

〈論 文〉

자기부상 시스템의 본드선도 모델링 및 LQG/LTR 제어기 설계

김종식* · 박전수**

(1991년 5월 15일 접수)

Bond Graph Modeling and LQG/LTR Controller Design of Magnetically Levitation Systems

Jong Shik Kim and Jeon Soo Park

Key Words : Magnetically Levitation(MAGLEV) System(자기부상 시스템), Attraction Suspension(흡인부상), Stagger Configuration Type(편심배치 방식), Bond Graph(본드선도), LQG/LTR Control System(LQG/LTR 제어시스템)

Abstract

A logical and systematic procedure to derive a mathematical model for magnetically levitation (MAGLEV) systems with a combined lift and guidance is developed by using bond graph modeling techniques. First, bond graph is constructed for the 1st-dimensional MAGLEV system in which three subsystems (energy feeding, track and vehicle) are considered. And, the 2nd-dimensional MAGLEV system in which lift and guidance dynamics are coupled is modeled by using the concept of multi-port field in bond graph languages. Finally, the LQG/LTR control system is designed for a multivariable MAGLEV system with stagger configuration type. In this paper, it has been shown that the bond graph is an excellent effective method for modeling multi-energy domain systems such as MAGLEV systems with uncertainties such as mass variations, track irregularities and wind gusts.

1. 서 론

자기부상 시스템(magnetically levitation system : MAGLEV)은 기존의 레일점착(wheel-on-rail) 방식이 갖는 추진 속도의 증가, 소음 저감 그리고 승차감 문제의 필연적인 한계를 극복할 수 있는 혁신적 대중교통 수단으로 제안되고 있다. 이는 부상력을 얻는 방법에 따라 반발부상(repulsive suspension 혹은 electric dynamic system(EDS))

방식과 흡인부상(attraction suspension 혹은 electric magnetic system(EMS)) 방식으로 구분된다. EDS 방식은 자석과 레일에 부착된 유도코일 사이의 상대속도에 따라 지지력을 얻게 되므로 넓은 공기진장(air gap) 속에서도 지지력이 완전히 수동적이어서 시스템의 안정성과 신뢰도가 대단히 높다. 하지만 초전도 기술의 확립이 아직까지 완전하지 못하여 레일의 전 구간에 걸쳐 강력한 초전도 자석을 배치하기 어렵고 차량의 정지나 저속 운행시는 지지력 부족을 보강하기 위한 별도의 보조지지 장치가 요구되어 차량의 중량과 설계 및 유지비용이 증가하는 단점이 있다. 한편, EMS 방식은 구조가

* 정회원, 부산대학교 기계설계학과, 기계기술연구소

** 정회원, 부산대학교 대학원

보다 단순하고 단거리 운송수단에 적합한 중·저속용 모델로서 자기기술 및 전력전자학의 급속한 발전에 부응하여 현재 실용화를 이루고 있다. 이 방식에 의하면 자석과 철 레일 사이를 통과하는 자속 밀도의 강약에 따라 흡인력이 결정되기 때문에 시스템을 지지하는데 필요한 부상력이 공진장의 변화에 매우 민감하여 본질적으로 불안정한 시스템이 된다. 따라서 흡인방식 자기부상 시스템을 설계하기 위해서는 과도적인 오력이나 레일의 불균일성에도 공진장의 안정도가 유지될 수 있는 강력한 제어기의 설계가 요구된다. 특히, 부상과 안내를 겸용하는 편심배치방식 자기부상 시스템의 경우에는 부상력과 안내력이 편심량 및 공진장에 대하여 서로 강한 연성효과(coupling effect)를 가지고 있기 때문에 모델식을 구축하는데 많은 어려움이 있다.

본 연구에서는 전기/자기 및 기계적 요소들이 복합되어 이루어진 자기부상 시스템의 실현을 위한 기초단계로서 제어동역학(controlled dynamics) 측면에 입각한 모델식을 본드선도 기법^(1,2)을 이용하여 보다 조직적으로 유도한다. 우선, 자속흐름 확장 및 자속 유출량을 고려하여 부상 시스템을 모델링하고 차량/레일 및 2차 현가(secondary suspension)장치를 포함한 자기부상 시스템을 모델링한다. 다음, 지지 및 안내 방향의 동역학을 동시에 고려한 2차원 자기부상 시스템을 본드선도의 다접점 필드(multiport field) 개념⁽³⁾을 이용하여 모델링한다. 끝으로, 본드선도 기법으로 모델링된 2차원 자기부상 시스템의 안정도와 성능을 향상시키기 위하여 LOG/LTR(linear quadratic Gaussian control with loop transfer recovery) 제어시스템을 설계한다. LQG/LTR 제어방법은 Doyle과 Stein⁽⁴⁾에 의해 제안된 방법으로서 모델링 오차에 대한 안정도-강인성(stability-robustness) 문제와 주파수역 성능을 설계시에 직접 고려할 수 있는 강력한 선형 다변수 제어시스템 설계방법으로 현재 널리 사용되고 있다.

2. 본드선도의 개념

본드선도 기법은 1959년 Paynter⁽¹⁾에 의해 처음 제시된 이후 Karnopp⁽²⁾와 Rosenberg⁽⁵⁾등에 의하여 여러가지 실제 시스템에 꾸준히 확대 적용되어 가고 있는 추세이다. 이 모델링 방법은 물리적 등가 개념을 이용하여 기계, 전기/자기, 유체/유압,

열 시스템 혹은 이들이 조합된 복잡한 다 에너지역 시스템(multi-energy domain system)이 이루고 있는 각각의 부분시스템(subsystems) 혹은 각 부분 시스템을 이루고 있는 기본요소들 간의 에너지 교환을 본드(bond)를 사용하여 도식화 시킨 것으로 시스템의 동력전달(power flow)을 직관적으로 파악할 수 있고 동적방정식을 제어시스템 설계를 위한 모델로 직접 일관성있게 유도할 수 있는 장점이 있다.

2.1 본드선도의 기본요소 및 확장요소

본드선도 모델링 방법은 물리적 등가 개념에 충실하기 때문에 특히 다 에너지역 시스템을 모델링하는데 유리하다. 이는 전체 시스템을 구성하는 각 부분시스템의 종류에 따라 동적 시스템의 작력변수와 흐름변수에 대한 명칭은 일반적으로 다르지만 시스템 종류에 관계없이 적용할 수 있는 일반적인 물리법칙이 존재함을 의미한다. 다시말하면, 일률변수로서 작력(effort : e)과 흐름(flow : f) 그리고 에너지변수로서 운동량(momentum : p)과 변위(displacement : q)를 4개의 일반변수로 취급하게 되면 거의 모든 물리시스템에 대하여 상태변수 선정을 쉽게할 수 있게된다. 따라서 일률변환의 관점에서 각각의 부분시스템을 에너지 발생, 저장, 발산 및 변환요소로 모델링하게 되면 일반적인 에너지 보존법칙을 만족하는 접합 요소를 이용하여 다 에너지역 시스템을 조직적으로 모델링할 수 있다.

한편 확장된 본드선도 모델링 방법은 다접점 필드(multiport field) 개념을 이용하여 복잡한 에너지 구조를 갖는 혼합 시스템이나 유연물체(flexible body) 등에 적용되는 일반적인 모델링 방법이다. 시스템의 에너지 저장요소, 발산요소 및 변환요소에 2개 이상의 입출력을 갖는 다접점 필드는 복잡한 기계역학적 모델이 구성하는 여러 개의 단일 요소를 함축한 형태로서, 집중하중과 토크를 동시에 받는 구조물이나 에너지 변환이 발생하는 부분시스템들의 연결부 등에 흔히 나타난다. 실제 다접점 필드는 각 요소에 있어서 입력 벡터와 출력 벡터의 관계를 결정하는 변환행렬에 관한 문제로서 스칼라에 관한 요소 방정식들을 모두 파악할 수 있다면 확장된 본드선도를 쉽게 구축할 수 있을 뿐만 아니라 구축된 본드선도에서 변환행렬에 관한 비선형성을 조사하여 시스템 특성을 명확하게 파악할 수도 있다.

그리고 다점점 필드가 에너지 저장요소(C-필드 및 I-필드)일 경우에는 각 정적 함수들에 대한 적분가능조건(integrability conditions)을 반드시 만족해야 하는 데 이는 다음과 같은 에너지에 관한 Castigliano 이론 및 Maxwell의 상반정리(reciprocal theory)가 다점점 필드를 구성하는 각각의 입출력단에 부여받은 미지의 일률변수들의 관계를 규명하는데 적절하게 이용될 수 있음을 의미한다.

$$\frac{\partial E}{\partial q_i} = e_i(q), \quad \frac{\partial E}{\partial p_i} = f_i(p), \quad i=1, 2, \dots, n \quad (1)$$

$$\frac{\partial e_i}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 E}{\partial q_j \partial q_i} = \frac{\partial e_j}{\partial q_i}$$

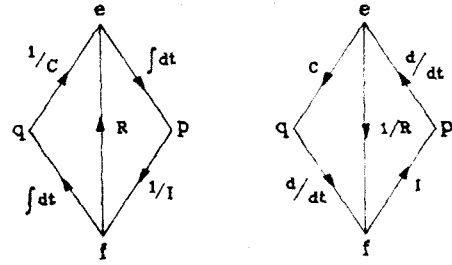
$$\frac{\partial f_i}{\partial p_j} = \frac{\partial^2 E}{\partial p_j \partial p_i} = \frac{\partial f_j}{\partial p_i}, \quad i, j=1, 2, \dots, n \quad (2)$$

여기서 E는 C-필드 및 I-필드에 저장되는 에너지를 나타낸다.

