

〈論 文〉

정4각단면덕트 입구영역에서 층류맥동유동 유동특성에 관한 연구

박 길 문*

(1991년 1월 23일 접수)

A Study on Flow Characteristics of Developing Laminar Pulsating Flows in a Square Duct

Gil-Moon Park

Key Words : Laminar Pulsating Flow(층류맥동유동), Entrance Length(입구길이), Velocity Profiles(속도분포), Developing Flows(발달과정유동), Dimensionless Frequency(무차원 각진동수), Velocity Amplitude ratio(속도 진폭비)

Abstract

In the present study, flow characteristics of the developing laminar pulsating flows in a square duct are investigated analytically and experimentally. The analytical solutions of velocity distributions for these flows are compared with the velocity profiles measured by means of hot-wire anemometer. The following parameters are studied in the entrance region of a square duct such as critical Reynolds number, velocity profiles and entrance length of developing laminar pulsating flows. The equations of velocity profiles are analytically obtained by the linearization of the nonlinear convective terms in momentum equations for laminar pulsating flows, and the experimental results are obtained for air flow by hot-wire anemometer with data acquisition and processing system in a square duct of 400mm(width) × 40mm(height) × 4000mm(length). The results obtained from analytical and experimental studies are as follows; (1) The entrance length is a function of hydraulic diameter, Reynolds number and dimensionless frequency. The entrance length is correlated as $(L_e/D_h)/Re_{e,ta} = 0.081$ from steady velocity component of developing laminar pulsating flow. (2) The critical Reynolds number depends on hydraulic diameter, velocity profiles, dimensionless frequency and fluid kinematic viscosity. The critical Reynolds number obtained is $Re_{e,ta,cr} = 170 \omega^*$ in pulsating flow. (3) The equations of velocity profiles and entrance length of developing pulsating flows are proposed, and the analytical solutions are well agreed with the experimental results qualitatively.

기 호 설 명	a
A_1 : 속도 진폭비 ($= u_{m,os,1} /u_{m,ta}$)	: 덕트단면의 반폭(mm)
A_p : 피스톤 진폭(mm)	b : 덕트단면의 반높이(mm)
	D_h : 수력직경 ($=4ab/(a+b)$) (mm)
	f : 진동 주파수(Hz)

* 정회원, 조선대학교 공과대학 기계공학과

- P : 압력(Kg_f/m²)
- Re : 레이놀즈수
- t : 시간(s)
- t' : vt/b^2
- u, v, w : x, y, z 축에서 속도성분(m/s)
- x, y, z : 직교 좌표계(Fig. 1)
- x' : 무차원 덕트축방향위치 좌표 $(= \frac{\nu}{b^2 u_{max}} \times \frac{x/D_h}{Re_{eta}})$
- y' : 무차원 덕트횡단면 가로방향위치 좌표 $(= \frac{y}{a})$
- z' : 무차원 덕트횡단면 가로방향위치 좌표 $(= \frac{z}{b})$
- α_i : 방정식에서 i 번째 근³⁾
- β_n : $(2n+1)/2\pi$
- λ_1 : $(2n+1)^2 - (2/\pi \cdot \alpha_1)^2$
- μ : 점성계수(kg/m·s)
- ν : 동 점성계수(m²/s)
- ρ : 밀도(kg/m³)
- ω : 각진동수 $(= 2\pi f)$
- ω^- : 무차원 각진동수 $(= b\sqrt{\frac{\omega}{\nu}})$
- γ : 중횡비 $(= \frac{a}{b})$

하첨자

- c_r : 임계값
- c_i : 덕트의 중심선값
- m : 단면 평균값
- la : 층류유동
- os : 진동유동
- ps : 맥동유동
- st : 정상유동
- ta : 시간 평균값
- 1 : 유한 fourier급수에서 기본과
- || : 진동성분속도의 진폭

1. 서 론

기계공업의 발달로 인하여 산업현장의 기계장치가 대형화, 고성능화 및 정밀화됨에 따라 유체기계에 연결된 덕트시스템의 최적설계는 장치효율, 안

정성 및 경제성등에 큰 영향을 미치고 있다. 덕트내의 유동특성을 정확하게 규명한 기초자료는 유체기계의 효율적 운전과 덕트시스템의 최적설계에 필수적 자료이다.

유체기계의 시동과 정지시 연결된 덕트내의 유체유동, 왕복동기관의 배기덕트 유동, 로켓과 제트엔진에서 맥동제트유동, 유압관로에서 파동현상에 의한 맥동유동과 동물의 혈액순환계통의 혈액유동등은 모두 비정상유동인 맥동유동(pulsating flows)에 속한다 이와 같은 맥동유동은 유체기계의 성능, 효율과 안전성에 크게 영향을 미치므로, 이 분야에 대한 연구의 필요성이 절실하게 요구되고 있다. 또한 맥동유동은 유동장에서 유속의 변화가 주기적으로 변화되는 유동으로서 정상유동과 진동유동이 합성되어 이루어진 유동으로 정의되고, 맥동연소기(pulsating combustor)에서 연소효율과 맥동제트 및 로켓엔진에서 추진효율과 열교환기에서 열전달효율과 화학반응탑 및 교반기에서 물질전달효율등을 증가시키는 장점이 있는 반면에 덕트유동에서 압력손실이 커지고, 수력 및 유격작용을 발생하며 덕트의 수명을 짧게하는 단점도 있다^{1,2)}.

특히 왕복동기관에 연결된 배기덕트의 입구영역에서는 유동이 발달과정에 있으므로 발달과정의 유동해석(developing flow analysis)을 하여야 한다. 이와 같은 발달과정유동해석은 유동이 발달되고 있는 덕트의 입구길이와 덕트시스템의 최적설계에 필수적인 자료이므로 덕트 내의 입구영역에서 맥동유동의 유동특성에 대한 이론적 및 실험적 연구가 절실하게 요구되고 있다³⁾. 유동이 발달되고 있는 덕트의 입구영역에서 맥동유동의 유동해석 방법으로서는 일반적으로 이론적인 연구방법으로는 운동량방정식을 유도하여 수치해석하는 방법과 비선형인 대류항을 선형화시켜 해석하는 방법등이 있고, 실험적인 연구방법으로는 고감도 응답특성이 좋은 열선 유속계와 LDV 유속계를 이용하여 속도분포를 측정하고, 고감도 압력변환기에 의하여 압력을 측정하여 유동해석하는 방법등이 있다.

덕트내의 입구영역에서 정상유동과 비정상유동에 대한 기존 연구들을 살펴보면 Park⁴⁾등은 정4각덕트 입구영역에서 층류정상유동의 유동특성을 이론 및 실험적으로 연구 발표하였고, 또한 Park⁵⁾등은 4각덕트 입구영역에서 천이정상유동에 대한 유동특성과 입구길이식을 제안하였고, Park⁶⁾등은 덕트내의 입구영역에서 비정상 천이유동에 대한 유동특

성을 이론 및 실험적 연구결과를 발표하였고, Park⁽⁷⁾은 정4각단면의 입구영역에서 층류비정상유동의 유동특성을 이론 및 실험적으로 연구결과를 발표하였다.

