

〈論 文〉

비정상 유동을 포함한 파이프계의 안정성 해석

박철희* · 이우식* · 홍성철** · 김태룡***

(1991년 4월 1일 접수)

Stability Analysis of Piping System Conveying Unsteady Flow

C.H. Pak, U. Lee, S.C. Hong and T.Y. Kim

Key Words : Flow-induced Vibration(유체유발진동), Piping System(파이프계), Unsteady Flow(비정상 유동), Stability(안정성)

Abstract

This study deals with the stability of piping system conveying unsteady inviscid flow. The fluid pressure and velocity are considered as functions of time and position. Newton's method is used to derive the dynamic equations of a pipe. Also, the momentum and continuity equations of fluid are derived based on control volume approach. The unsteady flow effects on the stabilities of straight and three dimensional piping systems are investigated and compared with the existing results. The comparison shows that fluid pressure fluctuation which is associated with flow velocity, can be important for the stability of piping system. For the stability analysis of three dimensional piping system, the conventional finite element method is used.

1. 서 론

원자력 발전소나 중화학 공장의 많은 부분을 차지하고 있는 파이프계(piping system)에 발생하는 진동은 발전소의 시동 및 운전정지할때 부하변동에 의한 밸브 또는 펌프등의 작동으로 인하여 발생한 비정상 유동에 의한 것으로서 과도유동(transient flow)의 영향을 고려한 새로운 연구방법이 필요하다. 그러나, 과도유동 현상을 고려한 파이프계의 진동해석에 관한 연구는 아직까지 미진한 실정이다.

· 지금까지 이루어진 내부유동을 포함한 파이프계를 살펴보면 대부분의 연구가 일정한 속도의 유체가 흐르는 직선 파이프계의 동적 해석 및 안정성에

대하여 고찰⁽¹⁻⁵⁾하였고, 굴곡된 파이프의 경우는 2차원 굴곡된 파이프에 한하여 연구되었으며, 정적 평형 상태하에서의 초기 인장력의 영향을 고려하지 않아 그 결과⁽⁶⁻⁸⁾에 의문이 제기되었다. 이 문제는 유한요소법을 이용한 연구와 이론연구^(9,10)를 통하여 해결되었다. 유속이 변하면서 흐르는 유동을 포함하는 파이프계에 대하여는 유속을 단지 시간만의 함수로 가정하고 직전 파이프에 대하여 근사해법으로 연구⁽¹¹⁾된 바 있으며 3차원 굴곡된 파이프계에 대하여는 유속 및 유압을 시간의 함수로 고려하여 유한요소법을 이용한 연구⁽¹²⁾가 이루어졌다.

실제 계에서는 밸브등과 같은 경계조건에 따라 유속과 압력등이 시간과 위치의 함수로 주어지는 비정상 유동이므로 과도유동의 개념을 이용하여 유체의 영향이 해석되어야 하나, 이 부분에 대해서는 연구가 미비한 실정이다. 따라서 본 연구에서는 유속과 압력등이 시간과 위치의 함수로 표현되는 비정상 유체가 흐를 때 그 유동 특성이 파이프계에

* 정회원, 인하대학교 공과대학 기계공학과
** 정회원, 인하대학교 대학원
*** 정회원, 한국원자력 연구소

미치는 영향을 고찰하기 위해 비정상 유동을 포함한 파이프계의 운동방정식을 유도하고 유동 변수가 파이프계의 안정성에 미치는 영향을 연구하였다.

2. 운동방정식

비정상 유동을 포함하는 파이프계의 운동방정식을 유도하기 위해 파이프의 모든 변위는 작다고 가정하여 밀도가 ρ , 유속 c 그리고 압력이 p 인 유체가 흐르는 파이프와 내부유체의 자유물체도를 Fig. 1에 표시하였다. Fig. 1에서 q 는 유체의 단위면적당 마찰력이고 s 는 원주길이, F 는 파이프와 유체간의 상호작용력, M 은 파이프의 굽힘모멘트, Q 는 파이프의 전단력, T 는 파이프의 인장력, m_p 는 파이프의 단위길이당 질량이고, A 는 파이프의 내부 단면적이다.