2.2 본드선도의 일률흐름 표시 및 인과관계 할당

이제 본드선도에서 접합구조의 역학적 의미와 밀접한 관계를 갖는 일률흐름 표시 및 인과관계 할당에 대하여 설명한다. 원래 본드선도는 전기 회로망의 모델링에 사용되는 선형선도(linear graph)와 유사점을 갖고 있어 본드선도를 선형선도로 또는 그 역으로의 변환이 가능하다⁽⁶⁾. 따라서 전기회로망에 적용되는 Kirchhoff의 전압법칙 및 전류법칙을 물리적 등가개념으로 일반화할 수 있다. 그러므로 일률흐름 표시를 반쪽 화살표로서 나타낼 때, 각 입출력단에 부가되는 일률변수들의 관계가 접합요소에서 작력 혹은 흐름에 대한 구속조건식으로 표현되기 때문에 시스템 모델링 단계에서 요구되는 작용하는 힘과 평형조건에 관한 관계 및 변형과 기하학적 적합조건에 관한 관계가 일의적으로 결정된다.

또한 본드선도에서는 각 시스템 요소에 대한 입출력을 나타내기 위하여 인과관계(causality)를 할당한다. 인과관계 할당은 에너지 저장요소의 입력 에너지 변수가 시스템의 상태변수로서의 선택 가능성을 제시해 주기 때문에 본드선도 모델링 과정에서 대단히 중요하다. 만약에 두개의 부분시스템들 간의 상호관계를 표시하기 위하여 인과를 할당한다면 각 입출력에 나타나는 작력신호의 방향에 따라 일



(a) integral type (b) derivative type

Fig. 1 Relation of generalized variables and constitutive relations

의적으로 인과를 부여할 수 있다. 그러나 부분시스템을 구성하는 각각의 요소에 대해 인과를 할당하게 될 때는 에너지 저장요소의 입력을 어떤 에너지 변수로 선정하는냐에 따라서 의미가 달라진다. 즉, 에너지 저장요소의 입력이 상태변수가 되기 위해서는 내부 루프를 통과할 때 적당한 해를 가져야 하며 또한 그것은 논리적으로 일관성이 있어야 함을 의미한다. 따라서 인과관계 할당은 적분형 또는 미분형으로 구분하여 각각의 의미를 부여한다. Fig. 1에서 (a)와 같은 적분형이 될 때는 에너지 저장요소의 입력(커패시턴스에서 흐름, 인덕턴스에서 작력)이 내부 루프속의 적분기를 통과함으로써 내부 루프의 출력(커패시턴스에서 변위, 인덕턴스에서 운동량)이 시스템의 출력(커패시턴스에서 작력, 인덕턴스에서 흐름)과 적절한 요소방정식의 관계를 갖기 때문에 각 에너지변수들이 시스템의 상태변수가 될 수 있다. 반면에 (b)와 같이 미분형 인과관계가 할당될 때는 각 에너지 변수들의 적분형태가 시스템의 출력(커패시턴스에서 흐름, 인덕턴스에서 작력)과 관계를 갖게 되어 일반적으로 적분방정식을 얻게 된다. 이것은 묵시적형태의 미분방정식으로 모든 에너지 저장요소에 미분형 인과관계가 일률적으로 할당되지 않을 때에는 선택된 상태변수가 독립변수가 되지않고 다른 접합요소들에 대한 대수적 관계로 결정됨을 의미한다.

한편 다양한 에너지 영역을 갖는 복잡한 시스템이나 에너지 저장요소가 2개 이상의 입출력이 있어서 쉽게 시스템 방정식을 유도할 수 없는 경우에는 간접적인 인과관계 할당을 사용함으로써 복잡성을 단순화할 수 있는데 이를 Lagrangian 인과관계 할당이라 한다⁽⁷⁾. 특히, 이것은 시스템의 본드구조가 루프를 형성하든지 또는 비선형 구속조건을 포함하

고 있을 때는 매우 효과적으로 시스템 방정식을 얻을 수 있는 장점이 있다. 식(3)은 Lagrangian 인과관계 할당시 사용되는 일반적인 Lagrangian 방정식을 나타낸다.

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \varepsilon_i, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (3)$$

여기서 q_i 는 일반 좌표(generalized coordinates)로서 본드선도의 모든 공통흐름집합에 부여된 변위 변수를 의미하고 ε_i 는 보존되지 않는 에너지에 대한 일반력(generalized forces) 그리고 Lagrangian L 은 시스템의 모든 공액 운동에너지(kinetic co-energy) T^* 에서 시스템의 모든 위치에너지(potential energy: V)를 뺀 에너지 즉, $T^* - V$ 를 나타낸다. 따라서 Lagrangian 인과관계가 할당된 본드선도의 시스템 방정식은 커패시턴스에 저장되는 위치에너지 $V(q)$ 와 인덕턴스에 저장되는 운동에너지 $T(p)$ 에서 변환된 $T^*(f)$ 를 식(3)에 적용하여 구하게 된다.

3. 자기부상 시스템의 본드선도 모델링

3.1 1차원 자기부상 시스템의 본드선도 모델링

Fig. 2는 1차원 자기부상 시스템에 대한 이상화 모델이다. 이를 편의상 3개의 에너지 점점구조(에너지 공급시스템, 트랙 시스템 및 차량 시스템)를 갖는 시스템으로 생각하기로 한다.

(1) 에너지 공급 시스템(energy feeding system) 모델링

Fig. 3(a)는 에너지 공급 시스템에 대한 개략도이고, Fig. 3(b)는 구동 전자석의 기하학적 형상을 나타내는 그림이다. 여기서 s , l_2 는 각각 자속흐름이 발생하는 공진장과 트랙의 길이를 나타낸다.

에너지 공급 시스템의 동적 방정식을 유도하기 위하여 자기 플럭스는 자석의 극단과 레일 사이에 수직으로 흐르고, 차량의 전방 속도에 의하여 트랙에 유기되는 와류전류(eddy current)를 무시하며 자석 특성상 발생할 수 있는 포화 효과를 무시하고 선형 구간에서만 고려하기로 한다. 이때 전기장과 기계장을 연결 시켜 주는 자기장에 대한 본드선도는 Fig. 4와 같다.

Fig. 4는 입력전류 $i(t)$ 에 의하여 출력단에 자기

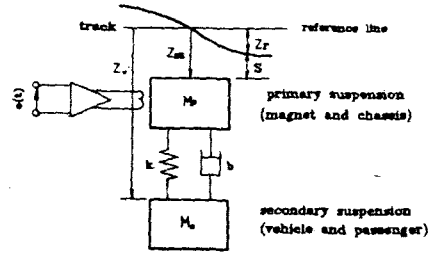


Fig. 2 Schematic diagram of the MAGLEV system

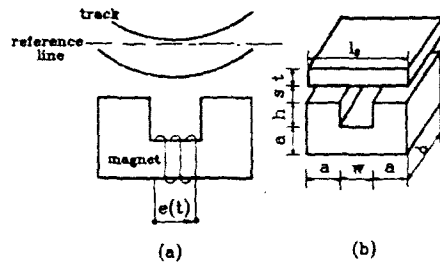


Fig. 3 Energy feeding system and the geometry shape of driving magnet

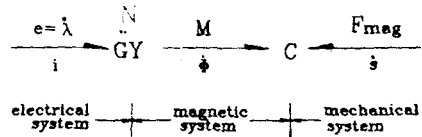


Fig. 4 Basic bond graph of the magnet transducer interacting with electrical and mechanical systems

력 M 을 발생시키고 발생된 자기장속에서 공진장을 통과하는 자속 ϕ 에 의하여 다시 입력단에 상응하는 출력전압 $e(t)$ 를 부가하는 본드선도로서 자이레이터 계수인 코일의 감은 수 N 이 그들의 관계를 규정짓고 있다. 또한 공진장과 자석 그리고 레일을 통과할 때 축적되는 에너지 저장 만큼의 자기력 감소를 나타내기 위하여 커패시턴스와 등가인 에너지 저장요소가 첨가되어 다음의 관계식을 갖는다.

$$M = R_{eq} \cdot \phi \quad (4)$$

여기서 R_{eq} 는 공진장과 자석 그리고 트랙에 관한 리럭턴스(reluctance)인 R_{gap} , R_{mag} 그리고 R_{track} 의 합으로서 전자석의 특성계수이며 기계시스템의

