문제를 따르므로써 기본유동 방정식과 안정성 방정식의 해를 정확히 구할 수 있었다.

본 연구는 밀도의 변화가 비선형적인 최대밀도점 부근이므로 일반적인 Boussinesq 제 2 가정이 적용되는 경우와는 판이하게 다르다. 그러므로 Gebhart와 Mollendorf⁽¹⁶⁾의 밀도관계식을 사용하였다.

좌표계는 Fig. 1과 같이 가열, 또는 냉각된 경사진 등온벽면이 4°C의 물속에 잠겨있을때 경사각이 반시계방향으로 기울어질 경우 '+' 방향으로, 시계 방향으로 기울어질 경우 '-' 방향으로 잡았다. 만약 경사각이 '+' 방향으로 기울어질 경우는 벽면 부근의 낮은 밀도가 주위의 높은 밀도의 아랫부분에 놓여지고, 반면 경사각이 '-' 방향으로 기울어진다면 이번에는 벽면 부근의 낮은 밀도가 주위의 높은 밀도의 윗부분에 놓이게 되는 경우이다. 이러한 물리적인 상황에서 수동력학적 안정성 방정식을 유도하였다.

본 연구는 주위의 온도가 최대밀도점과 같은 경우에 대하여 연구되었으므로 유동은 항상 상향의

경우이나, 비선형적인 밀도의 변화와, 또한 비평행성을 고려하여 문제를 해석하였다. 부수적으로 경사진 벽면 부근의 유동상황이 최대밀도변수 R 의 값이 0이 아닌 경우(즉, 두 방향의 부력이 존재하여 부력반전현상이 일어나는 경우)에도 적용하여 유동의 안정성 문제를 본 연구에서와 같이 정확하게 다룰 수 있는 해석 방법을 제시하였다.

2. 지배 방정식

2.1 기본유동 방정식

경사진 등온벽면에 이웃한 순수한 물에서 불투과성, 교란되지 않은 유동의 층류 자연대류에 대한 경계층 방정식은 다음과 같다.

연속 방정식

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0, \tag{1.a}$$

운동량 방정식

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{V} + \vec{F}, \tag{1.b}$$

에너지 방정식

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{k}{\rho C_p} \nabla^2 T, \tag{1.c}$$

여기서 P 는 수동력학적 압력(hydrodynamic pressure)이고, \vec{F} 는 부력항인데 X 방향에 대하여 다음과 같이 표현된다.

$$F_x = \frac{(\rho_\infty - \rho)}{\rho_m} g \cos \alpha. \tag{2}$$

Gebhart와 Mollendorf⁽¹⁶⁾의 밀도관계식은 온도, 염도, 압력에 따라 밀도가 정확하게 표현되는데, 그 식은 다음과 같다.

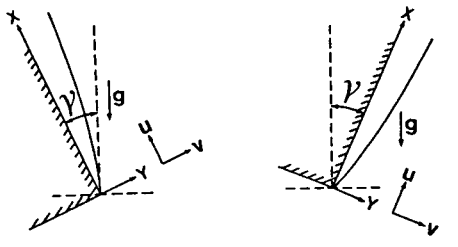
$$\rho(t, s, p) = \rho_m(s, p) [1 - \alpha_T(s, p) |T - T_m(s, p)|^{q(s, p)}], \tag{3}$$

여기서 q 는 온도항의 염도와 압력관련 지수이고, α_T 는 온도항의 계수이다. 위의 밀도관계식은 Gebhart등⁽¹⁷⁾, Hwang^(12~15) 등이 찬물속에서 수직 유동에 대한 경계층 방정식을 풀때 사용하였는데, 이 식은 방정식에 적용하기가 수월하므로 본 연구의 지배 방정식에 사용하였다.

경사각이 수직으로부터 미소한 범위이므로 압력항을 무시하고 기본 유동에 대한 경계층 방정식을 상사변환(similarity transformation)하였다. 이때 다음식들이 정의되었다.

$$\text{유동함수 } \psi = \nu G f_b(\eta),$$

$$\text{속도 } U = \psi_y = \frac{-\nu f'_b G^2}{4x}$$



(a) Positive angle (b) Negative angle
Fig. 1 The coordinate systems

$$V = -\psi_x = -\frac{\nu G}{4x}(3f_b - \eta f'_b) \quad (4)$$

$$\text{무차원화한 상사변수 } \eta = \frac{Gy}{4x} \quad (5)$$

Grashof수

$$Gr(x) = \frac{g\alpha^3 a_T}{\nu^2} |T_0 - T_\infty|^q$$

수정한 Grashof수

$$G = 4 \left(\frac{Gr(x)}{4} \right)^{1/4} \quad (6)$$

무차원화한 온도

$$\theta_b = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \quad (7)$$

기본유동 방정식은 다음과 같다.

X-운동량 방정식

$$f''''_b = -\delta[|\theta_b - R|^q - |R|^q] \cos r + 2(f'_b)^2 - 3f_b f''_b \quad (8.a)$$

에너지 방정식

$$\theta''_b = -3Pr f_b \theta'_b \quad (8.b)$$

여기서 상향유동에 대하여 $\delta = +1$, 하향유동에 대하여는 $\delta = -1$ 이다. Pr 은 프란틀수이며 q 는 Gebhart와 Mollendorf의 온도와 밀도의 관계식에 사용되는 지수이다. 또한 최대밀도변수 R 의 값은 0이다.