Choi⁽⁸⁾는 완전발달된 유동영역에서 비정상 천이 유동의 속도파형과 속도분포로부터 천이 비정상유동의 유동영역규정 및 유동특성을 이론 및 실험적으로 발표하였다. 그리고 Ohmi⁽⁹⁾등은 원판내의 완전발달된 유동영역에서 층류맥동유동의 유동특성을 연구 발표하였지만, 아직까지 정4각단면덕트 입구영역에서 층류맥동유동의 유동특성에 대한 연구결과는 충분치 않다고 사료된다.

본 연구에서는 정4각단면덕트 입구영역에서 층류맥동유동(laminar pulsating flows)의 유동특성을 이론 및 실험적으로 규명하기 위하여, 이론적 방법으로 덕트 입구영역에서의 층류맥동유동에 대한 운동량방정식을 유도한 후 비선형인 대류항을 선형화시켜서 라플라스변환으로 속도분포식의 해를 구하였고, 실험적인 방법으로는 시험덕트 크기는 횡단면의 가로×세로가 40mm×40mm이고, 길이가 4000mm인 정4각단면덕트 입구영역에서 송풍기에 의한 공기흡입유동으로 층류정상유동을 얻고, 스카치요크형 가진기(scotch-yoke type oscillator)에 의하여 층류진동유동을 발생하며 이들 두유동을 합성시켜 발생한 층류맥동유동에 대하여 열선유속계의 열선신호로부터 얻어진 속도파형을 고찰하여 덕트내의 맥동유동에 대한 임계레이놀즈수를 결정하고 속도분포를 측정하였다. 그리고 이론적으로 얻어진 속도분포식과 열선유속계로 측정한 속도분포를 비교검토하여 정확성을 검증하고, 이들 해석결과로부터 층류맥동유동의 입구길이(entrance length) 식을 결정하여 제안하였다.

2. 이론해석

2.1 지배방정식

정4각 단면 덕트내의 입구영역에서 층류맥동유동

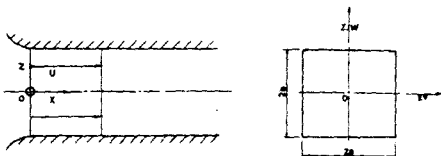


Fig. 1 Coordinate system of square duct

에 대한 유동특성을 이론적으로 규명하기 위하여 Fig. 1과 같이 좌표계를 설정하여, x,y,z축방향의 속도성분을 각각 u, v, w라 하였다. 본 연구에서 선정한 작동유체는 공기이므로, 외력을 무시한 비압축성 유동(ρ =일정)이라 가정할 때, 운동량 방정식과 연속 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (1.a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (1.b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (1.c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

y축 방향인 속도성분(v)과 z축 방향의 속도성분(w)은 x축 방향의 속도성분(u)에 비해서 대단히 작기 때문에 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 또는 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ 조건을 적용하고, y축 방향과 z축 방향의 속도성분들을 무시하여 정리하면 운동량 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3)$$

유체가 덕트내에 유입되는 입구영역에서 해를 구하기 위하여 운동량 방정식 중의 대류항을 연속 방정식을 이용하여 정리하고 덕트 단면에 대하여 적분을 하면 다음과 같다.

$$\int_A \left\{ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right\} dA = \int_A \left\{ u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} - u \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial w}{\partial z} \right\} dA \quad (4)$$

벽면에서 u, v, w는 0이므로 Von Karman의 적분 방정식과 Green정리를 이용하면 다음과 같은 식을

얻을 수 있다.

$$\int_A \left\{ \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right\} dx dy = \int_c P dy + \int_c Q dx \quad (5)$$

$$\int_A \left\{ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right\} dA = \int_A 2u \frac{\partial u}{\partial x} dA = \int_A \frac{\partial (u^2)}{\partial x} dA \quad (6)$$

여기서 $u^2 = u_m \cdot u$ 로 가정하여 정리하면 대류항은 다음과 같이 선형화된다.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = u_m \frac{\partial u}{\partial x}$$

식(7)을 식(3)에 대입하여 정리하면 선형화된 운동량 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_m \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (8)$$

충류맥동유동의 단면평균속도는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$u_{m,ps}(t) = u_{m,ta} + |u_{m,os,1}| e^{i\omega t} \quad (9)$$

윗식을 변형하면 다음과 같이 된다.

$$u_{m,ps}(t) = u_{m,ta} \left(1 + \frac{|u_{m,os,1}|}{u_{m,ta}} e^{i\omega t} \right) = u_{m,ta} (1 + A_1 e^{i\omega t}) \quad (10)$$

여기서 $A_1 = \frac{|u_{m,os,1}|}{u_{m,ta}}$ 이다.

식(8)에서 $u_m \frac{\partial u}{\partial x}$ 를 충류맥동유동에 대하여 다음과 같이 근사화시킬 수 있다.

$$u_m \frac{\partial u}{\partial x} = u_{m,ta} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (11)$$

식(11)을 식(8)에 대입하여 정리하면 충류맥동유동

의 선형화시킨 운동량방정식 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_{m,ta} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (12)$$

2.2 속도 분포식

Fig. 2에서와 같이 충류맥동유동의 단면 평균속도는 정상유동성분과 진동유동성분의 합으로 표시된 $u_{m,ps} = u_{m,ta} + |u_{m,os,1}| \cos(\omega t + \angle u_{m,os,1})$ 이다.

덕트내의 충류맥동유동에 대한 선형화시킨 운동량방정식(12)을 만족시키는 경계조건은 다음과 같이 된다.

$$\left. \begin{aligned} x=0, u_{ps} &= u_{m,ta} + |u_{m,os,1}| e^{i\omega t} \\ &= u_{m,ta} (1 + A_1 e^{i\omega t}) \\ y=\pm a; u &= 0 \\ z=\pm b; u &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

식(8)의 각 항을 단면평균적분하여 압력구배에 대하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial u_m}{\partial t} - \frac{\nu}{A} \int_A \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dydz \quad (14)$$

식(14)를 식(12)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_{m,ta} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_m}{\partial t} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{\nu}{A} \int_A \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dydz \quad (15)$$

운동량방정식(15)의 변수들을 다음과 같이 무차원

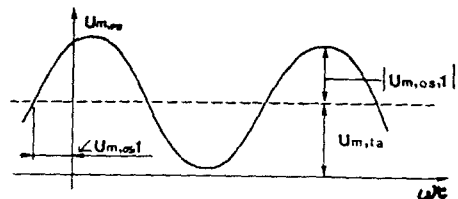


Fig. 2 Velocity curves of pulsating flows

화 시킨다.

$$\left. \begin{aligned} y' &= \frac{y}{a}, \quad z' = \frac{z}{b}, \\ u' &= \frac{u}{u_{m,ta}}, \quad u' = \frac{u_m}{u_{m,ta}} \\ r &= \frac{a}{b} (1 \leq r \leq \infty) \\ x' &= \frac{\nu}{b^2 u_{m,ta}} x, \quad t' = \frac{\nu}{b^2} t \\ \omega' &= a^2 \omega / \nu \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