유체가 파이프 내부를 흐르는 경우, 유체는 파이프의 변형에 의해 유체의 속도 V 는

$$V(x, t) = \left[c(x, t) \right] i + \left[\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + c(x, t) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right] j \quad (1)$$

이 되며, 이때의 유체 가속도 A 는

$$A(x, t) = \left[\frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial c}{\partial x} \right] i + \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial c}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial x} + 2c \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + c \frac{\partial c}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] j \quad (2)$$

이다.

Fig. 1에 도시된 자유물체도의 평형방정식에서 중력에 의한 파이프의 변위는 작다고 가정하여 중력항을 무시하면, 파이프의 축방향과 횡방향에 대한 두 운동방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\rho A \left[\frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial c}{\partial x} \right] + m_p \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A \frac{\partial p}{\partial x} - EA p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (3)$$

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho A \left[\frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial c}{\partial x} \right] \frac{\partial w}{\partial x} + 2\rho A c \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + M \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + A \frac{\partial}{\partial x} \left[p \frac{\partial w}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[T \frac{\partial w}{\partial x} \right] = 0 \quad (4)$$

여기서 A_p 는 파이프의 단면적, u 는 파이프의 축방향 변위이고 w 는 횡방향 변위이다. 식(4)의 둘째항은 원심력항이며, 식(3)의 첫째항과 식(4)의 셋째항은 과도유동에 기인한 힘들이고, 식(4)의 넷째항은 코리올리력(coriolisforce)이다. 위의 두식에서 변수는 u, w, p, c 의 네개로써 이들의 해를 구하기 위해서는 수학적으로 두개의 식이 더 필요하다. 따라서, 압력과 유속의 관계를 유체에 대한 운동량식과 연속방정식으로부터 구한다.

Fig. 1(a)의 유체요소 또는 검사체적(control volume)의 단면을 A , 미소길이를 δx , 파이프의 처짐에 의한 기울기를 d 라고 하고 유체는 파이프의 접선방향을 따라 유속 c 로 흐르므로 유체의 운동방정식을 구하는 데 있어 파이프의 축방향만을 고려하기로 한다. Newton방법에 의해 힘의 평형방

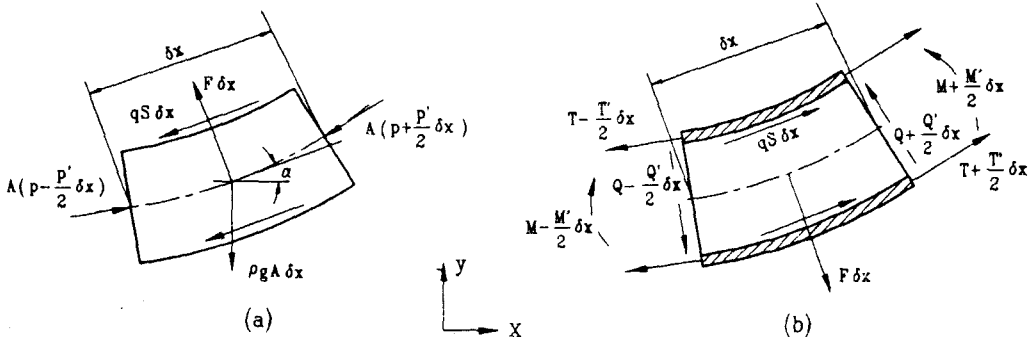


Fig. 1 Free-body diagrams of (a) fluid and (b) pipe elements

정식을 유도하면 다음과 같다.