경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f_b(0) &= f'_b(0) = \theta_b(0) - 1 = 0, \\ f'_b(\infty) &= \theta_b(\infty) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

2.2 안정성 방정식

본 연구에서는 경사 벽면이 수직에 가깝다고 보았으므로 기본유동 방정식은 전형적인 경계층 이론에 따라 Y방향 운동량 방정식을 무시하고, 또한 X방향 운동량 방정식의 압력항을 무시하였다. 그러나 경사각이 큰 경우에는 Y방향 속도성분 V_b 가 커지므로 Y방향 운동량 방정식을 무시할 수 없게 되며, 운동량 방정식들에서 압력항들을 고려해야만 한다. 이에 따라 안정성 해석시에도 압력의 영향이 고려된 적절한 안정방정식을 사용해야만 할 것이다. 이러한 경우에는 안정성 문제를 파형 불안정성 문제로 다루기보다는 와류 불안정성 문제로 다루어야 타당하다. 본 연구에서는 경사각이 작아서 벽면이 수직에 가까운 경우로 연구대상을 국한시켰으므로 기본유동에서 압력항의 영향을 무시하고 파형 불안정성 문제로 다루었다.

본 연구는 온도와 밀도의 관계가 비선형적인 최

대밀도점 근처에서 경사진 등은벽면 부근의 비평행 유동을 고려한 파형 불안정성 문제를 취급하였다.

이때 안정성 방정식은 Y방향 기본유동 속도성분 V_b 를 고려하였으며, 압력 교란항을 소거하지 않고 유도하였다. 온도와 밀도의 관계가 선형적인 경우에 있어서는 Haaland등⁽⁴⁾과 Tzuoo등⁽⁵⁾에 의하여 연구되었는데, 그들에 의하여 유도된 안정성 방정식과 본 연구의 식을 비교하기 위하여 본 연구의 X방향 운동량 방정식과 Y방향 운동량 방정식을 교차 미분하여 압력항을 소거하고, 그들의 상황에 맞추어 본 연구의 안정성 방정식을 유도하여 비교해 봄으로써 타당성을 확인하였다.

안정성 방정식은 속도, 온도와 압력에 작은 교란을 가정하고⁽¹⁸⁾, 압력 교란항을 소거하지 않은 상태에서 방정식을 유도하였다.

$$\begin{aligned} U(x, y, t) &= U_b(x, y) + \tilde{U}(x, y, t), \\ V(x, y, t) &= V_b(x, y) + \tilde{V}(x, y, t), \\ P(x, y, t) &= P_b(x, y) + \tilde{P}(x, y, t), \\ T(x, y, t) &= T_b(x, y) + \tilde{T}(x, y, t) \end{aligned} \quad (10)$$

식 (10)을 2차원 층류자연대류에 대한 운동량 방정식에 대입한 후 기본 유동에 의해 만족되는 항을 소거하고, 교란양들을 선형화하면 다음식 (11.a) ~ (11.b)와 같다. 이때 참고문헌들^(4,19)과 같이 취급하면 V_b 의 미분항은 식(11.b)에서 나타나지 않게 된다. (즉, 식 (11.a)와 (11.b)에서 압력항을 소거하면, 와도의 항들로서 표현된 한 개의 식으로 나타낼 수 있다. 이때 $\frac{\partial U_b}{\partial Y} > \frac{\partial V_b}{\partial X}$ 이므로 와도를 $\frac{\partial U_b}{\partial Y}$ 로 처리할 수 있으며, V_b 의 미분항들은 압력항이 소거된 안정성 방정식에서 나타나지 않게 된다. 이러한 이유때문에 압력항이 소거되지 않은 식 (11.b)에서는 V_b 의 미분항을 나타내지 않았다.)

X-운동량 방정식

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + U_b \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + \tilde{U} \frac{\partial U_b}{\partial x} + V_b \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} + \tilde{V} \frac{\partial U_b}{\partial y} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} + \nu \left[\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial y^2} \right] \\ + \alpha_T g |T_0 - T_\infty|^q Z_0 \tilde{\theta} \cos r, \end{aligned} \quad (11.a)$$

Y-운동량 방정식

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + U_b \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} + V_b \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} + \nu \left[\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial y^2} \right] \\ + \alpha_T g |T_0 - T_\infty|^q Z_0 \tilde{\theta} \sin r, \end{aligned} \quad (11.b)$$

에너지 방정식

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + U_b \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{U} \frac{\partial T_b}{\partial x} + V_b \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \bar{V} \frac{\partial T_b}{\partial y} \\ & = \frac{k}{\rho C_p} \left[\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (11. c)$$

평행유동으로 가정한 경우에는 V_b , $\frac{\partial U_b}{\partial X}$ 및 $\frac{\partial T_b}{\partial X}$ 가 포함된 항들이 사라지게 된다.