식(16)을 식(15)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 무차원화 시킨 운동량방정식이 된다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u'}{\partial t'} + \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ &= \frac{\partial u_m'}{\partial t'} + \nu \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \gamma^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} \right) \\ & - \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \nu^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} \right) dy' dz' \end{aligned} \quad (17)$$

경계조건인 식(13)를 무차원화시키면 다음과 같이 된다.

$$\left. \begin{aligned} x' &= 0, \quad u' = u_m' = 1 + A_1 e^{i\omega' t'} \\ y' &= \pm 1; \quad u' = 0 \\ z' &= \pm 1; \quad u' = 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

위의 경계조건과 더불어, 식(17)의 해를 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} & u'(x', y', z', t') \\ &= u'_{st}(x', y', z') \\ &+ u_{os}'(x', y', z') e^{i\omega' t'} \end{aligned} \quad (19)$$

경계조건인 식(18)를 다음과 같이 분리한다.

$$\begin{aligned} x' &= 0, \quad u'_{st}(0, y', z') = 1, \quad u_{os}'(0, y', z') e^{i\omega' t'} \\ &= A_1 e^{i\omega' t'} \end{aligned} \quad (20)$$

식(19)을 식(17)에 대입하여 정리하면 정상성분과 진동성분의 운동량방정식과 경계조건이 다음과 같이 분리된다.

정상성분의 운동량방정식 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'_{st}}{\partial x'} &= \left(\frac{\partial^2 u'_{st}}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u'_{st}}{\partial z'^2} \right) \\ & - \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u'_{st}}{\partial y'^2} + \gamma^2 \frac{\partial^2 u'_{st}}{\partial z'^2} \right) dy' dz' \end{aligned} \quad (21)$$

윗식의 경계조건은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} u'_{st}(0, y', z') &= 1, \quad u'_{st}(x', \pm 1, z') \\ &= u'_{st}(x', y', \pm 1) = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

진동성분의 운동량방정식 :

$$\begin{aligned} i\omega' u_{os}' + \frac{\partial u_{os}'}{\partial x'} \\ &= i\omega' A_1 + \left(\frac{\partial^2 u_{os}'}{\partial y'^2} + \gamma^2 \frac{\partial^2 u_{os}'}{\partial z'^2} \right) \\ & - \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u_{os}'}{\partial y'^2} + \gamma^2 \frac{\partial^2 u_{os}'}{\partial z'^2} \right) dy' dz' \end{aligned} \quad (23)$$

윗식을 변형하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{os}'}{\partial x'} &= \left(\frac{\partial^2 u_{os}'}{\partial y'^2} + \gamma^2 \frac{\partial^2 u_{os}'}{\partial z'^2} \right) \\ & - i\omega' u_{os}' + i\omega' A_1 \\ & - \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u_{os}'}{\partial y'^2} + \gamma^2 \frac{\partial^2 u_{os}'}{\partial z'^2} \right) dy' dz' \end{aligned} \quad (24)$$

윗식의 경계조건은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} u_{os}'(0, y', z') &= A_1, \quad u_{os}'(x', \pm 1, z') \\ &= u_{os}'(x', y', \pm 1) = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

덕트입구영역에서 층류맥동유동에 대한 정상성분의 운동량방정식(21)의 해는 정상유동의 입구영역에서 속도분포식으로서 다음과 같이 된다.

$$\frac{u_{st}}{u_{m,ta}} = \frac{1 - z'^2 - \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \frac{\cosh(\beta_n \gamma y')}{\cosh(\beta_n \gamma)} \cos \beta_n z'}{\frac{2}{3} - \frac{128}{\pi^5} \frac{1}{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tan(\beta_n \gamma)}{(2n+1)^5}}$$

$$\frac{\pi^6}{128} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i^2} \left[1 - \frac{\cos a_i z'}{\cos a_i} \right] + \frac{\pi^3}{8} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_i^2} \frac{(-1)^n}{(2n+1)N_i} \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\gamma\sqrt{N_i}y'\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\sqrt{N_i}\right)} \cos\beta_n z'$$

$$+ \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 N_i^2} \left[\frac{3}{2} \frac{\tanh\left(\frac{\pi}{2}\gamma\sqrt{N_i}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\gamma\sqrt{N_i}\right)} - 1 - \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\pi}{2}\gamma\sqrt{N_i}\right) \right]}{\times e^{-\gamma^2 a_i^2 x'}} \quad (26)$$

여기에서 $N_i = \frac{2i+1}{2}$ 이고, $\beta_n = \frac{2n+1}{2}\pi$ 이다.

벽트 입구영역에서 층류맥동유동은 정상유동성분과 진동유동성분의 합으로 표시되기 때문에 진동성분에 대한 운동량방정식의 해를 다음과 같이 얻는다.

다. 진동성분의 운동량 방정식(24)에서 $x'=0$ 에서 $u'_{os}=A$ 인 경계조건에서 x' 에 관하여 라플라스변환을 하여 정리하면 완전발달된 유동영역에서 맥동유동의 진동성분의 속도분포식은 다음과 같이 된다⁽⁶⁾.

$$u_{os,d} = \frac{\pi A_1}{2} \left[\frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos\beta_n z'}{2n+1} \frac{1}{\gamma^2(2n+1)^2 + \frac{4}{\pi^2} i\omega'}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 \left\{ \gamma^2(2n+1)^2 + \frac{1}{\pi^2} i\omega' \right\}}} \right]$$

$$\times \frac{\left[1 - \frac{\cosh\frac{\pi}{2}\sqrt{\gamma^2(2n+1)^2 + \frac{4}{\pi^2} i\omega'} y'}{\cosh\frac{\pi}{2}\sqrt{\gamma^2(2n+1)^2 + \frac{4}{\pi^2} i\omega'}} \right]}{\left[1 - \frac{\tanh\left\{\frac{\pi}{2}\sqrt{\gamma^2(2n+1)^2 + \frac{4}{\pi^2} i\omega'}\right\}}{\frac{\pi}{2}\sqrt{\gamma^2(2n+1)^2 + \frac{4}{\pi^2} i\omega'}} \right]} \right] e^{i\omega' t}$$

$$= \frac{\pi}{2} A_1 \left[\frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \frac{\cos\beta_n z'}{\Omega_n^2} \left\{ 1 - \frac{\cosh\frac{\pi}{2}\Omega_n y'}{\cosh\frac{\pi}{2}\Omega_n} \right\}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 \Omega_n^2} \left\{ 1 - \frac{\tanh\left(\frac{\pi}{2}\Omega_n\right)}{\frac{\pi}{2}\Omega_n} \right\}} e^{i\omega' t} \right] \quad (27)$$

여기서 $\Omega_n = \left\{ \gamma^2(2n+1)^2 + \frac{4}{\pi^2} i\omega' \right\}^{1/2}$

입구영역에서 층류맥동유동에 대한 과도상태의 진동성분을 고려하여 정상성분과 진동성분의 속도

분포식을 합성하여 정리한 속도분포식은 다음과 같다⁽⁶⁾.