$$A\left[p - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \delta x\right] - A\left[p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \delta x\right] - qS \delta x - \rho g A \delta x \sin \alpha = \rho A \delta x c \quad (5)$$

여기서, $\dot{} = \partial(\)/\partial t + c \partial(\)/\partial x$ 이고 \dot{x} 는 중력 가속도이다. 단위길이당 마찰력 qS 를 Darcy-Weisbach의 마찰계수 f 로 표현하고⁽¹³⁾, 압력 p 를 Piezo-metric Head, H 로 표현하면 식(5)로부터 다음과 같은 유체의 운동량식(momentum equation)을 얻을 수 있다.

$$gH_x + cc_x + c_t + \frac{fc|c|}{2D} = 0 \quad (6)$$

여기서 첨자 x 와 t 는 편미분을 의미하며 D 는 파이프의 내경이다.

다음으로 유체의 연속방정식(continuity equation)을 구하기 위해 Fig. 1(a)의 검사체적을 생각하면, 이 검사체적은 파이프가 움직이고 늘어남과 동시에 같이 움직이거나 늘어나며 파이프의 굽힘 변형에 의한 기울기가 작을때 접선 방향의 파이프의 속도는 파이프의 축방향의 속도 $\partial u/\partial t$ 와 같다. 따라서 이 검사체적의 연속방정식은

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left[\rho A \left(c - \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right] \delta x = \frac{D'}{Dt} (\rho A \delta x) \quad (7)$$

이며, 여기서 $\frac{D'}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x}$ 이다. 식 (7)을 전개하여 다시 쓰면,

$$\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{c}}{c} + c_x = 0 \quad (8)$$

이 된다. 유체는 압축성이고 관벽은 늘어날 수 있으므로 이때 유체의 체적 탄성계수 K 는

$$K = \rho \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} \quad (9)$$

인 밀도와 압력의 관계로써 표현되고, 단면변화는 유체의 압력이 파이프의 벽면에 작용할때 파이프 벽의 변형관계식으로 부터.

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{p}D}{e} \quad (10)$$

가 되며, e 는 파이프의 두께, p 는 유압이다. 식 (9)와 식(10)을 식(8)에 대입하여 정리하면,

$$cH_x + H_t + \frac{a^2}{g} c_x = 0 \quad (11)$$

의 연속방정식을 얻을 수 있다. 여기서 a 는 유체의 파동속도(wave speed)를 의미하고 그 표현식은 아래와 같다.

$$a = \sqrt{\frac{R/\rho}{1 + \left[\frac{K}{E} \right] \left[\frac{D}{e} \right]}}$$

따라서 유속과 압력이 시간과 위치의 함수로 주어지는 유동, 즉 비정상 유체가 흐르는 파이프계의 운동 지배방정식은 식(3), (4), (6) 그리고 식(11)의 4개의 식으로 표현되며, 유체의 유동상태와 파이프의 동적거동을 동시에 고찰할 수 있는 운동방정식을 얻었다. 유체와 관련된 식(6)과 식(11)에서 대류항(convective term)은 유체의 유동해를 구하는데 큰 영향을 주지않는 작은값⁽¹⁶⁾이기 때문에 본 논문의 해석에서는 무시하기로 한다.

3. 안정성 해석

기존의 연구^(11,12)들에서는 유속을 정상 진동 유동(steady oscillatory flow)으로 가정하여 안정성 해석을 수행하였으나, 실제의 경우 유속이 위치와 시간의 함수이고, 또한 유체의 압력과 연관되어 있다. 따라서 본 연구에서는 유도된 지배 운동방정식을 이용하여 안정성해석을 수행함으로써 기존의 연구 결과와 비교 분석하고, 굴곡된 파이프계의 안정성을 유한요소법을 이용하여 해석하였다.