이때 교란 유동함수, 교란온도, 교란 압력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{\phi} &= \bar{\phi}(y) \exp[i(\bar{\alpha}X - \bar{\beta}t)], \\ \bar{U} &= \bar{\phi}_y, \quad \bar{V} = -\bar{\phi}_x \\ \bar{T} &= \bar{S}(y) \exp[i(\bar{\alpha}x - \bar{\beta}t)], \\ \bar{P} &= \bar{H}(y) \exp[i(\bar{\alpha}x - \bar{\beta}y)], \end{aligned} \quad (12)$$

여기서 $\bar{\alpha}$ 는 복수 파수이고 $\bar{\beta}$ 는 교란 주파수이다.

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \bar{\alpha}_R + i\bar{\alpha}_I = \frac{2\pi}{\lambda} + i\bar{\alpha}_I, \\ \bar{\beta} &= \bar{\beta}_R = 2\pi f. \end{aligned} \quad (13)$$

교란량은 다음과 같이 무차원화 되었다.

$$\begin{aligned} \phi(\eta) &= \frac{\bar{\phi}(y)}{\bar{U}D}, \quad S(\eta) = \frac{\bar{S}(y)}{\bar{T}_0 - \bar{T}_\infty}, \\ H(\eta) &= \frac{\bar{H}(y)}{\rho \bar{U}^2}, \quad \alpha = \bar{\alpha}D, \quad \beta = \frac{\bar{\beta}D}{\bar{U}} \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 $D = \frac{4x}{G}$, $\bar{U} = \frac{\nu G^2}{4x}$,

안정성 방정식은 다음과 같다.

X-운동량 방정식

$$\begin{aligned} [f'_b - C] \phi' - f''_b \phi - \frac{1}{i\alpha G} [(3f_b - \eta f'_b) \phi'' \\ - (2f'_b - \eta f''_b) \phi'] = -H + \frac{1}{i\alpha G} [\phi''' \\ - \alpha^2 \phi' + Z_0 S \cos r] \end{aligned} \quad (15. a)$$

Y-운동량 방정식

$$\begin{aligned} [f'_b - C] \phi - \frac{1}{i\alpha G} (3f_b - \eta f'_b) \phi' \\ = -\frac{H'}{\alpha^2} + \frac{1}{i\alpha G} [\phi'' - \alpha^2 \phi] + \frac{1}{\alpha^2 G} Z_0 S \sin r \end{aligned} \quad (15. b)$$

에너지 방정식

$$\begin{aligned} [f'_b - C] S - \theta'_b \phi - \frac{1}{i\alpha G} [(3f_b - \eta f'_b) S' \\ + \eta \theta'_b \phi'] = \frac{1}{i\alpha G Pr} [S'' - \alpha^2 S] \end{aligned} \quad (15. c)$$

여기서 $Z_0 = \delta \frac{(\theta_b - R)}{|\theta_b - R|} a |\theta_b - R|^{(q-1)}$

$C = \beta/\alpha$ 이다.

경계조건은 다음과 같다.

$$\phi(0) = \phi'(0) = S(0) = 0,$$

$$\phi'(\infty) = S(\infty) = H(\infty) = 0. \quad (16)$$

3. 수치해석 방법

기본유동에 있어서 경사각이 증가할수록 경계층이 두터워질 것이므로 무한대의 가정치(η_∞)를 크게 확장시킬 필요성이 있고, 또한 안정성 방정식에서 Y방향 속도성분 V_b 를 고려하므로써 평행유동 경우보다도 더 크게 충분한 η_∞ 를 취해야 한다. 그런데 단순 사격법(simple shooting method)은 η_∞ 가 증가하게 되면 계산이 불가능하게 되므로 본 연구에서는 orthogonal collocation 방법에 기초를 둔 두 점 경계값 문제로서 계산하였다. 이때 Hwang^(12~15)이 제시하였던 방법을 사용하였으며, 컴퓨터 코드 COLSYS⁽²⁰⁾를 이용했다.

안정성 방정식과 경계조건을 실수부와 허수부로 분리하여 12차 order방정식으로써 계산되었다. 기본유동 방정식의 해는 COLSYS⁽²⁰⁾를 사용하여 우선적으로 계산한 후 참고문헌들^(12,13)에서와 같이 B-spline으로 저장되었다가 계산이 진행되는 중에 안정성 방정식의 계수들로 사용되었다.

수치해석 과정에서 주의할 점은 경계조건이 모두 0이어서 무용해(trivial solution)로 수렴하거나, 발산하게 되므로 최소한 한개의 0이 아닌 경계조건이 있어야한다. 그러므로 경계조건에서 $\phi'(0) = 0$, 즉 실수부와 허수부로 분리하였을때 $\phi'_R(0) = 0$, $\phi'_I(0) = 0$ 을 임의의 경계조건인 $\phi_R(\infty) = C$, $\phi_I(\infty) = 0$ 와 바꿈으로써 경계조건을 약간 수정하였다. 이때 임의의 경계조건의 C값을 $10^{-11} \leq C \leq 10^{-5}$ 범위의 0이 아닌 작은 값으로 취함으로써 원래의 경계조건을 만족시키는 수렴하는 해를 쉽게 구할 수 있었다. 이렇게 0이 아닌 경계조건을 적절히 취하여 고유벡터의 최대값이 0(1)의 크기가 되도록 조절하였다. [참고문헌 (12)~(15) 참조]