$$\frac{u_{ps}}{u_{m,ca}} = \frac{1-z^2 - \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \frac{\cosh(\beta_n \gamma y')}{\cosh(\beta_n \gamma)} \cos\beta_n z'}{\frac{2}{3} - \frac{128}{\pi^3} \frac{1}{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh(\beta_n \gamma)}{(2n+1)^5}}$$

$$+ \frac{\frac{\pi^6}{128} \frac{1}{a_i^2} \left[1 - \frac{\cos a_i z'}{\cos a_i} \right] + \frac{\pi^3}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_i^2} \frac{(-1)^n}{(2n+1)N_i} \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\gamma\sqrt{N_i}y'\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\sqrt{N_i}\right)} \cos\beta_n z'}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 N_i^2} \left[\frac{3}{2} \frac{\tanh\left(\frac{\pi}{2}\gamma\sqrt{N_i}\right)}{\frac{\pi}{2}\gamma\sqrt{N_i}} - 1 - \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\pi}{2}\gamma\sqrt{N_i}\right) \right]}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \beta_n z'}{(2n+1)} \frac{1}{\gamma^2 (2n+1)^2 + \frac{4}{\pi^2} i \omega'} \left\{ 1 - \frac{\cosh \frac{\pi}{2} \sqrt{\gamma^2 (2n+1)^2 + \frac{4}{\pi^2} i \omega'} y'}{\cosh \frac{\pi}{2} \sqrt{\gamma^2 (2n+1)^2 + \frac{4}{\pi^2} i \omega'}} \right\} \\
 & + \frac{\pi}{2} A_1 \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 \left\{ \gamma^2 (2n+1)^2 + \frac{4}{\pi^2} i \omega' \right\}} \left\{ 1 - \frac{\tanh \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\gamma^2 (2n+1)^2 + \frac{4}{\pi^2} i \omega'} \right)}{\frac{\pi}{2} \sqrt{\gamma^2 (2n+1)^2 + \frac{4}{\pi^2} i \omega'}} \right\}}{\frac{\pi^6}{128} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^2 (1 - \cos \beta_n z' / \cos \alpha_i)}{(\gamma^2 \alpha_i^2 + i \omega') \alpha_i^2} + \frac{\pi^3}{8} \gamma^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \beta_n z'}{(\gamma^2 \alpha_i^2 + i \omega') (2n+1) N_i} \frac{\cosh \left(\frac{\pi}{2} \gamma \sqrt{N_i} y' \right)}{\cosh \left(\frac{\pi}{2} \gamma \sqrt{N_i} \right)}} \\
 & + A_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 N_i^2} \left\{ \frac{3}{2} \frac{\tanh \left(\frac{\pi}{2} \gamma \sqrt{N_i} \right)}{\left(\frac{\pi}{2} \gamma \sqrt{N_i} \right)} - 1 - \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\pi}{2} \gamma \sqrt{N_i} \right) \right\}}{e^{-(\gamma^2 \alpha_i^2 + i \omega') x'} \cdot e^{i \omega' t'}}
 \end{aligned} \tag{28}$$

여기서 α_i 는 윗식에서 i 번째의 근이다.

덕트입구영역에서 층류맥동유동의 속도분포식을 고찰하여 보면 속도분포는 덕트 입구로부터 축방향의 위치 (X'), 레이놀즈수 (Re_{ia}), 덕트축 중심에서 z 방향의 위치 (z'), y 방향의 위치 (y'), 무차원 각진동수 (ω'), 가로세로비 (γ)와 속도분포비 (A_1) 등에 따라 변화함을 알 수 있다. 그리고, 속도분포를 실험결과와 비교하기 위하여 computer에 의하여 100번째 항까지 수치계산하여 도시하였다.

3. 실험

3.1 실험장치

층류맥동유동의 유동특성에 대한 실험을 하기 위하여 설치된 실험장치의 개략도를 Fig. 3에 도시하였다. 본 실험장치의 주요부는 시험덕트, 스카치-요크형 가진기, 정류상자 및 관로, 송풍기등으로 구성되어 있고, 송풍기에 의하여 흡입되는 공기는 시험덕트의 입구에 설치된 유입관(bell mout)를 통하여 원활하고 균일하게 유입되어 시험덕트의 입구

부를 통하여 정류상자 및 송풍기를 거쳐 송출된다.

시험덕트는 횡단면의 가로×세로($2a \times 2b$)가 40 mm×40mm이고 길이가 4000mm인 매끄러운 아크릴로 제작하였으며, 속도파형과 속도분포측정을 위하여 열선유속계의 열선센서를 삽입할 수 있도록 직경 5.4mm의 구멍을 덕트 윗면 중심선상 ($y'=0$)에서 입구로부터 덕트축방향을 따라 덕트무차원 축방향위치 $x/D_h=0 \sim 100$ 사이에 $5D_h (=200 \text{ mm})$ 의 등간격으로 20개 지점에 구멍을 뚫었다.

진동유동을 발생하기 위한 스카치-요크형 가진기 (scotch-yoke oscillator)에 연결된 변속모터의 회전수 변화에 의하여 진동유동의 각 진동수 변화를 조절할 수 있도록 하고, 가진기에 연결된 회전원판의 중심으로 부터 위치변화에 따라 피스톤진폭의 변화를 조절할 수 있도록 제작하여, 회전원판의 주위에 12개의 등간격으로 구멍을 뚫고 여기에 투광기와 수광기를 설치하여 1주기당 12개의 시간표시가 될 수 있도록 위상표시기를 설치하였다.

3.2 실험방법

층류맥동유동은 층류정상유동과 층류진동유동이 합성되어 이루어진 유동으로서 정상유동은 송풍기에 의하여 시험덕트에 흡입유동으로 주어지고, 진동유동은 스카치-요크형 가진기에 의하여 발생하였다. 정상유동의 유속조절은 유량제어밸브로 조절하였고, 진동유동은 변속모터의 회전수 변화에 의하여 진동유동의 각진동수 (f)가 0.3Hz가 되도록 하고, 가진기에 연결된 회전원판의 중심으로 부터 스카치-요크의 위치를 고정하여 피스톤진폭이 10mm

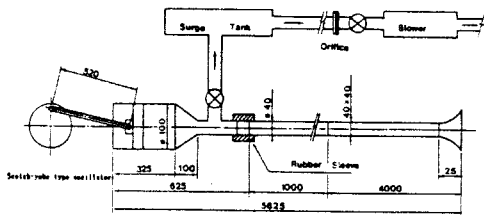


Fig. 3 Schematic diagram of experimental apparatus

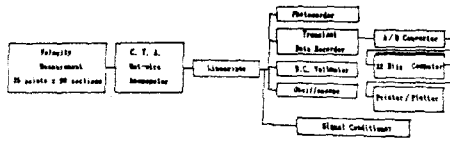


Fig. 4 Diagram of data acquisition and processing system

가 되도록하여 실험하였다.

본 실험에서 각진동수(ω)는 0.3Hz이므로 무차원 각진동수 $\omega^* = b\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$ 로부터 계산하였고, $\omega^* = 6.87$ 이었다. 층류맥동유동의 시간평균레이놀즈 수는 $Re_{e,ta} = \frac{u_{m,ta} D_h}{\nu}$ 로 계산하였고, $Re_{e,ta} = 1.080$ 이었다. 층류진동유동의 레이놀즈수는 $Re_{e,os} = \frac{|u_{m,os}|}{\nu} D_h$ 로 계산하였고, $Re_{e,os} = 524$ 이었다. 여기에서 $|u_{m,os}|$ 는 층류진동유동의 속도진폭을 의미한다. 따라서 속도진폭비는 $A_1 = \frac{|u_{m,os}|}{|u_{m,ta}|}$ 로 계산하였고, $A_1 = 0.48$ 이었다.

