

(論 文)

점소성모델을 이용한 이방성 재료의 비탄성 해석

신 찬 호*

(1991년 5월 30일 접수)

Inelastic Analysis of Anisotropic Materials Using the Viscoplastic Model

Chan Ho Shin

Key Words: Viscoplastic Model(점소성모델), Unified Constitutive Equation(통일구성방정식), Anisotropy(이방성), Mapped Stress Tensor(변환응력텐서), Tensorial Nonlinearity(텐서의 비선형), Plastic Incompressibility(소성비압축성)

Abstract

In this study the theory of viscoplasticity is utilised to provide a unified approach to problems of plasticity and creep. For the large deformation analysis the second Piola-Kirchhoff stresses and Lagrangian strains are used in the constitutive relations. The anisotropic behaviour is described by using the mapped stress tensor instead of the actual stress tensor in the isotropic concept. The tensorial nonlinearity is considered by introducing the third invariant of the deviatoric stresses under the assumption of the plastic incompressibility.

기 호 설 명

B : 변형률-변위 매트릭스
 D_{ijkl} : 탄성텐서
 \hat{D}_{ijkl} : 탄-점소성(elasto-viscoplastic) 텐서
 f : 항복함수(yield function)
 F : 소성 포텐셜(plastic potential)
 H_{ijkl} : 의점소성(pseudo-viscoplastic) 텐서
 K_T : 접선 강성매트릭스(tangential stiffness matrix)
 K_σ : 초기응력 강성매트릭스(initial stress stiffness matrix)
 \bar{R} : 등가절점력(equivalent nodal force)
 \tilde{T}_F : 일축 인장항복응력
 \tilde{T}_U : 제2종 Piola-Kirchhoff응력
 \tilde{T}_{ij}'' : 응력텐서의 비선형
 \tilde{T}_V : 등가응력(equivalent stress)
 β_{ijkl} : 이방성 재료텐서(anisotropic material tensor)

δ_{ij} : Kronecker delta
 λ_{ij} : Lagrange 변형률 변화율
 τ_{ij} : 변환응력텐서(mapped stress tensor)
 $\bar{\psi}$: 불평형력
 ω_{ij} : 직교이방성 재료텐서(orthotropic material tensor)
 $(\)^T$: $(\)$ 의 전치행렬(transposed matrix)

1. 서 론

고온에서 재료의 기계적 거동은 시간에 따라 점진적으로 변하는 비탄성변형인 크립(creep)현상을 나타내며 이것은 탄소성 거동에 비하여 무시할 수 없는 중요한 성질이다. 고온의 금속은 비탄성영역에서 소성과 크립의 복합된 현상을 나타내며 이러한 복합현상을 다루기 위하여 통일구성방정식(unified constitutive equation)인 점소성(viscoplastic) 모델을 도입하게 되었다. 여기서는 Perzyna⁽¹⁾의 점소성 모델을 수정하여 이방성 재료

* 정회원, (사) 한국선급 기술연구소

의 탄소성 및 크립 해석에 응용하였다. 점소성 모델은 최초로 Bingham⁽²⁾에 의하여 일축 전단상태에 대해서 주어졌으며 Hohenemser와 Prager⁽³⁾는 실험에서 구해진 응력-변형률 변화율(stress-strain rate)관계를 이용하여 점소성 구성방정식을 세웠다. 이를 근거로하여 Perzyna는 재료의 안정거동에 대한 Drucker의 조건⁽⁴⁾을 고려하여 일반화된 탄-점소성(generalized elasto-viscoplastic) 모델을 제시하였다.

Perzyna의 점소성 모델은 재료의 등방성을 전제로 하였으며 변형이 큰 비탄성 해석에서는 사용된 재료에 따라 부정확한 결과를 나타낼 수 있다. 때문에 본 연구에서는 재료의 이방성을 고려한 점소성 모델을 제시하였다. 공학적인 견지에서 볼 때 이방성 재료의 기계적 거동을 표현하기 위해서는 단순화 이론(simplified theory)의 개발이 필요하게 되었으며 이에 따라 Betten^(5,6)은 등방성 소성 포텐셜(isotropic plastic potential)에서 응력텐서를 재료의 이방성을 포함하는 변환 응력텐서(mapped stress tensor)로 대체함으로써 이방성을 고려하였다. 그러므로 실제 이방성 재료의 비탄성 거동은 가상의 등방성 상태로 치환되며 여기에 소성 포텐셜 이론을 적용하게 된다.

아울러 재료의 기계적 거동을 좀 더 정확히 표현하기 위하여 편차응력(deviatoric stress)의 3차 불변량(third invariant)을 도입함으로써 응력텐서의 비선형(tensorial nonlinearity) 효과를 고려하였다. 구조물의 기계적 거동을 해석하기 위하여 유한요소법을 사용하였으며 계산으로는 내압 실린더의 탄소성 해석과 고속 회전원판의 크립 해석을 수행하였다. 특히 터빈 날개(turbine blade) 설계시에 후자에서 구한 시간에 따른 횡단면형상의 변화는 중요한 자료로 사용 될 수 있다.