3.1 직선 파이프계의 안정성 해석

기존의 안정성해석 결과와 비교하기 위하여 같은 형태의 파이프 모델 Fig. 2를 설정하였다. Fig. 2의 파이프 모델은 단순지지된 직선 파이프로써 한쪽 끝에 저수조(reservoir)가, 다른 끝에는 밸브가 달려있다. 밸브를 이용하여 유속을 $c = c_0 + c_D \cos \omega t$ 로 조절한다. 여기서 ω 는 밸브에 의해 조절되는 유량이고, 또한 저수조의 수두는 H_0 로 일정하다.

파이프가 횡방향 운동만을 하고 유동이 비점성이라 가정하여, 무차원 변수를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{v}{\ell}, \quad \bar{x} = \frac{x}{\ell}, \quad \bar{c} = \left[\frac{m_f}{EI} \right]^{1/2} \ell c \\ \Omega &= \left[\frac{m_f + m_p}{EI} \right]^{1/2} \ell^2 \omega, \\ \tau &= \left[\frac{EI}{m_f + m_p} \right]^{1/2} \frac{t}{l_2} \\ \beta &= \frac{m_f}{m_f + m_p} \quad \bar{a} = \left[\frac{m_f + m_p}{EI} \right]^{1/2} \ell a \\ \bar{p} &= \frac{m_f}{EI} \ell^2 gH \end{aligned} \quad (12)$$

정의된 무차원 변수를 이용해 지배방정식을 다음과 같이 무차원 지배방정식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} + \bar{c}^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \left[\beta^{1/2} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \tau} + \bar{c} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{x}} \right] \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \\ + 2\beta^{1/2} \bar{c} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial \tau} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \tau^2} \\ + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[\bar{p} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right] = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \beta^{1/2} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \tau} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \tau} + \beta^{1/2} a^2 \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{x}} = 0 \quad (15)$$

파이프 모델 Fig. 2의 유동조건으로부터, 식(14), (15)의 무차원 압력과 유속의 해는 다음과 같이 주어진다.

$$\bar{p} = \bar{p}_0 - \delta \sin \eta \bar{x} \sin \Omega \tau \quad (16)$$

$$\bar{c} = \bar{c}_0 - \varepsilon \cos \eta \bar{x} \cos \Omega \tau \quad (17)$$

여기서

$$\bar{p}_0 = \frac{m_f}{EI} \ell^2 gH_0, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \frac{\bar{c}_0}{\cos \eta}$$

$$\bar{c}_0 = \left[\frac{m_f}{EI} \right]^{1/2} \ell c_0, \quad \bar{c}_D = \left[\frac{m_f}{EI} \right]^{1/2} \ell c_D$$

$$\delta = \varepsilon_0 \frac{\beta^{1/2} \bar{a} \bar{c}_0}{\cos \eta}$$

$$\eta = \frac{\Omega}{\bar{a}}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\bar{c}_D}{\bar{c}_0}$$

이다. 식(16), 식(17)의 δ 와 ε 를 살펴보면, $\cos \eta$

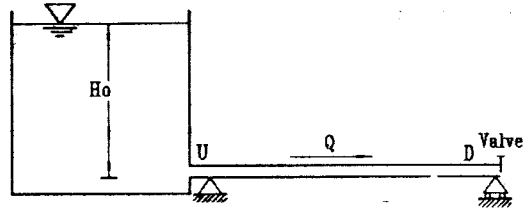


Fig. 2 A pipe model considered in the present study

$= 0$ 일때, 즉 $\frac{Q}{a} = \frac{k\pi}{2}$ (k 는 홀수)일때, 유체는 공진 현상을 일으킴을 알 수 있다.

식(13)의 근사해는 단순지지보의 모드를 중첩하여 표현하면, 다음과 같이 된다.

$$\bar{w}(\bar{x}, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(\tau) \phi_n(\bar{x}) \quad (18)$$

여기서 $\phi_n(\bar{x}) = \sqrt{2} \sin n\pi\bar{x}$ ($n=1, 2$)이고 단순지지보의 정규모드이다.