이들의 실험조건에서 덕트 입구유동영역에서 층류맥동유동의 유동특성을 규명하기 위하여 덕트 무차원 축방향위치 (x/D_h)가 0.075, 10, 50, 60, 70, 80 및 90의 위치에서 덕트 중심으로부터 횡방향(z')으로 이송장치에 의하여 13분할한 각지점에서 층류맥동유동의 속도분포를 열선유속계로 측정하였다. 이 속도분포의 자료들을 처리하기 위한 자료처리시스템을 Fig. 4에 도시하였다.

그리고 층류맥동유동에서 천이맥동유동으로 변화되는 현상을 열선유속계의 열선신호로부터 광기록계에 의하여 기록된 속도파형(velocity wavefor-

ms)으로 부터 임계레이놀즈수를 계산하여 결정하였다. 본 실험에서 층류맥동유동에 대한 중요변수들을 요약한 실험조건을 Table 1에 표시하였다.

4. 결과 및 고찰

4.1 임계레이놀즈수

덕트내의 층류맥동유동의 유동상태를 열선유속계의 열선센서로부터 얻은 출력신호를 광기록계에 기록한 속도파형으로서 무차원 각진동수가 $\omega^* = 6.87$ 인 경우에 층류맥동유동의 시간평균 레이놀즈수 ($Re_{e,ta}$)를 변화시키면서 완전 발달된 유동여역에서 덕트중심으로 부터 x 축 방향에 따라 층류맥동유동 ($Re_{e,ta} = 1.080$), 임계맥동유동 ($Re_{e,ta} = 1.150$), 천이맥동유동 ($Re_{e,ta} = 1.510$) 및 난류맥동유동 ($Re_{e,ta} = 2.310$)에 대한 속도파형을 Fig. 5(a)~(d)에 도시하였다.

층류맥동유동에 천이맥동유동으로 변화되는 순간 난류성분이 나타나기 시작한 임계맥동유동의 단면 평균속도를 계산하여 덕트내의 맥동유동에 대한 임계레이놀즈수를 $Re_{e,ta,cr} = (u_{m,ta} D_h) / \nu$ 에 의하여 계산하였다. 이 때의 층류맥동유동에서 천이맥동유동으로 변화하는 임계시간평균 레이놀즈수 ($Re_{e,ta,cr}$)는 1,150정도이며, 시간평균 레이놀즈수와 무차원 각진동수(ω^*)와의 관계를 계산하면 본 실험에서의 맥동유동의 임계레이놀즈수의 관계식은 $Re_{e,ta,cr} \approx 170\omega^*$ 이었다.

열선유속계의 완전 발달된 유동영역의 덕트내에 삽입된 열선센서의 출력신호가 광기록계에 기록하여 얻은 이 속도파형의 형태는 맥동유동의 시간평균 레이놀즈수 ($Re_{e,ta}$)와 무차원 각진동수 (ω^*)에 따라 변화함을 알 수 있었다. 그리고 층류맥동유동의 속도분포 실험에서는 이 속도파형에 의하여 무차원 각진동수 (ω^*)가 6.87이고, 맥동유동의 시간평균 레이놀즈수 ($Re_{e,ta}$)가 1,080에서는 층류맥동유동의 범위로 생각할 수 있었고, 이 실험결과의 속도파형을 고찰해보면 관벽쪽에서 속도파형의 진폭이 적게 나타나고 있는데 그 이유는 벽부근의 경계층의 영향으로 인한 마찰저항때문으로 예측된다.

4.2 속도분포

층류맥동유동의 시간평균 레이놀즈수 ($Re_{e,ta}$)는 1,080이고, 진동성분 레이놀즈수 ($Re_{e,os}$)가 524에서 층류맥동유동의 완전 발달된 유동영역인 덕트축방

Table 1 Experimental conditions of developing laminar pulsating flow

Run	x/D_h	f (Hz)	A_p (mm)	ω^*	$Re_{e,ta}$	$Re_{e,os}$	$\nu \times 10^3$ (m ² /s)	A_1
1	0.075							
2	10							
3	50							
4	60	0.300	10.00	6.87	1080	524	1.62	0.48
5	70							
6	80							
7	90							