스프링과 같은 효과를 갖는다. 즉,

$$R_{eq} = 2 \cdot R_{gap} + R_{mag} + R_{track} \\ = \frac{1}{\mu_0 A} [2s + l_1/\mu_1 + l_2/\mu_2] \quad (5)$$

여기서 μ_0 , μ_1 , μ_2 는 각각 공기투과율, 트랙투과율 그리고 자석투과율을 나타낸다. 그리고 A 는 공진장에서 자속흐름에 수직인 자석의 단면적($A=ab$)이고 l_1 는 자속흐름이 발생하는 자석의 전체길이($l_1=2(a+b)+w$)이다. 따라서 트랙과 자석 사이의 실질 변위인 공진장 s 가 기계장에서 첨가되는 또 하나의 입력이 되므로 자기 변환기를 중심으로 전기장에 에너지 발산요소로 전기저항 R 을, 기계장에 질량 M_p 의 에너지 저장요소로 이너턴스 I 를 첨가하고 앞에서 설명한 Lagrangian 인과관계를 할당하면 Fig. 5와 같은 에너지 공급 시스템의 본드선도를 얻을 수 있다. Fig. 5에서 z_r 는 트랙과의 상호작용으로 인한 처짐량이고 $f_{dz}(t)$ 는 시스템 외부에서 발생할 수 있는 중력을 제외한 모든 외력이다.

이제 식(3)의 Lagrangian 방정식을 이용한 간접적인 방법으로 다음 절차를 수행하여 에너지 공급 시스템에 대한 동적 방정식을 조직적으로 유도하기로 한다.

(단계 1) 모든 공통흐름접합에 인위적인 흐름소스(artificially source flow : ASF)를 부가하고 적당한 인과관계를 할당한다.

(단계 2) $-GY-C-$ 및 $-I-$ 의 일반화된 이너턴스에 대한 운동에너지를 계산한다.

$$E(\lambda_s, s) = \frac{\lambda_s^2}{2} \left[\frac{2s + l_1/\mu_1 + l_2/\mu_2}{\mu_0 AN^2} \right] \quad (6)$$

$$E(p_0) = \frac{p_0^2}{2M_p} \quad (7)$$

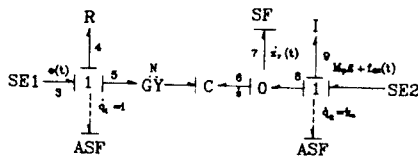


Fig. 5 Bond graph of the energy feeding system with Lagrangian causality

단계 3) (단계 2)에서 얻어진 운동에너지에 대한 에너지 변환을 수행한다.

$$T^*(i_s, s) = \frac{1}{2} \left[\frac{\mu_0 AN^2}{2s + l_1/\mu_1 + l_2/\mu_2} \right] \cdot i_s^2 \quad (8)$$

$$T^*(f_0) = \frac{1}{2} M_p f_0^2 \quad (9)$$

(단계 4) 일반화된 커패시턴스에서의 위치에너지를 계산한다.

$$V(q) = 0 \quad (10)$$

(단계 5) 시스템의 모든 에너지 소스와 발산요소에서 일반력 \mathcal{E}_i 를 계산한다.

$$\mathcal{E}_1 = e_3 - e_4 = e(t) - R \cdot i_s \quad (11)$$

$$\mathcal{E}_2 = e_{10} = M_p \cdot g + f_{dz}(t) \quad (12)$$

(단계 6) Lagrangian 방정식(3)을 적용한다.

따라서 1차원 자기부상 시스템에 대한 에너지 공급 시스템의 동적방정식은 다음과 같이 유도된다.

$$\frac{\mu_0 AN^2 \dot{i}_s}{(2s + l_1/\mu_1 + l_2/\mu_2)} - \frac{\mu_0 AN^2 \dot{s} \cdot i_s}{(2s + l_1/\mu_1 + l_2/\mu_2)^2} \\ = e(t) - R \cdot i_s \quad (13a)$$

$$M_p \ddot{z}_m + F_{mag} = M_p g + f_{dz}(t) \quad (13b)$$

여기서 자기변환기의 입력전류 $i_s(t)$ 에 대한 자기부상력 F_{mag} 는 다음과 같다.

$$F_{mag} = \frac{\mu_0 AN^2 i_s^2}{(2s + l_1/\mu_1 + l_2/\mu_2)^2}$$

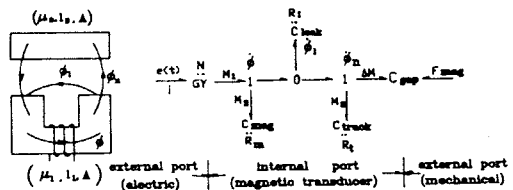


Fig. 6 Flux leakage model and its bond graph

$$= \frac{1}{\mu_0 A} \left[\frac{N \cdot i_b}{R_{eq}} \right]^2 \quad (14)$$

만약, 자석과 트랙 사이의 자속흐름유출(flux leakage)을 고려하고자 할 경우에는 앞에서 그려진 본드선도에 유출량을 공통흐름점합으로 연결함으로써 쉽게 확장할 수 있다. 이와같이 본드선도는 에너지 증감이 발생하는 위치에 적절한 점합요소를 추가함으로써 확장된 모델식을 쉽게 얻을 수 있는 장점을 갖고 있다. Fig. 6은 유출량을 고려한 경우에 대한 에너지 공급 시스템의 개략적인 모델과 본드선도이다. Fig. 6에서 ϕ 는 total flux, ϕ_n 는 net flux 그리고 ϕ_l 는 leakage flux이다.

여기서 실제 자속이 유출하는 형태를 자석의 한쪽 극에서 다른 극으로의 직접적인 유출과 맨 끝단에서 발생하는 와류유출로 고려하면 유출 발생이 고려된 리액턴스 R_l 을 다음과 같이 구할 수 있다⁽⁸⁾.

$$R_l = (\text{직접 유출 리액턴스}) + (\text{와류 유출 리액턴스}) \\ = \frac{1}{\mu_0 A} \left[w + \frac{2b}{a}(a+w) \right] \quad (15)$$

따라서 자기장의 공급 자기력 M_1 과 자기변환기의 출력자속 ϕ_n 의 관계를 정리하여 전체 리액턴스 R_{tot} 을 구하여 $M_1 = R_{tot} \cdot \phi_n$ 을 정립시켜 주게 되면 플럭스 유출을 고려하지 않은 식(14)의 R_{eq} 대신 R_{tot} 로 대체함으로써 유출이 고려된 에너지 공급 시스템의 동적방정식을 유도할 수 있다. Fig. 6의 점합방정식에 대한 전체 리액턴스 R_{tot} 과 그때의 자기 부상력 F_{mag} 는 각각 다음과 같다.

$$R_{tot} = [1 + R_m/R_l] R_g(s) + R_m + R_t + R_m R_t / R_l \quad (16)$$

$$F_{mag} = \frac{1}{\mu_0 A} \left[\frac{N \cdot i}{R_{tot}} \right]^2 \quad (17)$$

(2) 트랙 시스템 모델링

본드선도 모델링 방법은 집중 파라미터 시스템(lumped parameter system)뿐만 아니라 Fig. 7(a)와 같은 분포 파라미터 시스템(distributed parameter system)에도 이용할 수 있다⁽⁹⁾. Fig. 7(a)에서 v 는 차량의 전방 속도(forward velocity) 그리

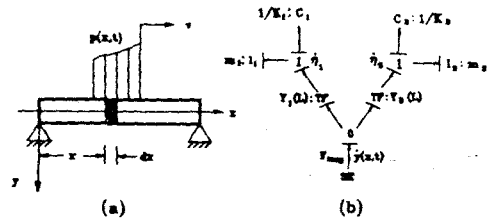


Fig. 7 Track system model and its bond graph

고 $p(x, t)$ 는 단위길이당 하중을 의미한다.

우선, 일반적인 보(beam)의 해석에서 유용하게 적용되는 Bernoulli-Euler 식의 일반해 $y(x, t)$ 와 n 번째의 일반좌표 η_n 에 대한 비연성 모드 방정식(decoupled modal equation)을 표현하면 각각 다음과 같다⁽¹⁰⁾.

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) \eta_n(t) \quad (18)$$

$$m_n \ddot{\eta}_n(t) + m_n \omega_n^2 \eta_n(t) = F_n(t) \quad (19)$$

여기서 $Y_n(x)$, m_n 그리고 $F_n(t)$ 는 모드형태함수(modal shape function), 모드질량(modal mass) 그리고 모드력(modal force)을 나타내며 각각 다음과 같다.

$$Y_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (20)$$

$$m_n = m \int_0^L Y_n^2(x) dx \quad (21)$$

$$F_n(t) = \sum_{i=1}^n p_i(x, t) Y_i(x) \quad (22)$$

여기서 L 과 m 은 각각 보의 길이와 질량을 의미한다.