식(16), (17)과 식(18)을 식(13)에 대입하여 정리한 후, ϕ_m ($m=1, 2$)를 곱하여 구간 $0 \leq \bar{x} \leq 1$ 에 대하여 적분하면 아래와 같은 일반적인 형태의 방정식을 구할 수 있다.

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = 0 \quad (19)$$

식(19)의 행렬식에서 $[M]$ 은 상수항만을 $[C]$ 와 $[K]$ 는 상수항과 주기함수를 포함하고 있으므로 Mathieu-Hill 형태의 방정식이며, 안정성 해석은 Floquet이론⁽¹⁴⁾을 이용하여 Bolotin⁽¹⁵⁾에 의해 제시되었다. 이 방법의 해 주기 $2T$ 와 T 의 주기해에 대한 안정과 불안정 영역의 경계 방정식을 얻을 수 있다.

식(19)로부터 제1차 불안정(primary instability) 영역의 경계를 구하기 위하여 주기 $2T$ 의 주기해

$$\{q\} = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[\{a_k\} \sin \frac{k\Omega\tau}{2} + \{b_k\} \cos \frac{k\Omega\tau}{2} \right] \quad (20)$$

를 식(19)에 대입한 후 $\sin \frac{k\Omega\tau}{2}$ 와 $\cos \frac{k\Omega\tau}{2}$ 의 계수들을 영(zero)으로 놓으면 $\{a_k\}$ 와 $\{b_k\}$ 에 대한 대수방정식을 얻게되며, 이 대수방정식이 근을 갖기 위해 determinant가 영(zero)이 되어야 한다. 또

한 이 determinant 값은 Bolotin⁽¹⁵⁾이 수렴함을 증명하였다. 따라서 근사적으로 $k=1$ 인 경우에 대하여 다음의 경계방정식을 얻을 수 있다.

$$|G_{ij}|=0 \quad (i, j=1, 2) \quad (21)$$

같은 방법으로, 식 (19)의 제2차 불안정 (secondary instability) 영역의 경계를 구하기 위해, 주기 T 의 주기해

$$\begin{aligned} \{q\} &= \frac{1}{2} \{b_0\} \\ &+ \sum_{k=2,4,6}^{\infty} \left[\{a_k\} \sin \frac{kQ\tau}{2} + \{b_k\} \cos \frac{kQ\tau}{2} \right] \end{aligned} \quad (22)$$

를 식 (19)에 대입하면, 제2차 불안정 영역의 경계 방정식을 근사적으로 $k=2$ 인 경우에 대하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$|H_{ij}|=0 \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (23)$$

불안정 영역의 경계방정식 (21)과 (23)의 각 무차원 변수의 변화가 안정성에 미치는 영향을 밸브 조절 주파수와 유속비의 관계로 고찰하였다. 본 연구에서는 기존의 연구 결과와 비교하기 위하여 첫째 압력의 변동은 고려하지 않고 유속이 단순히 시간만의 함수인 Chen⁽¹¹⁾의 경우 (case 1), 둘째 압력의 변동은 고려하지 않고 유속만이 시간과 위치의 함수인 경우 (case 2), 셋째 압력과 유속이 모두 시간과 위치의 함수로 본 연구에서 유도된 경우 (case 3)에 대하여 세가지 경우를 동시에 Fig. 3에 도시하였다. Fig. 3의 가로축은 무차원 변동 유속의 크기 c_0 와 무차원 평균유속의 비, 즉 유속비 ϵ_0 로 나타내고 세로축은 무차원 변동주파수와 단순지지의 무차원 기본고유 진동수의 비로써 표현하였다. 유동해석을 하지 않고 유속만을 단순히 시간만의 함수로 한 경우 (case 1)와 압력의 변동은 고려치 않고 유속을 위치와 시간의 함수로 고려하여 해석한 경우 (case 2)는 Fig. 3의 결과에서와 같이 차이가 거의 없다. 그러나 유동해석을 통하여 유압과 유속이 시간과 위치의 함수인 본 연구의 경우 (case 3)는 유압과 유속이 상호연관되어 변동하므로 불안정 영역이 크게 나타난다. 따라서 파이프 내부를 흐르는 유체에 의한 파이프의 안정성해석은 유동해