고유치 α_R , β_R 을 구하기 위하여 G값을 고정시키고 α_R , β_R 을 예측하거나, 또는 β_R 을 고정시키고 α_R , G를 예측하였다. 그리고 수정한 경계 조건으로 COLSYS⁽²⁰⁾를 이용하여 두점 경계값 문제를 풀면서, 경계조건 $|\phi'_R(0)| + |\phi'_I(0)|$ 가 10^{-6} 이하가 될 때까지 뉴턴 방법을 이용하여 반복 계산함으로써 수렴하는 고유치들을 구하였다.

경계조건을 만족시키기 위하여 η_∞ 를 충분히 잡아야하는데, 변동없는 해가 될때까지 η_∞ 를 서서히 늘려봄으로써 적당한 값을 취하였다. 이때 η_∞ 의

값이 30에서부터 70까지의 범위에서 안정성 방정식의 해를 구하였다.

수정한 경계조건이 사용되었을 때 그 해는 원래의 경계조건 $\phi'_R(0) = \phi'_I(0) = 0$ 을 만족시켜야 하는데, 유용해로 수렴했다는 판정기준은 다음과 같다. [참고문헌 (12)와 (13) 참조]

$$0 \leq \eta \leq \infty \left(\frac{|\phi'_R(0)|}{|\phi'_R(\eta)|}, \frac{|\phi'_I(0)|}{|\phi'_I(\eta)|} \right) \leq 10^{-4}, \quad (17. a)$$

$$\max \left(\frac{|\phi'_R(0)|}{M}, \frac{|\phi'_I(0)|}{M} \right) \leq 10^{-7}, \quad (17. b)$$

여기서 M 은 고유벡터성분에 있어서 가장 큰 절대값을 말한다.

모든 계산은 VAX/VMS 11-750의 double precision으로 수행되었고, 한점의 고유치들을 계산하기 위한 CPU시간은 약 500초가 소모되었다.

4. 결과 및 고찰

기본유동 방정식에서는 경사각을 5°씩 변화시키면서 0°에서 30°까지 해를 구하였는데, 이때 경사각이 0°일때와 30°일때 기본유동의 속도 분포곡선은 Fig. 2와 같다. 여기서 경사각이 증가할수록 유동이 비활발해진다는 것을 알 수 있다.

또한 Fig. 3은 온도분포곡선인데 경사각이 증가할수록 열전달률(heat transfer rate)이 감소하며, 따라서 경계층이 두터워질 것이다. 경사각이 미소한 범위이므로 큰 차이를 보이지는 않으나, 경사각이 증가할수록 무한대의 가정치(η_∞) 값이 길어져야 한다는 것을 알 수 있다.

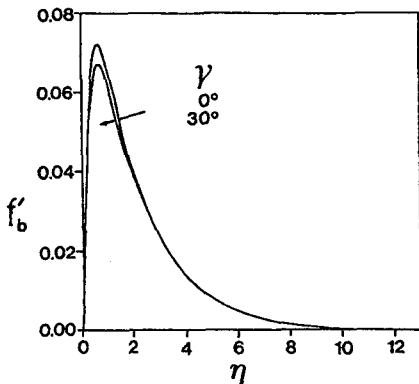


Fig. 2 Dimensionless X-direction velocity component $f'_b(\eta)$ for angles of inclination $\gamma=0^\circ$ and $\gamma=30^\circ$

평행유동이거나 비평행유동의 모델이 채택되었던 간에 유동이 불안정하기 시작하는 불안정점, 즉 임계 Grashof수는 벽면의 경사각 γ 가 양의 방향으로 증가할수록 감소하였다. 따라서 중립안정곡선들의 형태는 경사각 γ 가 증가함에 따라 수정한 Grashof 수 $G=0$ 을 향하여 전체적으로 이동하는 경향을 보였다. 이것은 양의 방향으로 경사각을 증가시킬수록 현저하게 유동이 불안정해지는 것을 의미한다. 그러나 비평행유동의 모델에 해당되는 임계 Grashof수는 평행유동 모델의 임계 Grashof수에 비해 다소 증가하였다.

Fig. 4와 Fig. 5은 평행유동(parallel flow)과 비평행유동(nonparallel flow)의 경우를 비교하여 나타내었다. 그림에서와 같이 비평행유동의 경우는 평행유동의 경우보다 임계 Grashof수(critical Grashof number)가 큰 값을 갖는 경향을 보였다. 두 경우의 임계 Grashof수는 Table 1에 비교하여

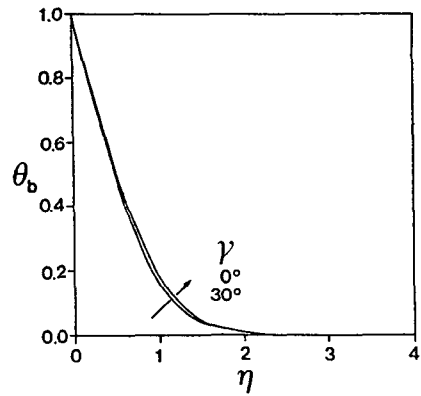


Fig. 3 Normalized temperature θ_b for angles of inclination $\gamma=0^\circ$ and $\gamma=30^\circ$