식(19)는 시스템 외력 $p_i(x, t)$ 가 작용하여 모드 형태함수 $Y_i(x)$ 가 곱해진 모드력 F_i 가 분포 파라미터 시스템의 입력이 되고 이 입력에 의하여 모드 질량 m_n 에 운동에너지를 그리고 모드 강성 K_n 에 $m_n \omega_n^2$ 만큼의 위치에너지를 저장하는 보존 시스템의 일반적인 방정식 형태이다. 그러므로 $p_i(x, t)$ 가 자기 부상력 F_{mag} 와 같아지게 공통작용점합으로 연결하고 모드형태함수를 계수로 하는 트랜스포머를 이용하여 모드력 $F_i(t)$ 가 분포 파라미터 시스템의 입력이 되도록 본드선도를 구성하면 Fig.

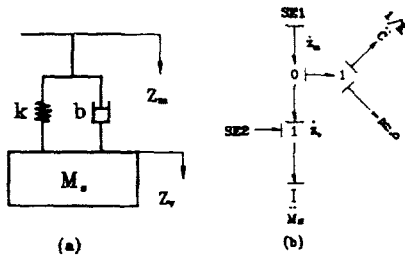


Fig. 8 Vehicle system model and its bond graph

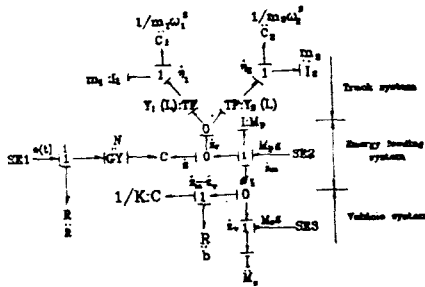


Fig. 9 Overall bond graph of the 1st dimensional MAGLEV system

7(b)와 같은 운동 모드수가 2개(η_1, η_2)만 고려된 트랙 시스템에 대한 본드선도를 얻을 수 있다.

(3) 차량 시스템 모델링

Fig. 8(a)는 차량 시스템에 대한 개략도이다. 차량 시스템을 모델링하기 위해서는 부상력과 전자석 중력과의 차이인 $F_{mag} - M_{pg}$ 그리고 차량 중력 M_{sg} 가 시스템 입력으로 주어질 때 일반화표 z_m 와 z_v 에 대한 운동방정식이 유도되어야 한다. 따라서 차량 시스템에 대한 본드선도를 구축하기 위하여 \dot{z}_m 와 \dot{z}_v 에 공통흐름접합을 부여하고, $\dot{z}_m - \dot{z}_v$ 가 스프링 및 감쇠기의 입력이 되게 공통작용접합으로 연결함으로써 Fig. 8(b)와 같은 본드선도를 얻을 수 있다.

(4) 1차원 자기부상 시스템에 대한 본드선도

이제 에너지 공급 시스템, 트랙 시스템 그리고 차량 시스템을 공통 흐름변수인 \dot{z}_r 와 \dot{z}_m 를 상호 결합점으로 하여 확장시킴으로써 전체 1차원 자기 부상 시스템에 대한 본드선도를 구축한다. Fig. 9는 전체 1차원 자기부상 시스템에 대한 본드선도로서 모든 에너지 저장요소들은 각각 독립된 적분형 인과관계가 할당되므로 이 시스템은 9개의 상태변수가 선정되어야 한다.

3.2. 2차원 자기부상 시스템의 본드선도 모델링

자기부상 시스템은 레일 표면위를 부상한 상태에서 주행하기 때문에 주행시의 공기 저항, 트랙의 불균일 등으로 인하여 발생하는 앞뒤방향의 흔들림, 좌우방향의 병진운동 그리고 한쪽으로의 쓸림 운동에 대하여 지지 및 안내를 위한 제어장치가 요구된다. 본 연구에서는 차량을 경량화하고 궤도 구조도 비교적 단순하게 하기 위하여 지지 자석과 안내 자석을 겸용하는 편심배치방식(stagger configuration type)의 자기부상 시스템에 대하여 생각하기로 한다.

일반적으로 폭을 달리 하는 2개의 U형태 자석을 마주보게 Fig. 10과 같이 배치 할 때 자속 흐름에 대한 자기력을 평가하기 위하여 플랜지효과(flange effect)에 의한 부가폭(additional width) δ 를 계산해야 한다.

부가폭 δ 는 보통 자석의 구석 4곳에 대하여 복소 평면상에 등각사상(conformal mapping)을 수행하여 얻게 되는데 본 연구에서 참고 논문⁽¹¹⁾을 참조하여 δ 를 다음과 같이 선정한다.

$$\delta = \frac{s}{\pi} + \frac{D}{\pi} \tan^{-1}(s/D) \tag{23}$$

이제 본드선도를 구축하기 위하여 앞절에서 언급한 자기장의 변환기 성질을 파악하기로 한다. Fig. 10으로부터 균일흐름 자속, 플랜지 효과로써 부가된 길이 δ 만큼 확장되어 흐르는 수직방향의 플랜지 자속 그리고 측면 자속에 대한 리턴스 R_u, R_r 및 R_y 는 각각 다음과 같이 계산된다.

$$R_u = \frac{s}{\mu_0(ab)} \tag{24}$$

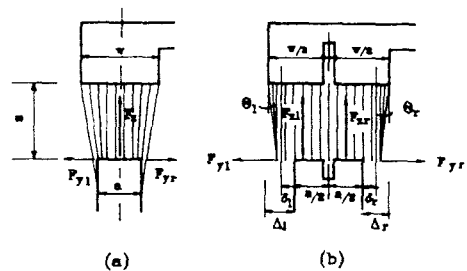


Fig. 10 Parameters for derivation of lift and guidance forces

$$R_r = \frac{s}{\mu_0(\delta_r + \delta_l)b} \quad (25)$$

$$R_y = \frac{s}{\mu_0(\text{eff}_r(\Delta - \delta) + \text{eff}_l(\Delta - \delta))b} \quad (26)$$

여기서 b 는 자석의 길이, δ 는 부가폭 그리고 $\text{eff}(\Delta - \delta)$ 는 측면방향으로 벌어지는 자속흐름의 길이를 균일흐름으로 등가할 때의 유효길이(effective length)를 의미하며, 유효길이는 다음과 같이 계산된다.

$$\pi \cdot \text{eff}(\Delta - \delta) = s(\theta_l - \theta_r) = s \cdot \tan^{-1} \frac{\Delta}{s} \quad (27)$$

따라서 완전한 U형태 자석에 대한 자속 흐름도는 Fig. 11(a)와 같으며, 이때 자석의 흐름에 따라 자석과 트랙 그리고 공진장에 커패시턴스 형태로 자기 에너지를 저장함으로써 자기력 감소를 가져온다. 그러므로 자기력 감소지점($M_i, i=0, 1, \dots, 7$)에 공통자력접합을 부가하고 그 사이에 공통흐름접합을 삽입하여 커패시턴스 형태의 에너지 저장요소를 첨가함으로써 Fig. 11(b)와 같은 자속 유출량이 포함된 자속 흐름에 대한 본드선도를 구축할 수 있다. Fig. 11(b)에 표시되어 있는 커패시턴스 C_{mag} , C_{track} 및 C_{lean} 에 대한 리턴턴스 R_{mag} , R_{track} , R_{lean} 는 식(5)와 식(15)에 각각 정의되어 있다. 그리고 커패시턴스 C_u , C_r , 및 C_y 에 대한 요소방정식을 결정하는 각각의 리턴턴스 R_u , R_r , R_y 는 식(24), 식(25) 그리고 식(26)에 표시되어 있다.

다음, Castigliano의 에너지에 관한 식(1)을 이용하여 F_{zu} , F_{zr} 그리고 F_y 를 구하면 다음과 같다.

$$E(\phi_u, s) = \frac{1}{2}(R_{u1} + R_{u2})\phi_u^2 \quad (28)$$

(i) $R_{u1} + R_{u2}$

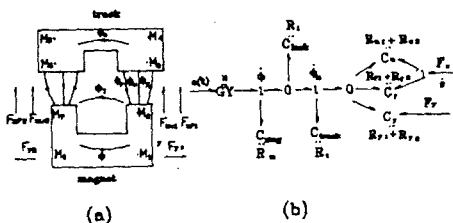


Fig. 11 Flux flow model and its bond graph

$$\frac{M}{\phi_u} \ddot{C}_u \frac{F_{zu}}{s} \quad (29)$$

$$F_{zu} = \frac{\partial E(\phi_u, s)}{\partial s} = \frac{\mu_0 AN^2 i^2}{4s^2} \quad (29)$$

$$E(\phi_r, s) = \frac{1}{2}(R_{r1} + R_{r2})\phi_r^2 \quad (30)$$

(ii) $R_{r1} + R_{r2}$

$$\frac{M}{\phi_r} \ddot{C}_r \frac{F_{zr}}{s} \quad (31)$$

$$F_{zr} = \frac{\mu_0 AN^2 i^2}{4s^2} \left[\frac{2s}{\pi a} + \frac{\Delta_r}{\pi a} \tan^{-1} \frac{s}{\Delta_r} + \frac{\Delta_r}{\pi a} \tan^{-1} \frac{s}{\Delta_l} \right] \quad (31)$$

$$R_{y1} + R_{y2} \quad E(\phi_y, s) = \frac{1}{2}(R_{y1} + R_{y2})\phi_y^2 \quad (32)$$

$$\frac{M}{\phi_y} \ddot{C}_y \frac{F_y}{s} \quad (33)$$

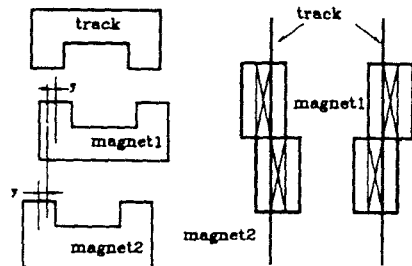
$$F_y = \frac{\mu_0 AN^2 i^2}{4s^2} \left[\frac{s}{\pi a} \right] \left[\tan^{-1} \frac{\Delta_r}{s} - \tan^{-1} \frac{\Delta_l}{s} \right] \quad (33)$$