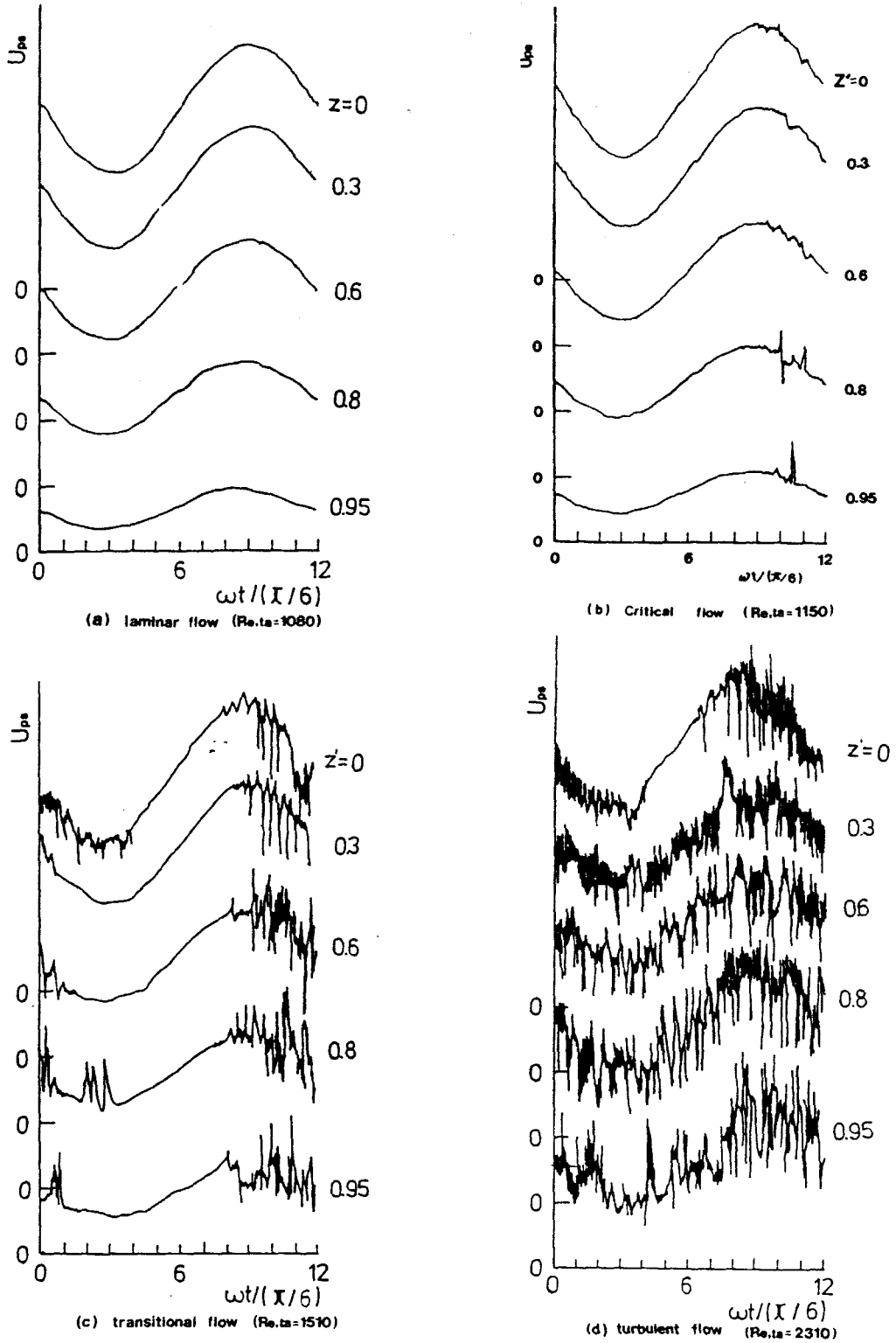


Fig. 5 Velocity waveforms of pulsating flow

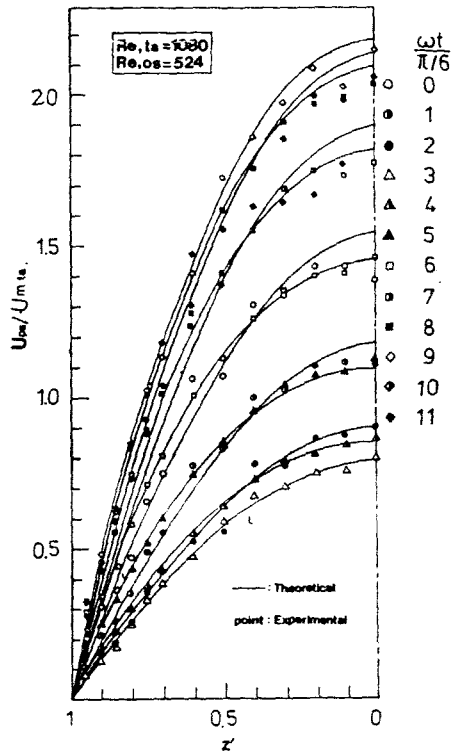


Fig. 6 Velocity profiles of fully developed laminar pulsating flow

항의 위치에서 위상각과 덕트 중심에서 무차원 횡방향위치(z)에 따라 속도분포 변화를 Fig. 6에 도시한 것으로서 실선은 이론해이고, 각 점들은 실험에 의한 측정값을 나타낸 것이다. 총류맥동 유동은 정상유동에 진동유동이 합성되어서 이루어지므로 무차원위상각($\frac{\omega t}{\pi/6}$)이 0~6까지는 정상유동에 진동유동의 유출유동이 합성되어 이루어지므로 속도진폭비가 작게 나타나고, 6~12까지는 정상유동에 진동유동의 유입유동이 합성되어 이루어지므로 속도진폭비가 크게 나타남을 고찰할 수 있다. 위상각이 9부근에서 최대속도진폭비가 되는 것은 이 부근에서 최대진동속도가 주어짐을 알 수 있다.

덕트의 입구영역에서 총류맥동유동의 속도분포를 덕트 무차원축방향위치(x/D_h)가 0.075, 10, 50, 60, 70, 80 및 90에서 덕트 중심으로부터 무차원횡방향위치(z)가 0.0, 0.3, 0.6, 0.8 및 0.9의 각 지점에서 위상 ($\frac{\omega t}{\pi/6}$)의 변화에 따라 측정한 실험결과와 총류맥동유동의 운동량방정식에서 비선형인 대류항을 선형화시켜서 이론적으로 얻은 속도분포식과의 비

교를 Fig. 7(a)~(g)에 도시하였으며, 그림에서 실선은 이론해이고 각 점들은 실험에 의하여 얻은 측정값을 나타낸 것이다.

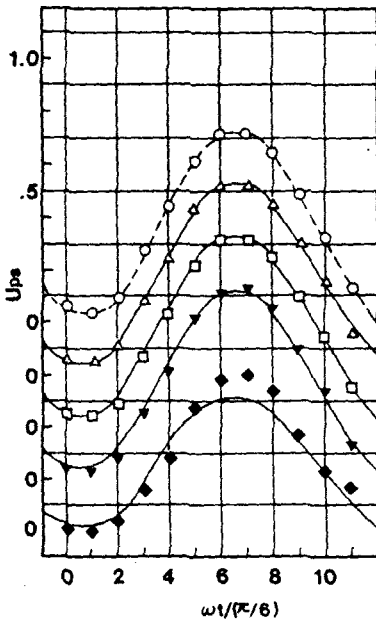
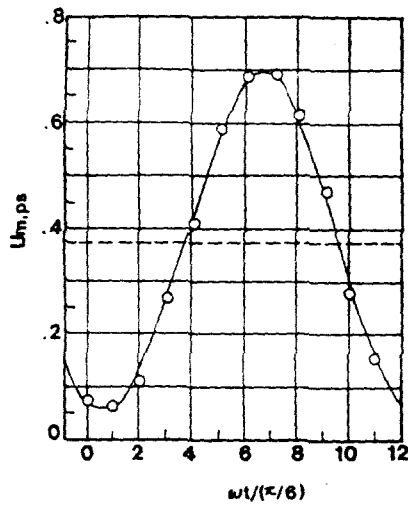
이들의 결과를 고찰하여 보면 덕트 입구에서부터 맥동유동의 속도분포가 점점 증가하여 축방향의 위치(x/D_h)가 80~90부근에서 속도분포가 거의 일정하게 이루어져서 완전 발달된 맥동유동영역에 달하였다는 것을 알 수 있고, 이론해와 실험결과가 비교적 잘 일치하고 있으나 덕트 입구에서 유동이 하류로 감에 따라 발달과정에 있는 유동과 덕트벽 부근에서 약간 오차가 존재하는 이유는 맥동유동의 운동량방정식 중에서 비선형인 대류항을 선형화시켜서 근사이론해를 얻는 것과 측정오차에서 발생한 것으로 예측된다.