2. 유한요소해석

점소성 모델은 시간의 함수로 주어지므로 구성방정식에서 변형률 대신 변형률 변화율이 사용되며 시간 $t=t_n$ 에서 Lagrange 변형률 변화율($\dot{\lambda}_0^n$)은 탄성성분(${}^e\dot{\lambda}_0^n$)과 비탄성성분(${}^{vp}\dot{\lambda}_0^n$)으로 나타낼 수 있다^(1,7).

$$\dot{\lambda}_0^n = {}^e\dot{\lambda}_0^n + {}^{vp}\dot{\lambda}_0^n \quad (1)$$

시간 증분 $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ 에 대한 제2종 Piola-

Kirchhoff응력의 증분은 탄성텐서 D_{ijkl} 를 이용하여

$$\Delta \bar{T}_{ij}^n = D_{ijkl} \Delta {}^e\lambda_{kl}^n \quad (2)$$

로 나타낼 수 있으며, 점소성 변형률의 증분 $\Delta {}^{vp}\lambda_0^n$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다⁽⁷⁾.

$$\Delta {}^{vp}\lambda_0^n = \left[(1-\theta) {}^{vp}\dot{\lambda}_0^n + \theta {}^{vp}\dot{\lambda}_0^{n+1} \right] \Delta t_n \quad (3)$$

여기서 θ 는 시간적분을 수행하기 위한 파라미터이다.

점소성 변형률 변화율은 응력의 함수이므로 의점소성 텐서

$$H_{ijkl}^n \equiv \frac{\partial {}^{vp}\dot{\lambda}_0^n}{\partial \bar{T}_{kl}^n} \quad (4)$$

를 도입하면, 점소성 변형률증분은 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$\Delta {}^{vp}\lambda_0^n = \Delta t_n {}^{vp}\dot{\lambda}_0^n + C_{ijkl}^n \Delta \bar{T}_{kl}^n \quad (5)$$

$$C_{ijkl}^n \equiv \Delta t_n \theta H_{ijkl}^n \quad (6)$$

그러므로 응력의 증분은 식(2)와 (5)로부터 다음과 같이 산정할 수 있다.

$$\Delta \bar{T}_{ij}^n = \hat{D}_{ijkl}^n (\Delta \lambda_{kl}^n - \Delta t_n {}^{vp}\dot{\lambda}_{kl}^n) \quad (7)$$

$$\hat{D}_{ijkl}^n \equiv [D_{ijkl}^n + C_{ijkl}^n]^{-1} \quad (8)$$

여기서 (-1) 은 텐서의 역을 표시한다. 식 (7)을 매트릭스 형태로 표시하면

$$\Delta \bar{T}^n = \hat{D}^n (\Delta \bar{\lambda}^n - \Delta t_n {}^{vp}\dot{\bar{\lambda}}^n) \quad (9)$$

이며, 시간 $t=t_n$ 에서의 평형방정식은 다음과 같다.

$$\int_{V^0} (B^n)^T \bar{T}^n dV^0 - \bar{R}^n = \bar{0} \quad (10)$$

여기서 V^0 는 초기체적, \bar{R}^n 은 외력에 의한 등가 절점력이며, 변형률-변위 매트릭스 B^n 는 절점변위 \bar{u}^n 의 함수로서 다음 관계식을 만족한다.

$$\Delta \bar{\lambda}^n = B^n \Delta \bar{u}^n \quad (11)$$

식(9)와 (11)을 이용하여 평형방정식 (10)을 선형화하여 정리하면 다음과 같다.

$$K_T^n \Delta \bar{u}^n = \Delta \bar{V}^n \quad (12)$$

$$K_T^n \equiv \int_{V_0} (B^n)^T \hat{D}^n B^n dV_0 + K_\sigma^n \quad (13)$$

$$\Delta \bar{V}^n \equiv \Delta \bar{R}^n + \Delta t_n \int_{V_0} (B^n)^T \hat{D}^{npp} \bar{\lambda}^n dV_0 \quad (14)$$

윗식에서 K_T^n 는 점선 강성 매트릭스이고, K_σ^n 는 초기응력 강성 매트릭스이며, K_σ^n 는 기하학적 선형계산에서 생략되어진다. 식 (12)에서 계산된 절점변위의 증분을 이용하면 식(9)와 (11)로부터 응력의 증분 및 시간 $t = t_{n+1}$ 에서의 응력을 구할 수 있다.

$$\bar{T}^{n+1} = \bar{T}^n + \Delta \bar{T}^n \quad (15)$$

그러나 식(15)의 응력은 선형화된 평형방정식으로부터 계산되었으므로 원래의 평형방정식(10)을 정확하게 만족하지 못한다. 이러한 오차를 줄이기 위하여 불평형력

$$\bar{\psi}^{n+1} = \bar{R}^{n+1} - \int_{V_0} (B^{n+1})^T \bar{T}^{n+1} dV_0 \quad (16)$$

을 계산하여 시간 $t = t_{n+1}$ 의 절점력 증분에 더해준다.

3. 구성방정식

구성방정식은 연속체(continuum)에 작용하는 응력과 변형을 또는 변형을 변화율과의 관계를 나타내며 강체운동과는 무관하게 세워져야 된다(form-invariant).