이제 Fig. 11(b)의 본드선도로부터 얻을 수 있는 접합 방정식들을 이용하여 1개의 U자형 자석에서 얻을 수 있는 수직 부상력 F_z 와 안내력 F_y 를 구하면 각각 다음과 같다.

$$F_z = \frac{\mu_0 AN^2 i^2}{4s^2} \left[1 + \frac{2s}{\pi a} + \frac{\Delta_r}{\pi a} \tan^{-1} \frac{s}{\Delta_r} + \frac{\Delta_l}{\pi a} \tan^{-1} \frac{s}{\Delta_l} \right] \quad (34)$$

$$F_y = \frac{\mu_0 AN^2 i^2}{4s^2} \left[\frac{s}{\pi a} \right] \left[\tan^{-1} \frac{\Delta_r}{s} - \tan^{-1} \frac{\Delta_l}{s} \right] \quad (35)$$

그리고 자석과 레일의 폭을 같게하고 중심선에 대한 자석 배치를 Fig. 12와 같이 y 만큼 편심시킨 경우, 즉 $(\Delta_r = -\Delta_l) \rightarrow y$ 인 경우에 대하여 본드



(a) magnet staggered geometry

(b) underside of the vehicle

Fig. 12 Stagger configuration type

선도를 구축할 때는 공진장의 균일흐름 자속 R_u 를 균일한 면적흐름으로 이상화하여 다음과 같이 수정한다.

$$R_u(s, y) = \frac{s}{\mu_0(a - k_r \cdot y) b} \quad (36)$$

여기서 k_r 은 이상화모델에 대한 보정계수로서 일반적으로 $-a/y < k_r < a/y$ 범위의 값을 가지며 자속의 균일면적 흐름에 대한 오차의 정도에 따라서 그 값을 달리한다.

따라서 식(24)를 식(36)으로 대치하고 식(34)와 식(35)에 $\Delta_r = -\Delta_l$ 을 y 로 치환하면 편심된 2개의 자석에서 얻을 수 있는 2차원 자기부상 시스템의 부상력 F_z 와 안내력 F_y 에 대한 자기력은 다음과 같다.

$$F_x(y, s) = \frac{\mu_0 AN^2 i^2}{4s^2} \left[1 + \frac{2s}{\pi a} + \frac{y}{a}(1 - k_r) - \frac{2y}{\pi a} \tan^{-1} \frac{y}{s} \right] \quad (37)$$

$$F_y(y, s) = \frac{\mu_0 AN^2 i^2}{4s^2} \left[\frac{2s}{\pi a} \tan^{-1} \frac{y}{s} \right] \quad (38)$$

Fig. 13은 편심배치 방식 자기부상 시스템의 전체 본드선도이다. Fig. 13에서 $f_{ax}(t)$ 및 $f_{ay}(t)$ 는 시스템 외부에서 발생하는 힘 그리고 $z_r(t)$ 및 $y_r(t)$ 는 트랙 표면의 불규칙(irregularity) 및 트랙 처짐에 의한 변위 입력을 나타낸다.

따라서 Fig. 13으로부터 전체 자기부상 시스템의 기계장에서의 동적방정식은 다음과 같이 유도된다.

$$M_p \ddot{z}_m = M_p g - \frac{\mu_0 AN^2}{4s^2} \left[i_1^2 \alpha(s, y) + i_2^2 \alpha(s, -y) \right]$$

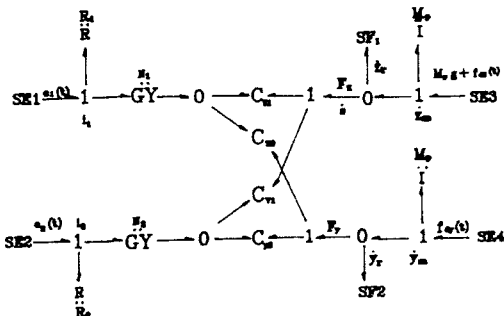


Fig. 13 Overall bond graph of the 2nd-dimensional MAGLEV system

$$+ f_{ax}(t) \quad (39a)$$

$$M_p \ddot{y}_m = -\frac{\mu_0 AN^2}{4s^2} \left[i_1^2 \beta(s, y) + i_2^2 \beta(s, -y) \right]$$

$$+ f_{ay}(t) \quad (39b)$$

여기서 $\alpha(s, y)$ 와 $\beta(s, y)$ 는 공진장의 균일흐름 자속에서 발생하는 오차를 무시하여 $k_r=1$ 일 때의 값으로서 각각 다음과 같다.

$$\alpha(s, y) = \left(1 + \frac{2s}{\pi a} - \frac{2y}{\pi a} \tan^{-1} \frac{y}{s} \right) \quad (40)$$

$$\beta(s, y) = \left(\frac{2s}{\pi a} \right) \tan^{-1} \frac{y}{s} \quad (41)$$

다음, 전기장에서의 전류/전압 관계식을 본드선도 모델링 방법으로 유도하기 위하여 자석의 편심 배치 구조에서 자속 흐름을 균일한 면적흐름으로 이상화할 때 전기에너지 저장요소의 계수인 인덕턴스 $L(s, y)$ 는 다음과 같다.

$$L(s, y) = \frac{\mu_0 AN^2}{2s} \left[1 - k_r \frac{y}{a} \right] \quad (42)$$

그러므로 식(42)와 Fig. 13의 본드선도에서 전기장에 관한 접합방정식을 이용하여 전기장에서의 전류/전압 관계식을 구하면 다음과 같다.

$$v(t) = Ri(t) + \frac{d}{dt} \left[\frac{\mu_0 AN^2 i}{2s} (1 - k_r \frac{y}{a}) \right] \quad (43)$$

지금까지 부상/안내를 위한 편심배치 방식 자기부상 시스템에 관한 동적방정식인 식(39)와 식(43)을 유도하였다. 자석과 트랙에서의 자속 흐름에 대한 자기력 감소의 효과가 무시되었고 공진장을 통과할 때 나타날 수 있는 자속 유출이 배제되었지만, 이것들은 공진장에서의 리럭턴스에 비해 무시할만 하다. 그러므로 식(39)와 식(43)을 적용하여 부상/안내 겸용 자기부상 시스템의 동적거동을 해석하고 제어시스템을 설계하는데는 무리가 없을 것으로 사료된다.

끝으로, 제어시스템 설계목적상 앞에서 유도된 부상/안내를 위한 편심배치 방식 자기부상 시스템의 비선형 동적방정식들을 작동점 (s_0, y_0) 및 $(s_0, -y_0)$ 근처에서 선형화 하기로 한다. 우선 식(39)에서 작동점 근처에서 차랑을 지지해야 하는데 요구되는 전류 i_0 를 계산하면 다음과 같다.

$$i_0 = \left(\frac{2M_0 g s_0^2}{\mu_0 A N^2 a_0} \right)^{1/2}, \quad i_{10} = i_{20} \quad (44)$$

여기서 $\alpha_0 = \alpha(s_0, y_0)$ 그리고 $\beta_0 = \beta(s_0, y_0)$ 를 의미한다. 먼저, 식(43)의 전류/전압 관계식을 작동점 및 정상상태에서의 전류 i_0 근처에서 작은 편차를 가했을 때 (i_0, s_0, y_0) 및 $(i_0, s_0, -y_0)$ 근처에서 Taylor 급수전개를 하여 작동점 근처에서의 편차 $\Delta i(t)$, $\Delta s(t)$ 그리고 $\Delta y(t)$ 의 세곱 이상의 고차항을 무시하면 다음과 같은 선형화된 방정식들을 얻을 수 있다.