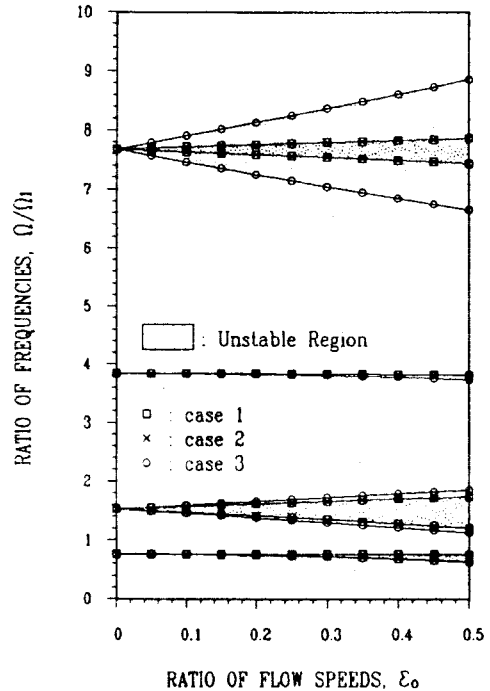


Fig. 3 Instability boundaries in case of $\bar{c}_0=2.0$
 $\bar{p}_0=0, \beta=0.3, \bar{a}=600, \Omega_1=9.8696$

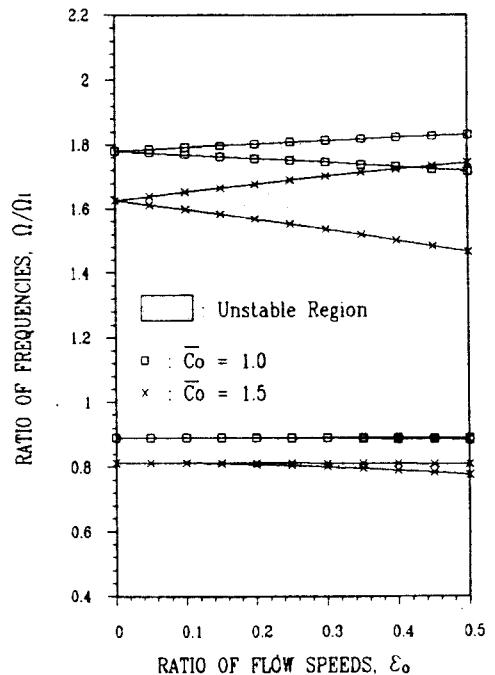


Fig. 4 Instability boundaries in case of $\bar{p}_0=1.0$
 $\beta=0.3, \bar{a}=600, \Omega_1=9.8696$

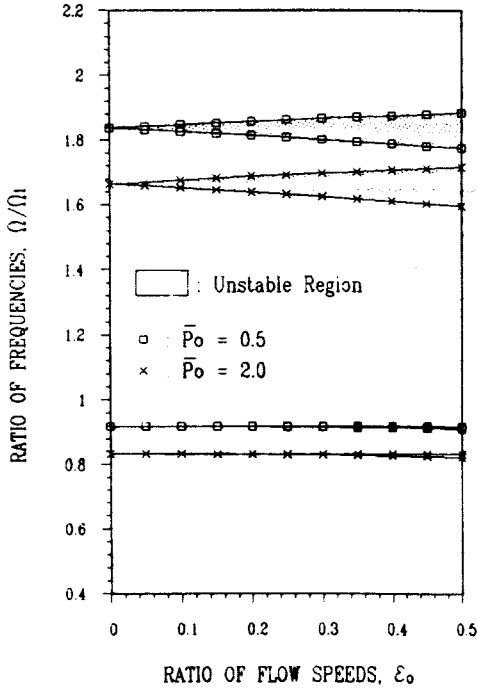


Fig. 5 Instability boundaries in case of $\bar{c}_o=1.0$, $\beta=0.3$, $\bar{a}=600$, $\Omega_1=9.8696$