재료의 기계적 거동이 탄성한계를 넘어가면 과응력(excess stress) 영역으로 들어가게 되며 여기서는 재료의 거동이 온도와 시간 또는 변형속도에 의하여 심한 영향을 받게된다. 이러한 과응력 영역에서 점소성 구성방정식을 세우게 되며 그 전제조건은 다음과 같다.

- 항복점에 도달할 때까지 재료의 거동은 탄성적이며 가역적이다.

- 항복점을 지나게 되면 재료의 거동은 시간에 관계되며 비가역적이다.

- 아주 작은 변형속도에서 재료는 탄소성 거동을 나타낸다.

- 점소성거동을 나타내기 위하여 소성 비압축성을 가정하지만 소성 압축성에 대한 고려도 가능하다.

재료의 탄-점소성 거동을 설명하기 위하여 본 연구에서는 수정된 Perzyna의 모델을 사용하였으며 식 전개에 복잡성을 피하기 위하여 시간을 표시하는 첨자 n 은 생략한다.

$$\dot{\lambda}_U = {}^e \dot{\lambda}_U + {}^{pp} \dot{\lambda}_U \quad (17a)$$

$$= \frac{1}{2G} \dot{T}_U + \frac{1-2\nu}{E} \frac{1}{3} \dot{T}_{kk} \delta_{ij} + \gamma \langle \phi(f) \rangle \frac{\partial \bar{T}_V}{\partial \bar{T}_U} \quad (17b)$$

여기서 f 는 항복함수이며,

$$f = \frac{\bar{T}_V(\bar{T}_U)}{\bar{T}_F} - 1 \quad (18)$$

G 는 전단 탄성계수, E 는 탄성계수, ν 는 Poisson 상수, γ 는 유동 파라미터(fluidity parameter), δ_{ij} 는 Kronecker delta, \bar{T}_V 는 등가응력(equivalent stress), \bar{T}_U 는 제2종 Piola-Kirchhoff응력의 편차, \bar{T}_F 는 일축 인장 항복응력이다.

식(17b)에서 $\langle \phi(f) \rangle$ 는 다음과 같이 정의되어진다.

$$f \leq 0 \text{ 이면, } \langle \phi(f) \rangle = 0 \quad (19a)$$

$$f > 0 \text{ 이면, } \langle \phi(f) \rangle = \phi(f) \quad (19b)$$

식의 간단화를 위하여 다음에서는 점소성 성분만 고려하며 괄호 $\langle \rangle$ 는 생략한다.

$${}^{pp} \dot{\lambda}_U = \gamma \phi(f) \frac{\partial \bar{T}_V}{\partial \bar{T}_U} \quad (20)$$

여기서 $\phi(f)$ 는 f 의 멱으로 표현한다.

$$\phi(f) \equiv f^m = \left(\frac{\bar{T}_V}{\bar{T}_F} - 1 \right)^m \quad (21)$$

등가응력 \bar{T}_V 는 비압축성 재료의 불변양 이론(invariant theory)에 의거 다음과 같이 편차응력의 2차 및 3차 불변양의 함수로 표현할 수 있다⁽⁷⁾.

$$\bar{T}_V = \bar{T}_V(J_2, J_3) \quad (22)$$

$$J_2 \equiv \frac{1}{2} \bar{T}'_U \bar{T}'_U \quad (23a)$$

$$J_3 \equiv \frac{1}{3} \bar{T}'_U \bar{T}'_U \bar{T}'_U \quad (23b)$$

따라서 점소성 구성방정식 (20)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$${}^{vp}\dot{\lambda}_v = \gamma \phi(f) \left(\frac{\partial \tilde{T}_v}{\partial J_2} \tilde{T}_v + \frac{\partial \tilde{T}_v}{\partial J_3} \tilde{T}_v^2 \right) \quad (24)$$

여기서 \tilde{T}_v^2 는 응력텐서의 비선형 항이며 편차응력의 자승에 대한 편차로서 표현된다⁽⁸⁾.

$$\tilde{T}_v^2 = \tilde{T}_{ik} \tilde{T}_{ij} - \frac{2}{3} J_2 \delta_{ij} \equiv (\tilde{T}_v^{(2)})' \quad (25)$$

식 (18)과 (20)으로부터 등가응력은 점소성 변형률 변화율의 2차 불변양

$$I_2 \equiv \frac{1}{2} {}^{vp}\dot{\lambda}_v {}^{vp}\dot{\lambda}_{ij} \quad (26)$$

을 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\tilde{T}_v = \tilde{T}_F \left[1 + \phi^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{I_2}}{\gamma} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{T}_v}{\partial \tilde{T}_v} \frac{\partial \tilde{T}_v}{\partial \tilde{T}_{ij}} \right)^{-1/2} \right\} \right] \quad (27)$$

여기서 ϕ^{-1} 은 ϕ 의 역함수를 나타낸다. 식 (27)은 재료의 동적 항복조건 (dynamic yield condition)을 나타내며, 일축 등가상태에서는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\tilde{T}_v = \tilde{T}_F \left[1 + \phi^{-1} \left(\frac{{}^{vp}\dot{\lambda}_v}{\gamma} \right) \right] \quad (28)$$

여기서 ${}^{vp}\dot{\lambda}_v$ 는 등가 점소성 변형률 변화율 (equivalent viscoplastic strain rate)이며, 점소성 거동을 하는 재료의 동적강도는 정적강도보다 높다는 것을 알 수 있다.