$$\Delta v_1(t) = R_1 \cdot \Delta i_1(t) + L_{01} \cdot \Delta \dot{i}_1(t) - i_0 \cdot [Z_{s1} \cdot \Delta \dot{s}(t) + Z_y \cdot \Delta \dot{y}(t)] \quad (45)$$

$$\Delta v_2(t) = R_2 \cdot \Delta i_2(t) + L_{02} \cdot \Delta \dot{i}_2(t) - i_0 \cdot [Z_{s2} \cdot \Delta \dot{s}(t) + Z_y \cdot \Delta \dot{y}(t)] \quad (46)$$

여기서 L_{01} , Z_{s1} 그리고 Z_y 는 공칭 인덕턴스, 단위 수직길이당 인덕턴스 그리고 단위 측면길이당 인덕턴스로서 각각 다음과 같이 정의된다.

$$L_{01} = \frac{\mu_0 A N^2}{2s_0} \left[1 - \frac{k_r}{a} \cdot y_0 \right],$$

$$L_{02} = \frac{\mu_0 A N^2}{2s_0} \left[1 + \frac{k_r}{a} \cdot y_0 \right],$$

$$Z_{s1} = \frac{\mu_0 A N^2}{2s_0^2} \left[1 - \frac{k_r}{a} \cdot y_0 \right],$$

$$Z_{s2} = \frac{\mu_0 A N^2}{2s_0^2} \left[1 + \frac{k_r}{a} \cdot y_0 \right],$$

$$Z_y = \frac{\mu_0 A N^2}{2s_0} \left(\frac{k_r}{a} \right)$$

그리고 기계장의 동적방정식 (39)를 선형화하면 다음과 같다.

$$M_p \Delta \ddot{z}_m = K_{zx} \Delta s(t) + K_{zy} \Delta y(t) + K_{xi1} \Delta i_1(t) + K_{xi2} \Delta i_2(t) \quad (47)$$

$$M_p \Delta \ddot{y}_m = K_{yz} \Delta s(t) + K_{yy} \Delta y(t) + K_{yi1} \Delta i_1(t) + K_{yi2} \Delta i_2(t) \quad (48)$$

여기서

$$K_{zx} = \frac{\partial F_z}{\partial s} = \frac{\mu_0 A N^2}{2} \left[\frac{i_0}{s_0} \right]^3 \left[\frac{2\alpha_0 + \alpha_1}{i_0} \right], \quad K_{zy} = 0$$

$$K_{yy} = \frac{\partial F_y}{\partial y} = -\frac{\mu_0 A N^2}{2} \left[\frac{i_0}{s_0} \right]^2 \cdot \beta_1, \quad K_{yz} = 0$$

$$-K_{yi1} = K_{yi2} = \frac{\partial F_y}{\partial i} = \frac{\mu_0 A N^2}{2} \left[\frac{i_0}{s_0} \right]^2 \cdot \left[\frac{\beta_0}{i_0} \right]$$

$$K_{xi1} = K_{xi2} = \frac{\partial F_x}{\partial i} = -\frac{\mu_0 A N^2}{2} \left[\frac{i_0}{s_0} \right]^2 \cdot \left[\frac{\alpha_0}{i_0} \right]$$

$$\alpha_1 = \frac{s_0}{\pi a} \left(1 + \frac{y_0^2}{s_0^2 + y_0^2} \right), \quad \beta_1 = \frac{1}{\pi a} \cdot \left(\frac{s_0^2}{s_0^2 + y_0^2} \right)$$

4. 자기부상 시스템의 LQG/LTR 제어기 설계

4.1 LQG/LTR 제어이론

LQG/LTR 제어이론은 LQG 최적 제어이론으로부터 발전한 방법이다. LQG 제어방법은 외란 및 센서잡음과 같은 실제적인 확률입력(stochastic input)을 고려하여 Kalman 필터를 설계하고 아울러 가격함수를 최적화하는 LQ 최적제어 문제를 해결함으로써 동적 피드백 제어시스템을 설계하는 방법인 반면에 LQG/LTR 설계방법은 피드백 제어시스템의 루프 전달함수행렬(TFM)의 특이값이 주파수역에서 바람직한 루프 형성을 갖도록 설계시 주파수역 설계사양들을 직접 고려할 수 있는 선형 다변수 제어시스템 설계 방법이다.

이는 먼저 안정도-강인성 설계사양 및 주파수역 성능을 만족하는 목표필터루프(TFL: target filter loop)를 설계하고, 다음으로 루프전달회복(LTR: loop transfer recovery) 방법을 이용하여 보상된 시스템의 루프 TFM의 특이값이 이미 설계사양을 만족시키고 있는 목표필터루프의 특이값 형상으로 회복시키게 된다. 따라서 다변수 제어시스템 설계 과정이 대단히 조직적인 장점을 가지고 있다. 특히 LQG/LTR 제어방법은 모델기준보상기(model based compensator)의 설계 파라미터인 필터제인행렬 H와 제어제인행렬 G를 분리시켜 설계할 수 있다는 특징을 가지고 있다. 즉, TFL을 설계할 때 바람직한 루프 형상이 되도록 H를 선정하고 LTR 수행시 G를 선정한다. 그리고 TFL이 설계조건을 만족하는 바람직한 루프 형상이 되면 저가 제어(cheap control) LQ 최적제어 문제를 이용하여 LTR를 수행함으로써 회복된 루프전달함수의 공칭 안정도를 보장 받을 수 있을 뿐만 아니라 모델링 오차에 대한 성능/강인성 및 안정도/강인성 문제를 자연스럽게 만족시킬 수 있다⁽¹²⁾.

4.2 자기부상 시스템의 LQG/LTR 제어기 설계

(1) 선형화 모델 및 설계사양 설정

앞에서 유도된 2차원 자기부상 시스템의 선형화

모델에 대한 상태공간 모델식은 다음과 같다.

$$\begin{cases} \dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u_p(t) + \Gamma_p d(t) \\ y(t) = C_p x_p(t) \end{cases} \quad (49)$$

여기서, 상태벡터 $x(t) = [\Delta s \ \Delta \dot{z}_m \ \Delta \ddot{z}_m \ \Delta y \ \Delta \dot{y} \ \Delta \ddot{y}_m]^T$ 이고 제어입력 $u(t)$ 는 자석1과 자석2의 각 전압 그리고 외란입력 $d(t)$ 는 트랙 불균일성에 대한 속도성분 및 차량의 측면으로부터 받는 바람에 의한 외력이다. 출력벡터 $y(t)$ 는 공진장과 측면변위이며 시스템행렬 A_p 와 입력행렬 B_p , Γ_p 는 각각 다음과 같다. 그리고 시스템 파라미터는 EXPO'93 자기부상 시스템의 데이터⁽¹³⁾를 이용하기로 한다.

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 & A_{35} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & A_{62} & 0 & A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{bmatrix},$$

$$B_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ B_{31} & B_{32} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ B_{61} & B_{62} \end{bmatrix}, \quad \Gamma_p = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ D_{31} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ D_{61} & D_{62} \end{bmatrix}$$

여기서

$$A_{31} = \frac{K_{zz}}{2M_p} \cdot \left[\frac{R_1}{L_{01}} + \frac{R_2}{L_{02}} \right],$$

$$A_{32} = \frac{K_{zi}}{M_p} \cdot \left[\frac{K_{zz}}{K_{zi}} - i_0 \cdot \left[\frac{Z_{s1}}{L_{01}} + \frac{Z_{s2}}{L_{02}} \right] \right],$$

$$A_{33} = -\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{R_1}{L_{01}} + \frac{R_2}{L_{02}} \right],$$

$$A_{35} = -\frac{K_{zi}}{M_p} \cdot \left[\frac{Z_y}{L_{01}} - \frac{Z_y}{L_{02}} \cdot i_0 \right],$$

$$A_{62} = -\frac{K_{yi}}{M_p} \cdot \left[\frac{Z_{si}}{L_{01}} - \frac{Z_{s2}}{L_{02}} \right] \cdot i_0,$$

$$A_{64} = -\frac{K_{yy}}{2M_p} \cdot \left[\frac{R_1}{L_{01}} + \frac{R_2}{L_{02}} \right],$$

$$A_{65} = -\frac{K_{yi}}{M_p} \cdot \left[\frac{K_{yy}}{K_{yi}} - i_0 \cdot \left[\frac{Z_y}{L_{01}} - \frac{Z_y}{L_{02}} \right] \right], \quad A_{66} = A_{33},$$

$$B_{31} = -\frac{1}{L_{01}} \cdot \frac{K_{zi}}{M_p}, \quad B_{32} = -\frac{1}{L_{02}} \cdot \frac{K_{zi}}{M_p},$$

$$B_{61} = -\frac{1}{L_{01}} \cdot \frac{K_{yi}}{M_p}, \quad B_{62} = \frac{1}{L_{02}} \cdot \frac{K_{yi}}{M_p},$$

$$D_{31} = -A_{32}, \quad D_{61} = -A_{62},$$

$$D_{62} = \frac{1}{2M_p} \cdot \left[\frac{R_1}{L_{01}} + \frac{R_2}{L_{02}} \right]$$

본 연구에서는 플랜트 출력측으로 반영된 외란입력에 대한 외란제거 성능 그리고 구동기와 설계된 동적 보상이 갖는 시간지연 요소 및 시스템 파라미터인 자석의 질량 M_p 의 $\pm 20\%$ 변화를 모델링 오차로 간주하여 모델링 오차에 대한 안정도-강인성에 관한 설계사양을 고려하기로 한다. 그래서 EXPO'93 자기부상 시스템의 데이터⁽¹³⁾ 및 참고문헌^(14,15)을 참고하여 외란 및 모델링 오차가 에너지를 갖는 주파수역을 Fig. 14에 표시하였다. 이때, 선정된 설계사양은 다음과 같다.