4.3 입구길이

덕트의 입구영역에서 총류맥동유동의 발달과정을 거쳐 완전 발달된 유동이 될때까지의 이론결과를 무차원 각진동수(ω^+)가 6.87이고, 총류맥동유동의 시간평균 레이놀즈수(Re_{ia})가 1,080인 경우에 무

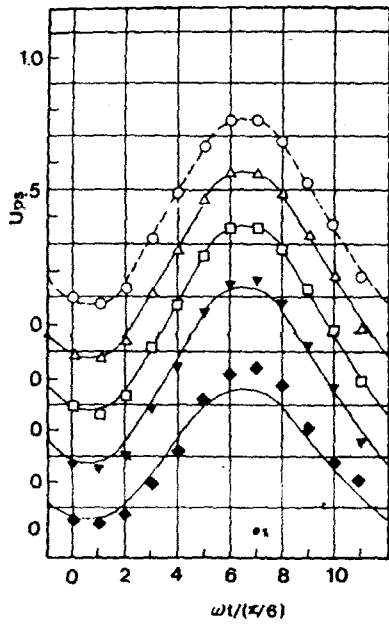
차원 덕트 축방향 위치 ($\frac{x}{D_h}$)에 따라 맥동유동의 정상유동 속도성분분포와 진동유동 속도성분분포의 변화를 각기 Fig. 8과 Fig. 9에 도시하였다. 이들 그림에서 2개의 나란한 직선은 완전 발달된 유동에 대한 속도의 99%~100% 범위의 값을 나타낸 것이고, 덕트 입구에서 총류맥동유동이 유입하여 덕트 축방향의 하류로 유동하면서 발달과정을 거쳐 완전 발달된 총류맥동유동으로 가는 덕트축 방향의 무차

원 길이 ($x' = \frac{x}{D_h}$), 즉 바꿔 말하자면 총류맥동 유동의 입구길이는 정상유동속도성분분포는 0.081 정도이고, 진동유동 속도성분분포는 0.04 정도이다. 총류맥동유동은 총류정상유동과 총류진동유동의 합성으로 얻어지는 유동으로서 총류맥동유동의 정상유동 속도성분을 무차원 길이에 대하여 Fig. 8와 같은 유동의 진동유동 속도성분을 무차원 길이에 대하여 나타낸 Fig. 9를 비교하면 두 속도 성분의

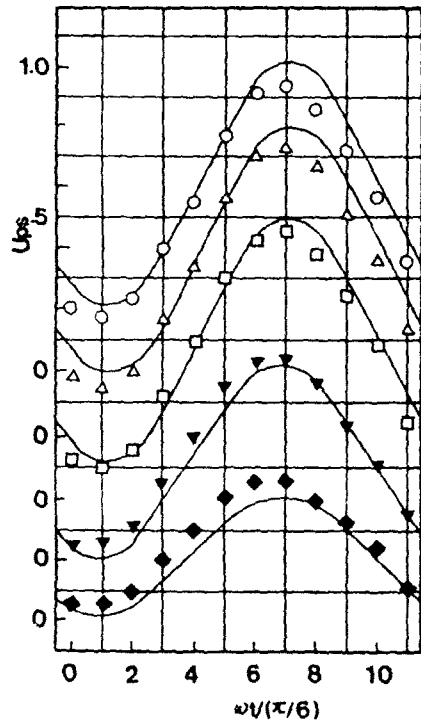


	z'
○	0.0
△	0.3
□	0.6 ; experimental
▼	0.8
◆	0.9
—	; theoretical

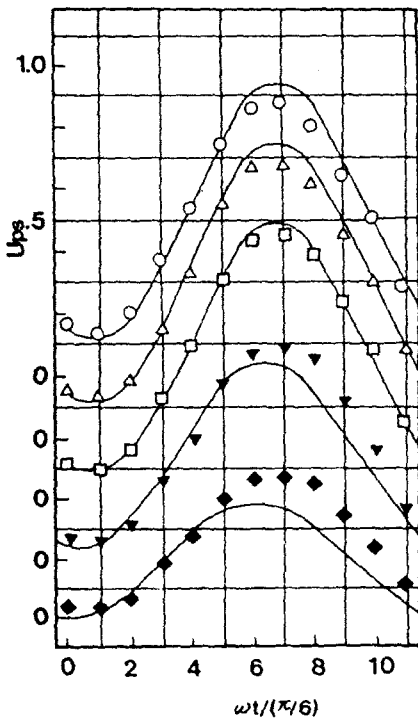
(a) $X/D_h = 0.075$



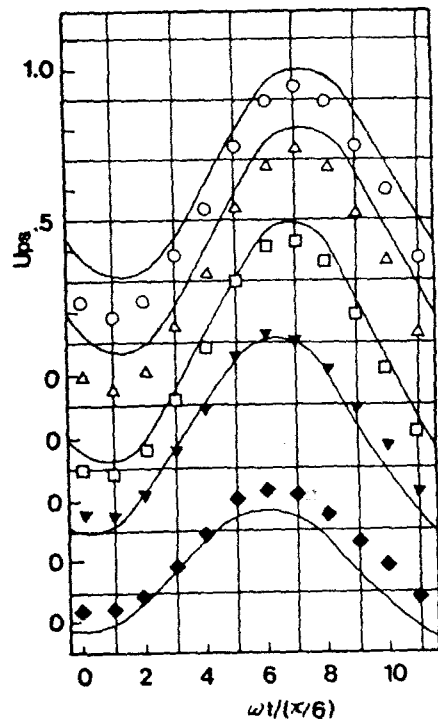
(b) $X/D_h=10$



(d) $X/D_h=60$



(c) $X/D_h=50$



(e) $X/D_h=70$

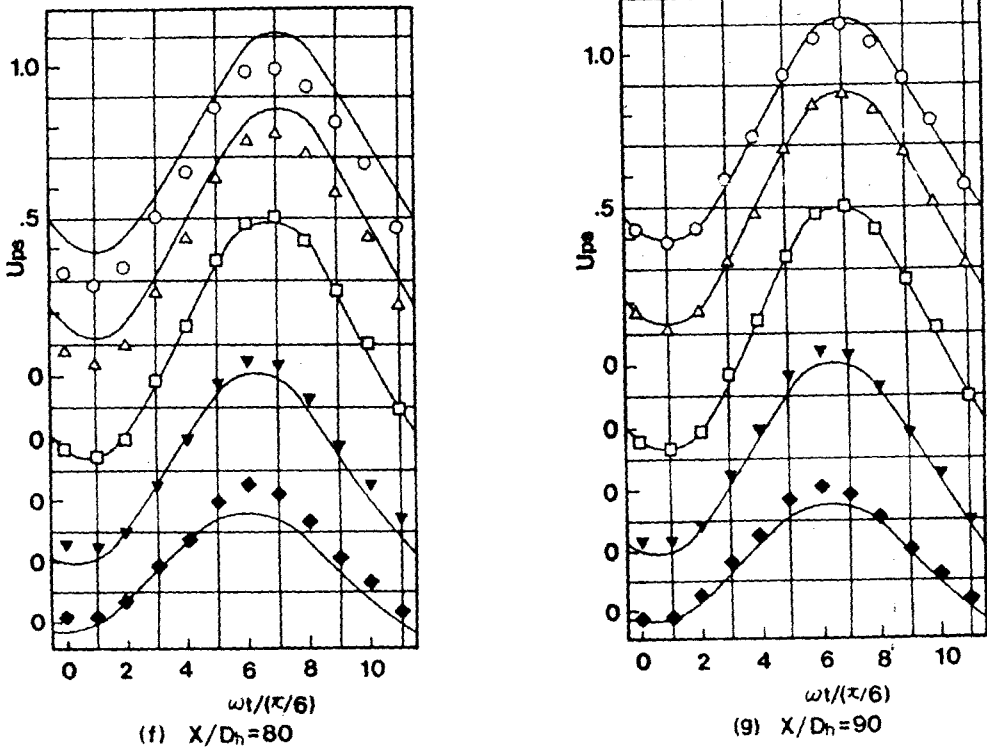


Fig. 7 Developing velocity profiles of laminar pulsating flow ($R_{e,ta}=1080$, $R_{e,os}=524$, $\omega^+=6.87$)