재료의 탄소성거동 ($\tilde{T}_v = \tilde{T}_F$)은 ${}^{vp}\dot{\lambda}_v \rightarrow 0$ 또는 $\gamma \rightarrow \infty$ 로부터 주어지므로 점소성 모델을 이용하여 탄소성 문제를 해석할 수 있다. 특히 높은 항복응력을 대입하면, 식 (17)에서 비탄성성분인 ${}^{vp}\dot{\lambda}_{ij} = 0_{ij}$ 이므로 재료의 탄성거동을 얻을 수 있다.

비탄성 영역에서 일정응력 (constant stress) 상태는 시간에 비례하는 변형률을 나타내기 때문에 이것을 이용하여 2차 크립 (secondary creep) 현상을 설명할 수 있다. 따라서 식 (20)과 (21)에서 항복응력이 0이되면 일반화된 크립 공식을 얻게된다.

$${}^{vp}\dot{\lambda}_{ij} = {}^c\dot{\lambda}_{ij} = K \tilde{T}_v^m \frac{\partial \tilde{T}_v}{\partial \tilde{T}_{ij}} \quad (29)$$

윗식은 일축 상태에서 Norton-Bailey⁽⁹⁾의 크립 공식을 나타낸다. 식 (29)는 2차 크립 거동의 표현에 사용되지만 일정한 하중에서의 크립 변화율 (creep rate)이 크립이 진행됨에 따라 감소한다는 시간 경

화설 (time hardening hypothesis)을 이용하면 1차 크립 (primary creep) 현상을 설명할 수 있다.

시간 경화설에 의하면 크립 변화율은 응력과 시간의 함수로 주어지며 변형률 경화설 (strain hardening hypothesis)을 이용하면 크립 변화율은 응력과 변형률의 함수로 주어지게 된다. 일반적으로 시간 경화설이 수학적으로 다루기 쉬우므로 1차 크립현상을 설명하기 위하여 식 (29)에 시간함수 $\varphi(t)$ 를 도입하면 다음과 같다.

$${}^c\dot{\lambda}_{ij} = K \tilde{T}_v^m \varphi(t) \frac{\partial \tilde{T}_v}{\partial \tilde{T}_{ij}} \quad (30)$$

4. 단순화 이론

본 연구에서는 비탄성 영역에서 이방성 재료의 거동을 설명하기 위하여 일반적인 텐서표현이론 (tensor representation theory) 대신에 단순화 이론을 사용하였으며 이에따라 재료의 이방성은 변환 응력텐서를 이용하여 표현할 수 있다. 즉 등방성 개념하의 응력텐서를 다음과 같은 변환 응력텐서 τ_{ij} 로 대체함으로써 재료의 이방성을 고려하였다^(5,6).

$$\tau_{ij} = \beta_{ijkl} \tilde{T}_{kl} \quad (31)$$

여기서 β_{ijkl} 은 재료의 이방성을 포함하는 재료 텐서이며 변환에 의하여 실제 이방성 재료의 점소성 거동은 가상의 등방성 상태로 치환된다. 응력텐서의 대칭성 ($\tilde{T}_{ij} = \tilde{T}_{ji}$)을 고려하면 54개의 이방성 파라미터 (anisotropic parameter)가 주어지게 되며 변환 응력텐서 (31)의 대칭성 ($\tau_{ij} = \tau_{ji}$)을 가정하면 이방성 파라미터의 수는 36개로 줄어든다. 이방성 재료의 거동을 표현하기 위하여 재료의 소성 비압축성을 가정하였으므로 식 (31)에서 변환 응력텐서는 다음과같이 나타낼 수 있다.

$$\tau_{ij} = \beta_{ijkl} \tilde{T}'_{kl} = \beta_{ij(kl)} \tilde{T}_{kl} \quad (32)$$

$$\beta_{ij(kl)} \equiv \beta_{ijkl} - \frac{1}{3} \beta_{ijpp} \delta_{kl} \quad (33)$$

따라서 등가 변환응력

$$\tau = \tau(J_2, J_3) \quad (34)$$

는 등방성 상태에서의와 같이 편차 변환 응력텐서

$$\tau'_{ij} = \beta_{(ij)pq} \tilde{T}'_{pq} \quad (35)$$

의 2차 및 3차 불변양으로 표현할 수 있다.

$$J'_2 \equiv \frac{1}{2} \tau'_{ij} \tau'_{ij} = \frac{1}{2} \beta_{(ij)pq} \beta_{(ij)rs} \tilde{T}'_{pq} \tilde{T}'_{rs} \quad (36a)$$

$$J'_3 \equiv \frac{1}{3} \tau'_{ij} \tau'_{jk} \tau'_{ki} \\ = \frac{1}{3} \beta_{(ij)pq} \beta_{(jk)rs} \beta_{(ki)tu} \tilde{T}'_{pq} \tilde{T}'_{rs} \tilde{T}'_{tu} \quad (36b)$$