(1) 일정한 명령입력과 외란에 대하여 0-정상상태 오차를 갖는다.

(2) 외란제거 조건 ($\omega_d = 20 \text{ rad/s}$)과 안정도-강인성 조건 ($\omega_e = 250 \text{ rad/s}$)을 감안하여 루프 전달함수 행렬의 이득 교차주파수 (gain crossover frequency) ω_c 를 120 rad/s 로 한다.

(2) 스케일링 (scaling) 및 설계플랜트 모델

제어시스템을 설계하기에 앞서 종종 플랜트 모델식의 스케일링이 필요한 경우가 있다. 특히 다변수 제어시스템인 경우 바람직하지 않는 단위를 물리적으로 유용한 단위로 바꾸는 수단으로, 혹은 설계 목적상 제어입력과 출력에 대한 가중치를 두고자 할 때 사용함으로써 시스템의 극점에는 영향을 주지 않지만 전달함수행렬의 특이값 형상을 변화시킬 수 있다. 본 연구에서 사용한 S_y 는 출력벡터 y 에 대한 대각선 스케일링 행렬 (diagonal scaling matrix)로서 mks단위로 유도된 시스템을 공진장

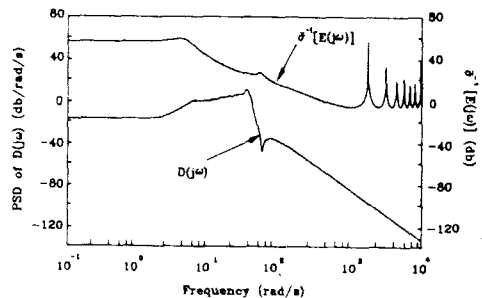


Fig. 14 Characteristics of disturbance input and modeling error

센서가 검출하는 mm단위로의 변환 및 각 방향의 출력에 대한 가중치를 주기위해 사용했다. 그리고 설계사양 1)을 만족하기 위하여 각각의 제어입력 채널에 적분기를 부착하면 설계플랜트모델은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (50)$$

여기서,

$$A = \begin{bmatrix} A_p & B_p \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad C = [C_p \ 0]$$

(3) 목표필터루프 설계

목표필터루프(TFL)의 설계는 가상적인 센서잡음에 대한 Kalman 필터를 설계함으로써 요구하는 설계사양을 만족시킬 수 있는 필터제인행렬 H를 선정하는 과정이다. 우선 프로세스(process)와 센서(sensor)에 가상적인 백색잡음을 고려한 설계 플랜트모델의 수정된 상태공간 모델식을 다음과 같이 만든다.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \tilde{B}u(t) + L\xi(t) \\ y(t) = Cx(t) + \theta(t) \end{cases} \quad (51)$$

여기서 $\xi(t)$ 와 $\theta(t)$ 는 각각 강도(intensity)가 I와 μI 와 0-평균 백색잡음 벡터(zero-mean white noise vector)이다.

설계행렬인 필터제인행렬 H를 구하기 위해서는 가상적인 외란입력 벡터 L과 센서잡음 강도 μ 를 설계파라미터로 하여 필터의 TFM $G_F(s) = C(sI - A)^{-1}H$ 가 설계사양을 만족하는 바람직한 특이값 형상이 되도록 목표필터루프를 설계한다.

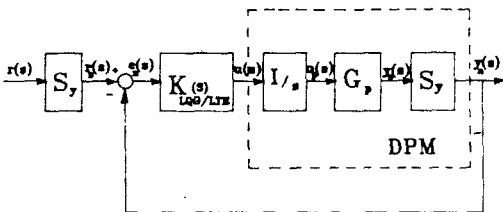


Fig. 15 Block diagram of the LQG/LTR control system

본 연구에서는 Fig. 15와 같은 LQG/LTR 제어 시스템에서 플랜트 G_p , 스케일링행렬 S_y 그리고 적분기가 첨가된 설계플랜트 모델에 대하여 설계사양을 만족시킬 수 있는 TFL의 루프형상을 얻기 위해서 저주파 및 고주파에서 특이값이 일치되도록 L을 다음과 같이 선정했으며⁽¹⁶⁾ 또한 설계사양 2)를 만족시키기 위하여 $\mu=5 \times 10^{-5}$ 로 선정했다.

$$L = \begin{bmatrix} (C_p(-A_p)^{-1}B_p)^{-1} \\ C_p^T(C_p C_p^T)^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.001 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.192 & -0.341 \\ 0.268 & 0.481 \end{bmatrix} \quad (52)$$

그리고 선정된 L과 μ 를 사용하여 필터대수 Riccati 식(filter algebraic Riccati equation)을 풀어 필터제인행렬 H를 선정하면 다음과 같다.

$$H = \begin{bmatrix} 0.081 & 0 \\ 2.704 & -0.001 \\ 50.25 & -0.029 \\ 0 & 0.141 \\ -0.003 & 0 \\ -0.063 & 0 \\ -27.28 & -48.19 \\ -37.79 & 68.09 \end{bmatrix}$$

(4) 루프전달회복

루프전달회복(LTR) 방법은 다변수 제어시스템 설계에서 사용하고 있는 매우 강력하고 유용한 방법중 하나이다. 설계사양에 맞는 TFL가 설계됨에 따라 전 상태에 대한 상태 추정이 가능해졌고 아울러 LTR을 수행함으로써 제어법칙 $u(t)$ 에 대한 전 상태 피드백 제어제인행렬 G를 구할 수 있다. LTR은 저가 제어 LQR 문제⁽⁴⁾를 해결함으로써 형성된 TFL를 실현시키는 단계이며 이것으로 LQG/LTR 보상기의 모든 설계 파라미터가 선정되므로

LTR의 성공적 회복 여부에 따라 LQG/LTR의 적용범위가 결정된다.

LTR을 수행하기 위하여 설계 파라미터 $\rho=10^{-9}$ 를 선정하여 저가제어 LQR 문제를 해결함으로써 Fig. 16에 표시된 회복된 루프 TFM의 특이값 선도를 얻었으며, 이때 선정된 제어게인행렬 G 는 다음과 같다.

$$G = \begin{bmatrix} -1.8 \times 10^8 & -2.6 \times 10^6 & -1.9 \times 10^4 & -1.9 \times 10^7 \\ -1.3 \times 10^8 & -1.9 \times 10^6 & -1.5 \times 10^4 & 1.1 \times 10^7 \\ -1.8 \times 10^6 & -3.1 \times 10^4 & 3.7 \times 10^2 & 1.2 \times 10^2 \\ 2.7 \times 10^6 & 4.5 \times 10^4 & 1.2 \times 10^2 & 2.9 \times 10^2 \end{bmatrix}$$

(5) LQG/LTR 제어시스템의 성능 해석 및 고찰
이제 위에서 설계된 LQG/LTR 보상에 대한 시뮬레이션을 시도하여 보상된 LQG/LTR 제어시스템의 성능을 평가하기로 한다.

Fig. 17과 Fig. 18은 각각 LQG/LTR 제어시스템에 대한 감도(sensitivity) TFM $S(j\omega)$ 와 페루프 TFM $C(j\omega)$ 의 특이값선도이다. LQG/LTR 제어시스템의 주파수역 성능은 페루프 TFM $C(j\omega)$ 의 DC게인 값이 1이므로 일정한 입력에 대하여 0-정상태오차를 갖게되며 감도 TFM $S(j\omega)$ 가 외란 입력이 에너지를 갖는 주파수 영역 $\omega_d < 20\text{rad/s}$ 에서 -20db 이하로 떨어져 외란제거 설계사양을 만족하고 있다. 또한 페루프 시스템의 대역폭은 약 120rad/s로 설계사양을 만족할 뿐 아니라 분리도가 -100db/dec로 5극점을 롤-오프 하게되므로 모델링 오차에 대한 안정도-강인성 및 고주파에서의 센서잡음에 대한 저감도 성능이 우수함을 알 수 있다.

Fig. 19와 Fig. 20은 출력측으로 반영된 외란이 $[-1 \ -1]^T$ 방향으로 주어졌을 때의 LQG/LTR 제어시스템의 출력 및 제어입력의 시간 응답이다.