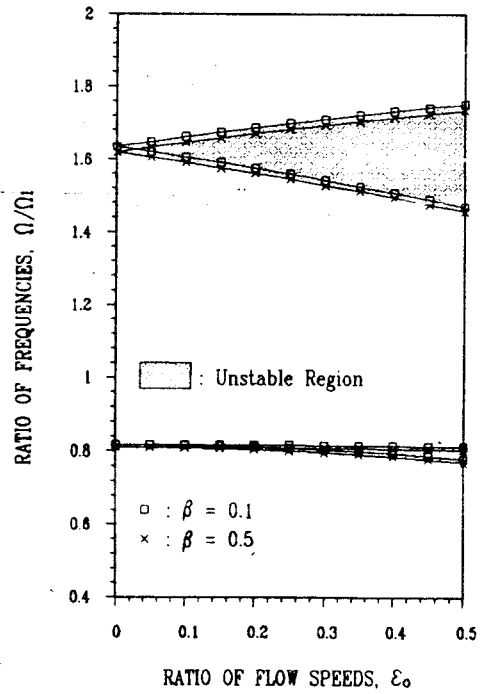


Fig. 7 Instability boundaries in case of $\bar{c}_o=1.5$, $\bar{P}_o=1.0$, $\bar{a}=600$, $\Omega_1=9.8696$

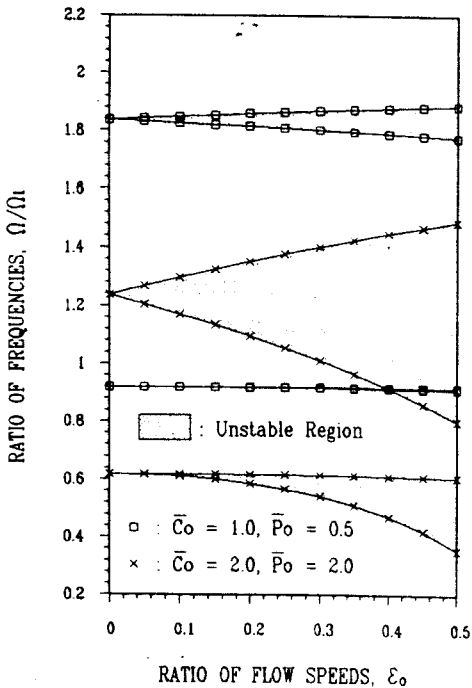


Fig. 6 Instability boundaries in case of $\beta=0.3$, $\bar{a}=600$, $\Omega_1=9.8696$

석을 통하여 수행되어야 하며, 이는 실제 파이프계를 설계하는 관점에서 주목할 만한 점이다.

이와같은 해석방법을 이용하여 평균유속 및 평균압력이 파이프의 안정성에 미치는 영향을 Fig. 4, 5, 6에 나타내었다. Fig. 4는 평균 유속만을 변화시킨 결과로서, 평균유속이 증가할수록 불안정 영역은 커지고 파이프계의 고유진동수는 작아진다. 유속이 더욱더 크게 증가하여 임계속도에 도달할때, 계의 고유진동수는 영(zero)이 되어 좌굴이 일어난다. Fig. 5과 같이 평균압력을 변화시켜 보면 불안정영역의 크기는 변하지 않으며 파이프계의 고유진동수는 작아진다. Fig. 6는 평균 압력과 유속을 모두 변화시킨 결과를 도시하였다. Fig. 7는 질량비 β 의 영향, 즉 코리올리력의 영향을 의미하여 계의 고유진동수를 약간 변화시킬 뿐 그 영향이 작다.