그러므로 점소성 변형률 변화율은 식 (32)와 (34)를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$${}^{vp} \dot{\lambda}_v = \gamma \phi(f) \beta_{pq(ij)} \left(\frac{\partial \tau}{\partial J'_2} \tau'_{pq} + \frac{\partial \tau}{\partial J'_3} \tau'_{pq} \right) \quad (37)$$

여기서 텐서의 비선형 항은 등방성 상태에서의와 같이

$$\tau''_{ij} = \tau'_{ik} \tau'_{kj} - \frac{2}{3} J'_2 \delta_{ij} \equiv (\tau'_v)^{(2)} \quad (38)$$

이며, 과응력 함수 $\phi(f)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\phi(f) \equiv f^m = \left(\frac{\tau}{\tau_F} - 1 \right)^m \quad (39)$$

윗 식에서 τ_F 는 가상의 등방성 상태에서의 항복응력이며, 가상의 등방성 등가응력 τ 는 사용된 소성 포텐셜 $F(J'_2, J'_3)$ 에 대하여 최대 전단 변형률 에너지이론⁽⁸⁾을 사용하여 구할 수 있다.

$$\tau^2 = 3 \frac{J'_2 \frac{\partial F}{\partial J'_2} + \frac{3}{2} J'_3 \frac{\partial F}{\partial J'_3}}{\left(\frac{\partial F}{\partial J'_2} \right)_v + \frac{1}{3} \tau \left(\frac{\partial F}{\partial J'_3} \right)_v} \quad (40)$$

여기서 괄호 ()의 첨자 V 는 일축 가상의 등방성 등가상태 $(\tau_v)_v = \text{diag}\{\tau, 0, 0\}$ 를 나타낸다. 이방성 재료에 대한 의점소성 텐서 (4)는 식(37)과 (39)를 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$H_{ijkl} \equiv \frac{\partial^{vp} \dot{\lambda}_v}{\partial \tilde{T}'_{kl}} \\ = \gamma \phi(f) \beta_{pq(ij)} \beta_{rs(kl)} \left(c_1 \frac{\partial \tau'_{pq}}{\partial \tau_{rs}} + c_2 \frac{\partial \tau''_{pq}}{\partial \tau_{rs}} + \frac{\partial c_1}{\partial \tau_{rs}} \tau'_{pq} \right. \\ \left. + \frac{\partial c_2}{\partial \tau_{rs}} \tau''_{pq} \right) + H^* \beta_{pq(ij)} \beta_{rs(kl)} \\ \times (c_1^2 \tau'_{pq} \tau'_{rs} + c_1 c_2 \tau'_{pq} \tau''_{rs} + c_1 c_2 \tau''_{pq} \tau'_{rs} + c_2^2 \tau''_{pq} \tau''_{rs}) \quad (41)$$

여기서 c_1, c_2 및 H^* 는 다음과 같이 주어진다.

$$c_1 \equiv \frac{\partial \tau}{\partial J'_2}, \quad c_2 \equiv \frac{\partial \tau}{\partial J'_3} \quad (42a, b)$$

$$H^* \equiv \gamma m \frac{1}{\tau_F} \left(\frac{\tau}{\tau_F} - 1 \right)^{m-1} \quad (43)$$

본 연구에서는 Bauschinger 효과를 나타낼 수 있는 포텐셜

$$F = J_2'^{3/2} + a J_3' \quad (44)$$

를 이용하여 재료의 이방성과 아울러 텐서의 비선형 효과를 고려하였으며, 여기서 3차 불변양의 영향을 제어할 수 있는 파라미터 a 는 항복면(yield surface)의 볼록굴(convexity)을 만족하는 범위 내에서 결정된다⁽¹⁰⁾.

$$-\frac{\sqrt{27}}{4} \leq a \leq \frac{\sqrt{27}}{4} \quad (45)$$

일반적으로 파라미터 a 는 비틀시험에서 주어지는 전단 항복응력과 인장시험에서 주어지는 인장 항복응력의 비인 재료상수 ζ 로부터 구할 수 있다^(8,11).

$$a = \frac{\sqrt{27}}{2} (\sqrt{27} \zeta^3 - 1) \quad (46)$$

파라미터 $a=0$ ($\zeta=0.5774$)인 경우에는 2차 항복조건(quadratic yield condition)이 주어지며 등방성 상태에서는 Mises의 항복조건에 일치하게 된다.