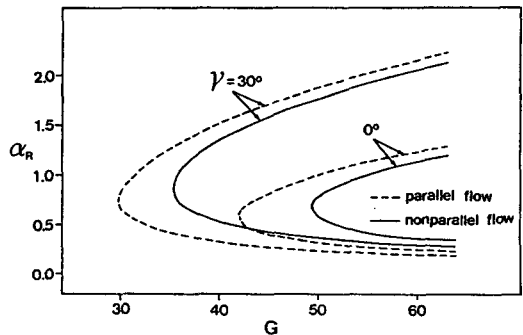


Fig. 4 Neutral stability curves for the nonparallel and parallel flow models in $(G-\alpha_R)$ -plane

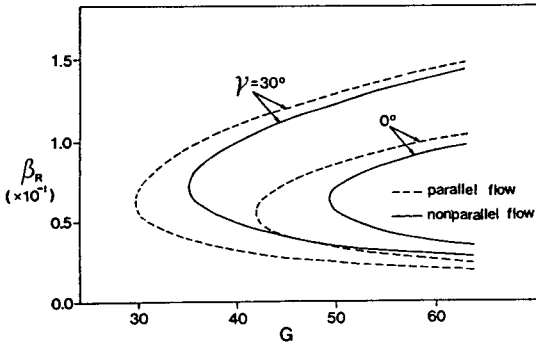


Fig. 5 Neutral stability curves for the nonparallel and parallel flow models in $(G - \beta_R)$ -plane

Table 1 Critical values for parallel and nonparallel flow model

γ	Parallel flow			Nonparallel flow		
	α_R^*	β_R^*	G^*	α_R^*	β_R^*	G^*
-10°	0.5185	0.050	46.788	0.6488	0.060	55.047
0°	0.5782	0.055	41.880	0.6795	0.063	49.295
10°	0.6356	0.059	37.636	0.7683	0.069	44.304
20°	0.7283	0.064	33.657	0.8516	0.073	39.734
30°	0.7734	0.064	29.691	0.8688	0.071	35.181

나타내었는데, 경사각이 $-10^\circ, 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ$ 일 때 평행유동의 경우 임계 Grashof수는 각각 46.788, 41.880, 37.636, 33.657, 29.691로 나타났지만 비평행유동의 경우는 각각 55.047, 49.295, 44.304, 39.734, 35.181을 가짐으로써 전체적으로 큰 임계 Grashof를 가졌다. 그리고 비평행유동의 경우는 평행유동의 경우보다 무차원화한 파수 α_R 과 교란 주파수 β_R 의 범위가 작아지는 경향이 나타났다. Grashof수가 58~65의 범위에서 비교하여 보면, 경사각이 $0^\circ, 30^\circ$ 일 때 평행유동의 경우 α_R 은 각각 0.2185~1.2807, 0.1829~2.1911의 범위를, 그리고 β_R 은 각각 0.024~0.102, 0.019~0.146의 범위를 갖는데 반하여 비평행유동의 경우 α_R 은 각각 0.3325~1.1271, 0.2733~2.1097의 범위를, 그리고 β_R 은 각각 0.0349~0.093, 0.0274~0.142의 범위를 가졌다. 그러나 경사각에 따른 기본적인 특성은 두 경우가 모두 같은 경향을 보이고 있다.

평행유동의 경우 중립안정곡선의 꼭지점 아래부

분에서 수정한 Grashof수 G 가 증가할 때 고유치 α, β 의 값들이 감소한다. 이렇게 α, β 의 값들이 감소할수록 고유함수들은 η 에 대해 점차 상대적으로 완만하게 감소하게 된다. 이러한 때에도 두 점 경계값 문제로서 다루기 위해서는 불가피하게 무한대의 가정치 η_∞ 의 값을 크게 설정해야만 하므로 해를 구하기가 어렵다.

비평행유동의 경우 식 (15.a)~(15.c)에서와 같이 η 를 계수로하는 항들(즉, 평행유동의 경우에는 나타나지 않는 항들)이 추가된다. 이 영향으로 중립안정곡선의 꼭지점 아래부분에 해당되는 α, β 는 동일한 G 에서 평행유동의 α, β 값들에 비해 상대적으로 큰 값을 가진다. (Fig. 4 및 Fig. 5 참조) 그러므로 비평행유동의 경우는 평행유동에 비해 상대적으로 작은 값의 η_∞ 를 설정할 수 있기 때문에 중립안정 계산수행이 가능하다. 그러나 비평행유동의 경우는 평행유동의 경우보다 방정식이 상대적으로 더 복잡하므로 수치해석상 더 큰 어려움이 따랐고, CPU시간도 더 소모되었다.