발달과정은 전자가 더 늦게 나타나고 있으므로 이 두 유동중에서 발달과정이 늦은 정상유동 속도성분의 입구길이를 층류맥동유동의 입구길이라고 결정하였다. Fig. 7(a)~(g)는 입구영역에서 층류맥동유동이 발달하는 과정을 보여주는 것으로서 속도분포의 변화과정을 보면 Fig. 7(a)~(e)에서는 속도분포의 크기가 증가하고 있다가 Fig. 7(f) 및 (g)에

서는 증가가 멈춰지고 일정하게 된다. 이때 속도분포가 일정하게 되는 무차원덕트 축방향위치 (x/D_h)가 80~90이므로 이론결과와 거의 일치하고 있다. Ohmi등이 무차원 각진동수 (ω^+)의 변화에 따라 달라지는 층류맥동유동에 대한 무차원덕트 축방향의 입구길이를 실험으로 규명한 결과를 Fig. 10에 나타내어 Fig. 8의 입구길이, $(x/D_h)/R_{e,ta}=0.081$ 과

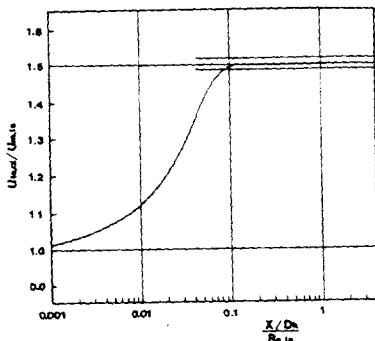


Fig. 8 Variation of steady velocity component for laminar pulsating flow ($R_{e,ta}=1080$, $\omega^+=6.87$)

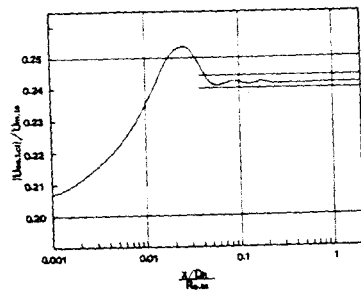


Fig. 9 Variation of oscillatory velocity component for laminar pulsating flow ($R_{e,ta}=1080$, $\omega^+=6.87$)

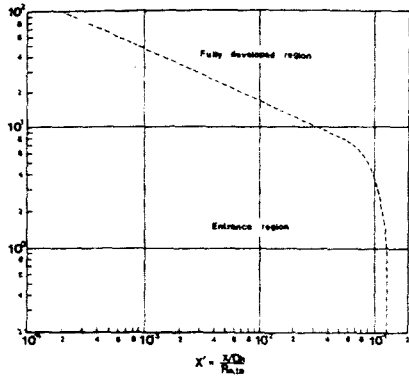


Fig. 10 Entrance length, x' vs. dimensionless frequency, ω^* of pulsating flow in square duct

비교하여보면 대체적으로 일치하고 있다.

충류맥동유동에 대한 이론 및 실험결과를 종합적으로 고찰하여 보면 정4각단면 덕트의 입구영역에서 충류맥동유동의 운동량방정식 중에서 비선형인 대류항을 선형화시켜서 이론적으로 얻은 속도분포식은 실험결과와 거의 일치하여 덕트의 입구영역에서 속도분포식의 정확성을 이론 및 실험적으로 비교 검토할 수 있었고, 충류맥동유동의 입구길이를 계산할 수 있었다.

5. 결 론

정4각단면 덕트내의 입구영역에서 충류맥동유동에 대하여 임계레이놀즈수, 속도분포와 입구길이 등의 유동특성에 대한 이론 및 실험적 고찰로부터 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 덕트의 입구길이는 덕트의 수력직경, 레이놀즈수와 무차원 각진동수 등의 변수들에 의하여 결정되고, 본 실험에서 얻은 충류맥동유동의 입구길이는 정상유동성분의 입구길이에 지배되는 $\frac{Le/D_h}{Re,ia} = 0.081$ 정도이다.

(2) 덕트 내의 충류맥동유동에서 천이맥동유동으로 변화되는 현상은, 수력직경, 단면평균속도, 무차원 각진동수와 유체의 동점성계수 등의 변수에 의하여 결정되고, 열선유속계의 열선센서의 신호에 의하여 얻어진 속도파형으로부터 결정된 맥동유동

의 임계레이놀즈수 ($Re_{ia,cr}$)는 $170\omega^*$ 이었다.

(3) 덕트내의 충류맥동유동에서 열선유속계의 열선신호로부터 얻어진 속도파형에 의하여 덕트 중심에서 덕트벽면부근으로 갈수록 벽면 경계층에서 마찰저항이 생겨 속도진폭이 적게됨을 알 수 있고 충류, 천이 및 난류 유동영역을 구분할 수 있다.

(4) 덕트내의 입구영역에 적용되는 충류맥동유동의 운동량방정식중에서 비선형인 대류항을 선형화시켜서 이론적으로 얻은 속도분포식은 실험적으로 측정된 속도분포와 비교적 잘 일치하여 덕트의 입구영역에 대한 발달과정 유동의 속도분포식의 정확성을 규명할 수 있었다.

참 고 문 헌

- (1) Streeter, V.L., 1961, "Handbook of Fluid Dynamics," McGraw Hill, New York, Section 5 & 20, pp.5.1~5.33 & 20.1~20.47.
- (2) Shah, R.K. and London, A.L., 1978, "Advances in Heat Transfer," Academic Press, London, Supplement 1, Chap.7, pp.196~222.
- (3) Fleming, D.P. and Sparrow, E.M., 1969, "Flow in the Hydrodynamic Entrance Region of Ducts of Arbitrary Cross Section," J.Heat Trans., Vol.91, pp. 345~354.
- (4) 박길문, 고영하, 1990, "정4각덕트의 입구영역에서 충류정상유동 특성에 관한 연구," 대한기계학회 논문집 제14권 제4호, pp.927~936.
- (5) 박길문, 유영태, 고영하, 1990, "4각덕트의 입구영역에서 천이정상유동의 입구길이에 관한 연구," 공기조화냉동공학회 논문집 제2권 제1호, pp.1~10.
- (6) 박길문, 박선종, 최주호, 유영태, 1989, "각4각단면 덕트내에서 비정상 천이유동에 관한 연구," 공기조화냉동공학회논문집 제1권 제3호, pp.252~263.
- (7) 박길문, 1987, "정4각단면 덕트입구영역에서의 충류비정상유동특성", 고려대학교, 박사학위논문.
- (8) 최주호, 1988, "정4각단면덕트 내에서 천이비정상 유동특성에 관한 연구", 조선대학교, 박사학위논문.
- (9) Ohmi, M., Iguchi, M. and Urahata, I., 1982, "Transition to Turbulence in a Pulsatile Pipe Flow," Part 1, "Wave Forms and Distribution of Pulsatile Velocities near Transition Region," Bull, JSME, Vol.25, No.200, pp.182~189.