재료가 직교 이방성(orthotropic)인 경우에는

$$\beta_{pq(ij)} = \frac{1}{2} (\omega_{pi} \omega_{qj} + \omega_{pj} \omega_{qi}) \quad (47)$$

로 나타낼 수 있으며⁽⁵⁾, 응력텐서 \tilde{T}'_v 와 변환텐서 τ'_v 는 동축이므로 텐서 ω_v 는 다음과 같이 대각선 형태(diagonal form)로 표현할 수 있다.

$$\omega_v = \text{diag}\{\omega_I, \omega_{II}, \omega_{III}\} \quad (48)$$

여기서 $\omega_I, \omega_{II}, \omega_{III}$ 는 각각 직교 이방성의 3개 주축에 대한 인장 항복응력 $\tilde{T}'_{FI}, \tilde{T}'_{FII}, \tilde{T}'_{FIII}$ 로 나타낼 수 있다.

$$\omega_I = \sqrt{\tau_F / \tilde{T}'_{FI}}, \\ \omega_{II} = \sqrt{\tau_F / \tilde{T}'_{FII}}, \\ \omega_{III} = \sqrt{\tau_F / \tilde{T}'_{FIII}} \quad (49)$$

기준축으로 II-축을 선택하면, II-축 방향의 변형률 변화율이 등가 변형률 변화율과 동일하다는 가정^(5,6)으로부터

$$\omega_1^2 + 4\omega_2^2 + \omega_3^2 = 6 \quad (50)$$

이며 I-III-평면에서의 횡등방성(transversely isotropic)인 경우에 직교 이방성 파라미터는 다음과 같다

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_2 = \omega_3 \\ \omega_1 &= \sqrt{(3-\omega^2)/2} \end{aligned} \quad (51a,b)$$

5. 계산예

내압 실린더의 탄소성 해석 및 고속 회전원판의 크립 해석을 위하여 사용된 전산기는 IBM 3090-600 S/VF이며, 축대칭 문제를 해석하기 위하여 원통좌표계 (r, z, θ) 를 사용하였다. 시간 직분을 수행하기 위해서는 정확도와 수치적 안정성(numerical stability)을 모두 만족할 수 있는 Crank-Nicolson 알고리즘을 사용하였다. 재료의 이방성을 고려하기 위하여 여기서는 축대칭에 수직 한 면에서의 횡등방성을 가정하였으며, 이것은 파라미터 ω (51a)에 의하여 표현된다.

5.1 내압 실린더의 탄소성 해석

등방성인 경우 응력텐서의 비선형 효과와 재료의 이방성이 구조물의 탄소성 거동에 미치는 영향을 조사하기 위하여 구리로 된 내압 실린더를 해석하여 Chu와 Vasilakis⁽¹²⁾의 실험 결과와 비교하였다. 여기서는 미소변형을 가정하였으며 실린더의 내경 $a=25.4\text{mm}$, 외경 $b=38.1\text{mm}$ 이고 재료의 특성은 다음과 같다.

탄성계수	$E=9.722 \times 10^4 \text{N/mm}^2$
소성점선계수	$T_p=2.8 \times 10^3 \text{N/mm}^2$
Poisson상수	$\nu=0.36$
항복응력	$\sigma_F=245 \text{N/mm}^2$

점소성 모델을 이용한 탄소성 해석을 위하여 유동 파라미터 $\gamma=0.001$, 과응력 함수에서 $m=1$ 로 가정하였으며 반복계산은 점소성 변형률 변화율이 0이 될 때까지 수행하였다. Fig. 1은 등방성인 경우 응력텐서의 비선형이 실린더 외벽($r=b$)의 변형률에 미치는 영향을 나타내고 있다. 여기서 Mises의 포텐셜($\zeta=0.5774$)은 실험치보다 작은 변형률을 나타내고 있으나 응력텐서의 비선형 효과를 고려하면 $\zeta=0.518$ 일때 계산결과가 실험치를 가장 잘 표

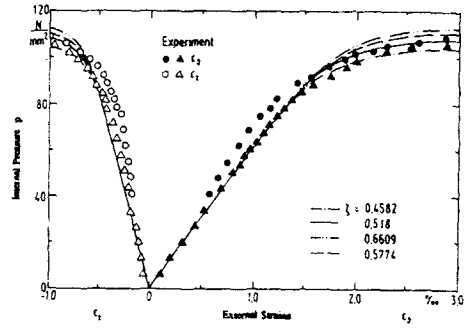


Fig. 1 Theoretical and experimental strain curves for a pressurized cylinder

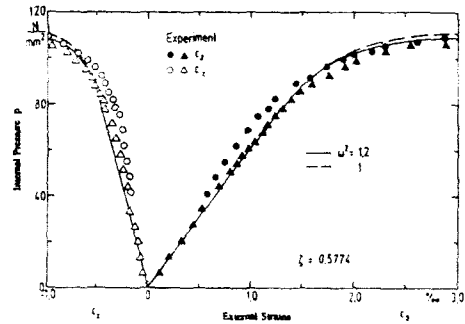


Fig. 2 Theoretical and experimental strain curves for a pressurized cylinder

현함을 알 수 있다. ζ 값이 주어지지 않은 경우에 실험결과는 재료의 이방성에 의하여 설명될 수 있다.

Fig. 2는 응력텐서의 비선형 효과가 포함되지 않은 경우($\zeta=0.5774$) 재료의 이방성($\omega^2=1.2$)을 고려한 계산결과가 실험치와 잘 일치함을 보여준다. 그러므로 재료의 거동이 응력텐서의 비선형 효과를 포함하는 등방성이나 또는 이방성이나 하는 문제는 여기서 주어진 실험결과만 가지고는 판단할 수 없으며 오로지 재료의 인장시험으로부터 결정할 수 있다.