경사각에 따른 중립안정곡선은 Fig. 6와 Fig. 7에 그려졌다. Fig. 6에서는 중립안정곡선을 $G - \alpha_R$ 의 평면에 나타내었고, Fig. 7에서는 $G - \beta_R$ 의 평면에 나타내었다. 임계 Grashof수를 G^* 로 나타낼때 $G < G^*$ 인 경우 교란은 감쇄되고, $G > G^*$ 인 경우 최소한 교란의 일부는 증폭된다. Table 1에서와 같이 경사각에 따른 임계 Grashof수는 '+' 방향으로 경사각이 기울어질수록 현저하게 감소되었고, '-' 방향으로 기울어지면 증가되었다. 따라서 경사각이 '+' 방향으로 기울어질수록 유동은 점점 불안정해지고, '-' 방향으로 기울어지게 되면 안정된다는 것을 알 수 있다.

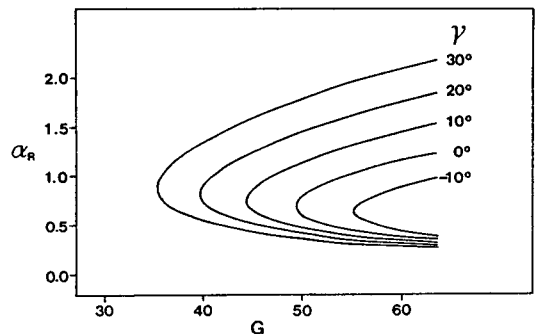


Fig. 6 Neutral stability curves for the nonparallel flow models in $(G - \alpha_R)$ -plane

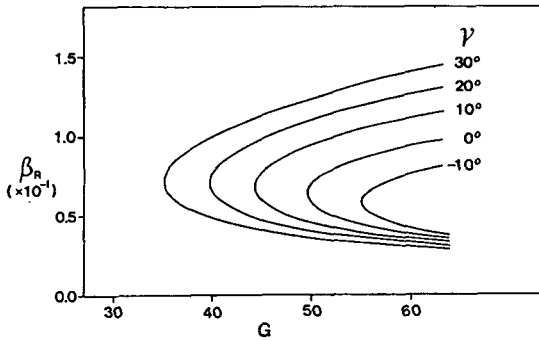


Fig. 7 Neutral stability curves for the nonparallel flow models in $(G-\beta_R)$ -plane

또한 교란에 대해 유동이 불안정해지기 시작하는 무차원 위치인 임계 Grashof수 G^* 는 식 (6)의 수정한 Grashof수 G 의 정의로부터 경사진 등은 벽에서 교란의 증폭이 일어나기 시작하는 거리 x 도 증가한다는 것을 알 수 있다. 즉 경사각이 '+' 방향으로 기울어질수록 교란의 증폭이 시작되는 거리는 작게 나타난다.

그리고 경사각이 '+' 방향으로 기울어질수록 보다 넓은 범위의 무차원화한 파수(wave number)와 교란주파수를 갖는 경향을 보인다. 그러나 본 연구에서는 경제적 여건 때문에 제한된 범위내의 수정한 Grashof수에 한하여 중립안정 수치결과를 수행하였으므로, α , β 의 값들은 비교적 작은 범위내에 있다. 실제로 가까운 파장이나 주파수의 범위를 구하기 위해서는 계산 범위를 확대할 필요성이 있다. Table 2에는 각각의 경사각에서 대표적으로 다섯 점씩 결과치들이 주어졌다. 수정한 Grashof수가 58~65에서, 무차원화한 파수 α_R 의 범위는 경사각이 -10° , 0° , 10° , 20° , 30° 일 때 각각 0.3682~0.9873, 0.3325~1.1271, 0.3089~1.4467, 0.2902~1.7137, 0.2733~2.1097로 나타났다. 식 (13), 식 (14)로부터 파장은 $\lambda = (2\pi \cdot 4x) / (\alpha_R \cdot G)$ 의 관계로 표현 된다. 여기서 경사각이 '+' 방향으로 기울어질수록 파장이 보다 넓은 범위를 갖는다는 것을 알 수 있는데, 중립안정곡선 아랫부분의 장파영역보다는 윗부분의 단파영역에서 큰 차이를 보이고 있다. 또한 수정한 Grashof수가 58~65에서, 무차원화한 교란 주파수 β_R 의 범위는 경사각이 -10° , 0° , 10° , 20° , 30° 일 때 각각 0.0377~0.083, 0.0349~0.093, 0.0325~0.112,

Table 2 Neutral stability results of α_R , β_R and G for various angles of inclination

γ	α_R	β_R	G
-10°	0.3682	0.0377	63.821
	0.4308	0.0430	59.520
	0.6486	0.0600	55.047
	0.8945	0.0770	59.902
	0.9873	0.0830	63.606
0°	0.3325	0.0349	63.821
	0.4609	0.0460	53.838
	0.6795	0.0630	59.295
	1.0011	0.0850	54.111
	1.1271	0.0930	58.350
10°	0.3089	0.0325	63.821
	0.4399	0.0440	51.384
	0.7683	0.0690	44.304
	1.1181	0.0920	49.199
	1.4467	0.1120	60.114
20°	0.2902	0.0301	63.821
	0.4156	0.0410	49.743
	0.8516	0.0730	39.734
	1.4049	0.1070	48.469
	1.7137	0.1250	58.625
30°	0.2733	0.0274	63.821
	0.4113	0.0390	46.787
	0.8688	0.0710	35.181
	1.7541	0.1220	48.818
	2.1097	0.1420	61.355

0.0301~0.125, 0.0274~0.142로 나타났다. 따라서 경사각이 '+' 방향으로 기울어질수록 보다 넓은 범위의 파수와 교란 주파수에서 불안정해진다는 것을 알 수 있다.