LQG/LTR 제어시스템의 시간역 성능을 평가하면 부상 및 안내방향에서 각각 0.4초, 0.2초의 2% 정착시간을 가지며 부상방향에서 약 40% 정도의 퍼센트 오버슈트가 발생하고 있다. 본 연구에서 이와 같은 오버슈트를 줄이기 위하여 부상방향의 불안정한 모드와 측면방향의 비감쇠 모드를 첨가된 새로운 설계 파라미터인 스케일링 행렬을 사용하여 적절히 절충함으로써 처음 약 90%의 오버슈트를 50% 정도 삭감할 수 있음이 관찰되었는 바, 과도

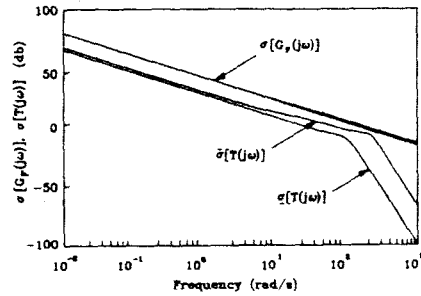


Fig. 16 Singular values of the target filter loop TFM $G_F(j\omega)$ and recovered loop TFM $T(j\omega)$

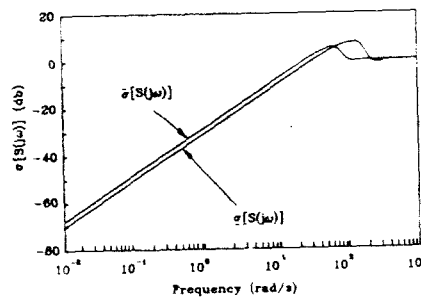


Fig. 17 Singular values of the sensitivity TFM $S(j\omega)$

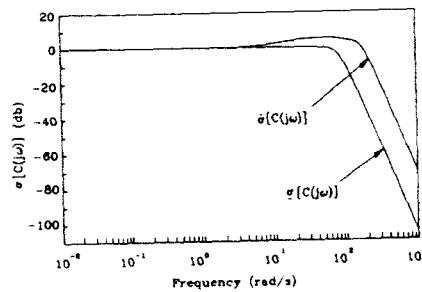


Fig. 18 Singular values of the closed loop TFM $C(j\omega)$

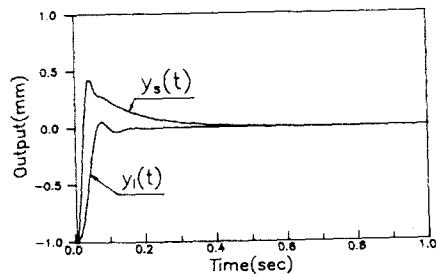


Fig. 19 Step responses of the LQG/LTR control system with disturbances ($[-1 \ -1]^T$ direction)

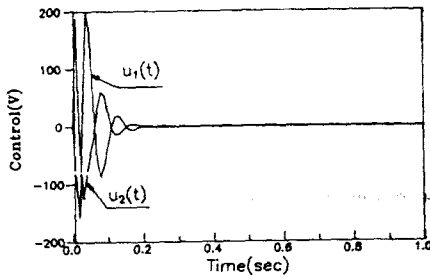


Fig. 20 Control inputs of the LQG/LTR control system with disturbances ($[-1 \ -1]^T$.direction)

한 제어입력으로 인한 구동기의 포화를 신중하게 고려하지 않아도 될 경우라면 오버슈트를 대폭 줄일 수 있다. 하지만 구동기의 시간응답이 이론적 수치를 따르기 어렵고 또한 그 하드웨어적인 문제점이 언제나 존재하기 마련이므로 제어시스템 설계시 포화의 가능성을 결코 배제할 수 없다. 특히, 저가제어 LTR을 수행하게 되는 LQG/LTR 제어시스템의 구성시에는 과도한 제어입력으로 인한 구동기의 포화가 문제점으로 대두되기 때문에 이의 해결방안이 더욱 요망된다. 따라서 제어입력의 포화를 유발하는 가중행렬의 무리한 조작을 하지않고도 시스템 성능과 제어입력의 적절한 조화를 유지하기 위해서는 무엇보다도 2차 현가장치가 장착되어 시스템 대역폭을 줄여 줌으로써 달성할 수 있을 것이다. 이는 과도한 오버슈트를 감소시키고 제어입력의 포화를 방지해 줄 뿐 아니라 승차감 향상에도 크게 기여할 것으로 예상되므로 자기부상 시스템의 실현에 꼭 필요한 요소로 사료된다.

5. 결 론

21세기의 혁신적 대중 교통수단이 될 흡인방식 자기부상 시스템은 본질적으로 불안정한 시스템으로서 고도의 제어기 설계가 요구된다. 특히 편심배치 방식에 의한 부상 및 안내를 검용할 때, 자기 변환기(magnetic transducer)의 복잡한 동역학적 특성 때문에 강한 연성(couple) 및 모델링에 대한 불확실성으로 제어측면에서 많은 어려움이 있다. 본 연구에서는 자기부상 시스템이 포함하고 있는 전기, 자기 그리고 기계 시스템을 본드선도 기법을 이용하여 서로의 관계를 명확하게 파악했으며, 그 결과 부상 및 안내 방향의 연성이 포함된 동적방정

식을 얻었다. 또한 자기 변환기에 대한 정확한 본드선도 구축으로 필요할 시, 다시 말하면 자속유출량 고려 또는 차량과 트랙의 동역학 등을 언제든지 첨가할 수 있게 되었다. 그리고 제어기 설계 단계에서는 입출력 사이의 연성을 고려한 다변수 시스템에 대하여 외란제거 성능과 모델링 오차에 대한 안정도-강인성을 설계시 직접 고려할 수 있는 매우 강력하고 조직적인 선형 다변수 제어이론인 LQG/LTR 방법을 적용하여 설계조건에 잘맞는 만족스러운 성능을 갖는 제어시스템을 구성하였다.

이와 같이 소프트웨어적으로 설계된 제어시스템의 실현을 위하여 하드웨어적 측면에서 연구가 이루어져야 할 것이다. 단지 본 연구가 갖는 의미는 제어 측면에서 자기부상 시스템이 갖고 있는 동역학적 특성과 이론적 제어기 구성의 가능성을 보여주고 모델링 단계에서 공학적 감각을 살린 편리한 본드선도 기법을 이용할 수 있음을 제시한 것이다. 앞으로 선형화 과정에서 발생한 비선형문제 및 자속유출량의 효과, 와류전류(eddy current)의 영향 그리고 트랙의 굽힘변위 등이 함께 고려되어야 할 것으로 사료된다.

참고문헌

- (1) Paynter, H. M., 1961, Analysis and Design of Engineering Systems, M.I.T. Press.
- (2) Karnopp, D. and Rosenberg, R. C., 1975, System Dynamics : A Unified Approach, J. Wiley & Sons.
- (3) Rosenberg, R. C., 1972, "Multiport Models in Mechanics," ASME J. of Dyn, Sys. Meas. and Control, pp. 206~212.
- (4) Doyle, J. C. and Stein, G., 1981, "Multivariable Feedback Design : Concepts for a Classical/Modern Synthesis," IEEE Trans. on AC, Vol. AC-26, pp. 4~16.
- (5) Rosenberg, R. C. and Karnopp, D., 1983, Introduction to Physical System Dynamics, McGraw-Hill, Inc.
- (6) Ort, J. R. and Martens, H. R., 1974, "A Topological Procedure for Converting a Bond Graph to a Linear Graph," ASME J. of Dyn. Sys. Meas. and Control, pp. 307~314.
- (7) Brown, T. F., 1972, "Lagrangian Bond Graph."

- ASME J. of Dyn. Sys. Meas. and Control, pp. 213~221.
- (8) Sinha, P.K., 1987, Electromagnetic Suspension : Dynamics and Control, IEEE Control Engineering Series 30.
- (9) Bonderson, L. S., 1975, "Vecter Bond Graphs Applied to One-Dimensional Distributed Systems," ASME J. of Dyn. Sys. Meas. and Control, pp. 75~82.
- (10) Inman, D. J., 1989, Vibration with Control, Measurement and Stability, Prentice-Hall. Inc.
- (11) Brzezina, W. and Langerhole, J., 1974, "Lift and Side Forces on Rectangular Pole Pieces in two Dimensions", J. of Applied Physics, pp. 1869~1872.
- (12) 김종식, 1988, 선형제어 시스템공학, 청문각.
- (13) 강도현, 1991, "부상용 전자석의 설계 및 해석", 한국전기연구소.
- (14) Hedrick, J. K. and Billington, G. F., 1974, "Analysis, Design and Optimization of High Speed Vehicle Suspensions Using State Variable Techniques," ASME J. of Dyn. Sys. Meas. and Control, pp. 193~203.
- (15) Grag, D. and Barrows, T., 1981, "Modeling and Dynamic Response of Maglev Vehicles Subjected to Crosswind Gusts," ASME J. of Dyn. Sys, Meas. and Control, pp. 251~258.
- (16) Athans, M., 1986, "A Tutorial on the LQG/LTR Method." Proc. of the ACC.