5.2 고속 회전원판의 크립 해석

응력텐서의 비선형 효과와 재료의 이방성이 크립 거동에 미치는 영향을 조사하기 위하여 고속 회전 원판을 해석하여 Wahl등⁽¹³⁾의 실험결과와 비교하였다. Wahl이 Mises의 포텐셜을 이용하여 계산한 이론치는 실험치와 커다란 오차를 나타내었으나 이

오차는 등방성하에서 응력텐서의 비선형 효과 또는 재료의 이방성에 의하여 설명될 수 있다. 여기서 회전원판의 내경 $a=63.5\text{mm}$, 외경 $b=304.8\text{mm}$, 두께 $h=25.4\text{mm}$ 이고 회전수는 15000rpm 이며, 사용된 재료는 12% 크롬강으로서 그 특성은 다음과 같다.

탄성계수	$E=1.723 \times 10^5 \text{N/mm}^2$
Foisson상수	$\nu=0.3$
항복응력	$\sigma_F=255 \text{N/mm}^2$
크립 파라미터	$K=1.56 \times 10^{-17} h^{-0.5} (\text{N/mm}^2)^{-6}$
크립 지수	$m=6$
시간함수	$\varphi(t)=t^{-0.5}$
밀도	$\rho=7830 \text{kg/m}^3$

여기서는 기하학적 비선형을 가정하였으며 시간 $t=0$ 에서 탄소성 해석을 하고 계속하여 $t>0$ 때 크립 거동을 조사하였다. 아울러 크립 계산에서 초기 시간간격은 $\Delta t=10^{-10}h$ 로 하였다. Fig. 3은 등방성에서 응력텐서의 비선형이 원판 외면($r=b$)에서 반지름 방향의 변위에 미치는 영향을 보여주고 있다. Wahl의 실험결과는 응력텐서의 비선형 효과인 $\zeta=0.48$ 에 의해 가장 잘 표현되며 이 비선형 효과의 영향은 시간에 따라 점점 커진다. ζ 값이 주어지지 않은 경우 실험결과는 Fig. 4에서와 같이 재료의 이방성($\omega^2=1.3$)에 의하여 설명될 수 있다. Fig. 5는 응력텐서의 비선형($\zeta=0.48$)이 원판 횡단면의 변형에 미치는 영향을 보여주고 있다. Mises의 포텐셜을 이용했을때 횡단면은 사다리꼴 형상을 나타내며 원판 내면($r=a$)에서 가장 얇은 두께를 보여 주지만 응력텐서의 비선형 효과를 고려하면 내면부근에서 가장 변형이 심하여 $t=900h$ 일때는

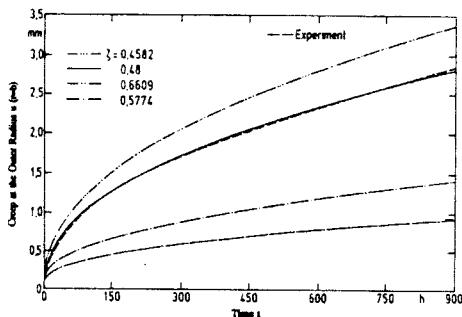


Fig. 3 Creep at the outer radius of rotating disk

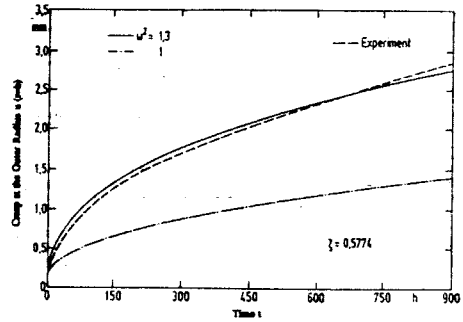


Fig. 4 Creep at the outer radius of rotating disk

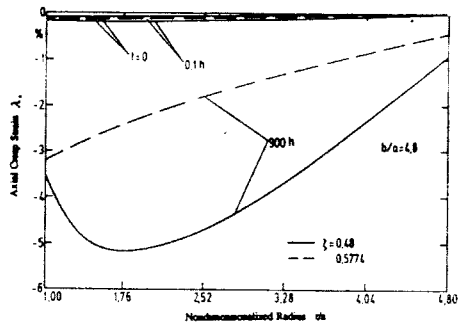


Fig. 5 Axial creep strains of rotating disk

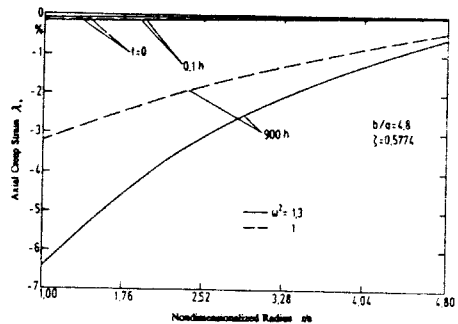


Fig. 6 Axial creep strains of rotating disk

$r/a=1.76$ 에서 가장 얇은 두께를 보여준다. 이러한 횡단면 형상은 Percy등⁽¹⁴⁾의 파괴강도 실험에서도 입증되어질 수 있다. 재료의 이방성($\omega^2=1.3$)이 횡단면의 변형에 미치는 영향은 Fig. 6에 나타나 있으며 이 영향은 시간에 따라 점점 커져 내면($r=a$)에서 가장 큰 변형을 보여준다.