Fig. 8, Fig. 9, Fig. 10의 경계조건과 유용해의 판정 기준식(17. a), (17. b)를 만족시키는 고유벡터들의 형태를 보여주는데, 이들의 최대값을 기준으로 하여 정규화(normalization)하였다. 그림들은

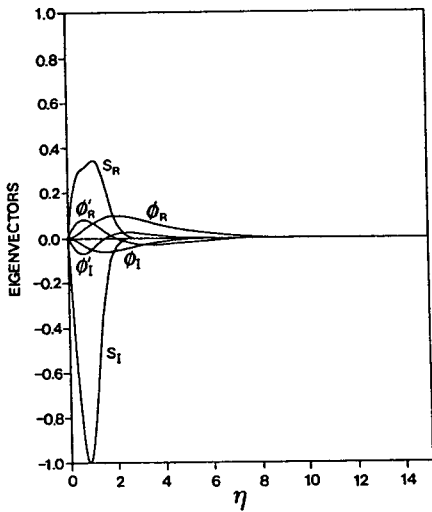


Fig. 8 Plots of eigenvector components vs. η corresponding to the solution at $R=0.0$, $\gamma=30^\circ$, $\alpha_R=0.51501$, $\beta_R=0.047$, and $G=40.897$

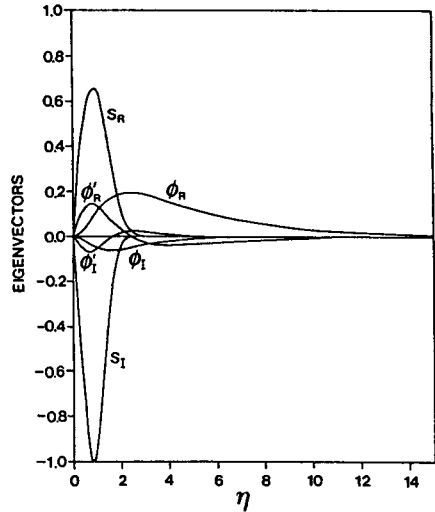


Fig. 10 Plots of eigenvector components vs. η corresponding to the solution at $R=0.0$, $\gamma=30^\circ$, $\alpha_R=0.2733$, $\beta_R=0.0274$, and $G=63.821$

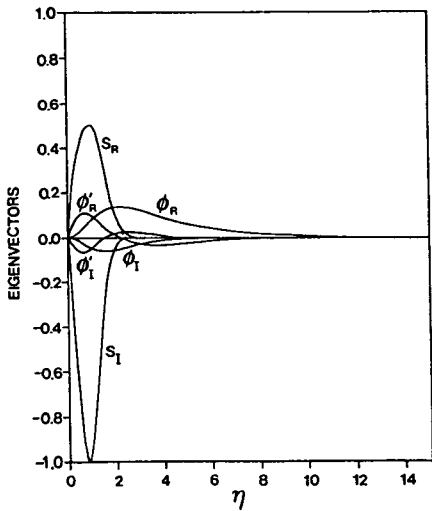


Fig. 9 Plots of eigenvector components vs. η corresponding to the solution at $R=0.0$, $\gamma=30^\circ$, $\alpha_R=0.3381$, $\beta_R=0.033$, and $G=53.832$

경사각이 30° 일 때 중립안정곡선상의 임계점 아랫부분에서 대표적으로 세점에 대하여 나타내었는데, α_R , β_R 이 증가할수록 고유벡터의 성분중 $|S_R|$ 과 $|S_I|$ 의 값차이가 커지는 경향을 보이고 있다. 그 차이가 커질수록 고유벡터의 형태가 매우 불규칙적으로 변하게 되어 대체로 α_R 과 β_R 이 큰 값을 갖는 임계점 윗 부분에서는 계산상 많은 어려움이 따랐

고, 만족하는 고유벡터값들을 구하기가 힘들었다.

5. 결 론

4°C 부근의 찬물속에 잠겨있는 경사진 등온벽면 주위에 형성되는 자연 대류를 기본유동으로하여 유선방향의 속도성분뿐 아니라 벽면에 대하여 법선방향의 속도성분을 고려하여 유동의 안정성 문제를 다루었다. 이때 비평행유동의 경우 평행유동의 결과보다 큰 임계 Grashof수를 보이고 있고, 무차원화한 파수(wave number)와 교란 주파수의 범위가 작아지는 경향을 보이고 있다. 그러나 경사각에 따른 기본적인 특성은 두 경우가 같은 경향을 보이는데, 두 경우 모두 경사각이 '+'방향으로 기울어질 경우 벽면 부근의 낮은 밀도가 주위의 높은 밀도의 아랫부분에 놓이게 되므로 경사각이 커질수록 보다 넓은 파수와 교란 주파수에서 불안정한 경향이 되었고, 반면 경사각이 '-'방향으로 기울어질 경우 벽면 부근의 낮은 밀도가 주위의 높은 밀도의 윗부분에 놓이게 되므로 유동이 안정되었다.