6. 결 론

소성 및 크립 해석을 위하여 통일구성방정식인

점소성 모델을 이용하면 소성 과 크립 해석에 동일한 소성 포텐셜을 사용할 수 있으며, 두 개 별도의 방정식체계를 풀어야 하는 문제점을 없앨 수 있다. 따라서 구조물의 비탄성거동을 파악하기 위하여 점소성모델을 이용하는 것은 매우 경제적이고 유용한 방법으로 평가되어진다. 아울러 지금까지 대부분의 점소성모델은 소성비압축성을 가정하여 Mises의 소성포텐셜을 사용하였다. 그러나 본 연구에서는 소성포텐셜이론을 이용하여 가능한 모든 포텐셜을 적용할 수 있는 일반적인 점소성모델을 제시하였으며, 이에 따라 소성포텐셜에 편차응력의 3차 불변양을 도입하여 응력텐서의 비선형 효과를 고려하였다. 여기서 소성포텐셜에 응력텐서의 1차불변양(first invariant)을 도입하면 소성 압축효과 및 인장항복응력과 압축항복응력의 차이를 설명하는 S-D 효과(strength-differential effect)를 고려할 수 있다. 또한 이 점소성모델에서 유도된 크립 공식은 일반적으로 2차 크립 현상을 해석하는데 사용되지만 여기에 시간함수를 도입하면 1차 크립 해석에도 사용할 수 있음을 입증하였다. 이방성 재료에 대해서는 지금까지 주로 Hill의 항복조건을 사용하였지만 본 연구에서는 등방성 개념하의 응력텐서를 매핑(mapping)에 의하여 변환 응력텐서로 대체함으로써 실제 이방성 거동을 가상의 등방성 상태로 치환하여 재료의 이방성을 고려하는 단순화 이론을 채택하였다. 이 단순화 이론은 주로 크립 현상을 해석하는데 사용되어 왔지만 본 연구에서 처음으로 점소성모델에 도입하여 일반화 하였다.

참고문헌

- (1) Perzyna, P., 1966, "Fundamental Problems in Viscoplasticity," In *Advances in Appl. Mech.*, Academic Press, New York, pp.243~377.
- (2) Bingham, E.C., 1922, "Fluidity and Plasticity," McGraw-Hill, New York.
- (3) Hohenemser, K. and Prager, W., 1932, "Ueber die Ansatz der Mechanik isotroper Kontinua," *ZAMM*, Vol. 12, pp.216~226.
- (4) Drucker, D.C., 1959, "A Definition of Stable Inelastic Material," *J. Appl. Mech.*, Vol. 25, pp. 101~106.
- (5) Betten, J., 1982, "Theory of Invariants in Creep Mechanics of Anisotropic Materials," in : Boehler, J.P., *Mechanical Behaviour of Anisotropic Materials*, Martinus Hijhoff Publishers, the Hague/Boston/London, pp.65~80.
- (6) Betten, J., 1981, "Zur Aufstellung von Stoffgleichungen in der Kriechmechanik anisotroper Koerper," *Rheol. Acta*, V ol. 20, pp.527~535.
- (7) Kanchi, M.B., Zienkiewicz, O.C. and Owen, D. R.J., 1978, "The Visco-Plastic Approach to Problems of Plasticity and Creep Involving Geometric Nonlinear Effects," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 12, pp.169~181.
- (8) Betten, J., 1976, "Ein Beitrag zur Invariantentheorie in der Plastomechanik inkompressibler isotroper Werkstoffe," *Der Stahlbau*, Vol. 5, pp. 147~151.
- (9) Norton, F.H., 1929, "Creep of Steel at High Temperatures," McGraw-Hill, New York.
- (10) Betten, J., 1986, "Elastizitaets-und Plastizitaetslehre," Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden 1985, zweite Aufl.
- (11) Shin, C.H., 1990, "Inelastisches Verhalten anisotroper Werkstoffe," Dissertation, RWTH Aachen.
- (12) Chu, S.C. and Vasilakis, J.D., 1973, "Inelastic Behaviour of Thick-Walled Cylinders Subjected to Nonproportionate Loading," *Exp. Mech.*, Vol. 13, No. 3, pp.113~119.
- (13) Wahl, A.M., Sankey, G.O., Manjoine, M.J. and Shoemaker, E., 1954, "Creep Tests of Rotating Disks at Elevated Temperatures and Comparison with Theory," *J. Appl. Mech.*, Vol. 21, pp.225~235.
- (14) Percy, M.J., Ball, K. and Mellor, P.B., 1974, "An Experimental Study of the Burst Strength of Rotating Disks," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 16, pp.809~817.