참 고 문 헌

- (1) Haaland, S.E., and Sparrow, E.M., 1973, "Vortex Instability of Natural Convection Flow on Inclined

- Surfaces", International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 16, pp. 2355~2367.
- (2) Chen, T.S., and Tzuoo, K.L., 1982, "Vortex Instability of Free Convection Flow over horizontal and Inclined Surfaces", ASME Journal of Heat Transfer, Vol. 104, pp. 637~643.
- (3) Hsu, C. T., and Ping Cheng., 1979, Vortex Instability in buoyancy Induced Flow over Inclined Heated Surfaces in Porous Media", Journal of Heat Transfer, Vol. 101, pp. 660~665.
- (4) Haaland, S.E., and Sparrow, E.M., 1973, "Wave Instability of Natural Convection on Inclined Surfaces Accounting for Nonparallelism of the Basic Flow", ASME Journal of Heat Transfer, Vol. 96, pp. 405~407.
- (5) Tzuoo, K.L., and Chen, T.S., and Armaly, B. F., 1985, "Wave Instability of Natural Convection Flow on Inclined Surfaces", Journal of Heat Transfer, Vol. 107, pp. 107~111.
- (6) Carey, V.P., and Gebhart, B., 1981, "Visualization of the Flow Adjacent to a Vertical Ice Surface Melting in Cold Pure Water", J. Fluid Mech. 107, pp. 37~55.
- (7) El-Henawy, I., and Gebhart, B., and Hassard, B., and Kazarinoff, N., and Mollendorf, J., 1982, "Numerically Computed Multiple Steady States of Vertical Buoyancy Induced Flows in Cold Pure Water", J. Fluid Mech. Vol. 122, pp. 235~250.
- (8) Wilson, N. W., and Vyas, B. D., 1979, "Velocity Profiles Near a Vertical Ice Surface Melting into Fresh Water", Trans. ASME J. Heat Transfer, Vol. 101, pp. 313~317.
- (9) Qureshi, Z. H., 1980, "Stability and Measurements of Fluid and Thermal Transport in Vertical Buoyancy Induced Flow in Cold Water", Doctoral Dissertation, State University of new york, Buffalo, NY.
- (10) Higgins, J. M., 1981, "Stability of Buoyancy Induced Flow of Water near the Density Extremum, Adjacent to a Vertical, Isothermal Surface", Doctoral Dissertation, State University of New york, Buffalo, NY.
- (11) El-Henawy, I., and Hassard, B., and Kazarinoff, N., 1986, "A Stability Analysis of Non-Time-Periodic Perturbations of Buoyancy-Induced Flows in Pure Water Near 4°C", J. Fluid Mech. Vol. 163, pp. 1~20.
- (12) Hwang, Y. K., 1984, "The Stability of Some Multiple Steady States and the Effect of Motion Pressure in Vertical Natural Convection Flows in Cold Water", Ph. D. Thesis, State University of New York, Buffalo, NY.
- (13) 황영규, 1988, "수직 자연대류의 수동력학적 안정성 계산에 관한 수치해석 방법", 태양에너지학회지, Vol. 8, No. 1, pp. 82~94.
- (14) 황영규, 복철수, 1985, "순수한 찬물속에 잠긴 수직 등은 벽면 근처에서의 자연대류의 Hydrodynamic Stability. ($0.0 \leq R \leq 0.15$ 에서의 Neutral Stability)", 대한기계학회 추계학술대회 초록집.
- (15) 황영규, 이운용, 1986, "순수한 찬물속에서 발생하는 수직 자연 대류의 Hydrodynamic Stability. ($0.3 \leq R \leq 0.5$ 에서의 Neutral Stability연구)", 대한기계학회 추계학술대회 초록집.
- (16) Gebhart, B., and Mollendorf, J. C., 1977, "A New Density Relation for Pure and Saline Water", Deep Sea Res. 24, pp. 813~848.
- (17) Gebhart, B., and Mollendorf, J. C., 1978, "Buoyancy-Induced Flows in Water under Conditions in Which Density Extrema May Arise", J. Fluid mech, 89, pp. 673~707.
- (18) Plapp, J. E., 1957, "Laminar Boundary Layer Stability in Free Convection", Doctoral Dissertation, Calif. Instit. Tech. Pasadena, Calif.
- (19) Haaland, S.E., and Sparrow, E. M., 1973, "Stability of Buoyant Boundary Layers and Plumes, Taking Account of Nonparallelism of the Basic Flows", Trans. ASME J. Heat Transfer, Series C, Vol. 95, No. 3, pp. 295~301.
- (20) Ascher, U., and Christiansen, J., and Russell, R. D., 1978, "COLSYS-A Collocation Code for Boundary-Value Problem. Codes for Boundary-Value problem in Ordinary Differential Equation, (Ed. G. Goos & J. hartmanis)", Lecture Notes in Computer Science. NO. 76, pp. 164~185.