3.2 굴곡된 파이프계의 안정성 해석

앞에서의 해석방법을 이용하여, 3차원 공간상에 여러개의 직선 파이프가 강성이 큰 elbow로 연결되어 굴곡된 파이프 속을 유체가 흐르는 파이프계에 대한 안정성해석을 다루었다. 파이프 상부에는

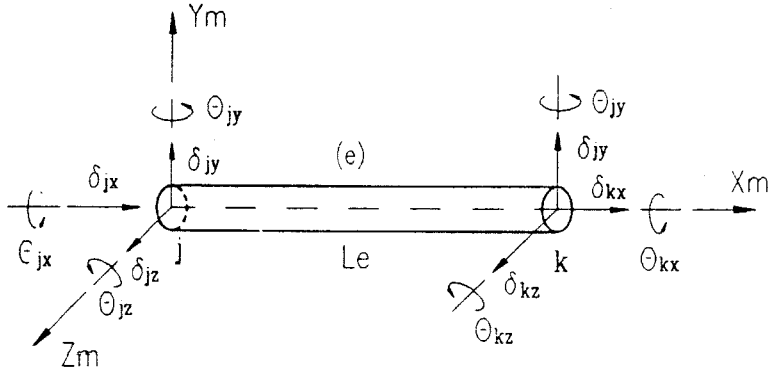


Fig. 8 Finite element model

큰 저장탱크가 달려있어 그 압력은 일정하고, 하부에는 유속을 $c_0 + c_0 \cos \omega t$ 로 조절할 목적으로 밸브가 달려있다. 한편 엘보우의 크기는 직선 파이프의 길이에 비해 작다고 하여 이상화하였으며 유체의 점성 및 중력에 의한 압력의 변화는 무시하였다.

유한요소법을 적용하기 위해 굴곡된 파이프계는 여러개의 유한요소로 구성되고, Fig. 8은 파이프 유한요소에 대한 모델을 보여주고 있다. 운동방정식은 한 요소(element)에 대하여 Fig. 8의 변위벡터로 표현되며, 또한 절점 j 와 k 사이를 흐르는 유속과 압력이 먼저 구해져야 한다. 따라서 식(6)과 식(11)에서 유속을 평균유속과 변동유속으로 그리고 수두를 평균수두와 변동수두로 분리하면 변동유속과 변동수두에 관한 두개의 식을 얻게 되고 두 식에서 수두항을 소거하면 변동유속 \bar{c} 에 대한 파동방정식(wave equation)을 다음과 같이 얻게 된다.

$$a^2 \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial t^2} = 0 \tag{24}$$

변동유속 \bar{c} 와 변동수두 \bar{h} 는

$$\bar{c} = [1 - \frac{x^2}{L_e^2}, \frac{x^2}{L_e^2}] \{c_e(t)\},$$

$$\{c_e\} = [\bar{c}_j, \bar{c}_k]^T \tag{25}$$

$$\bar{h} = [1 - \frac{x}{L_e}, \frac{x}{L_e}] \{h_e(t)\},$$

$$\{h_e\} = [\bar{h}_j, \bar{h}_k]^T \tag{26}$$

과 같이 형상함수⁽¹⁷⁾를 이용해 표현할 수 있으며,

식(24)에 식(25)와 식(26)을 이용하여 Galerkin 방법을 적용하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{Le}{15} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\bar{c}}_j \\ \ddot{\bar{c}}_k \end{Bmatrix} + \frac{4a^2}{3Le} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{c}_j \\ \bar{c}_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g\ddot{\bar{h}}_j \\ g\ddot{\bar{h}}_k \end{Bmatrix} \tag{27}$$

파이프의 밸브를 $\cos \omega t$ 의 조화함수로 조절하므로 유속(c_e)와 수두(h_e)는

$$\{c_e\} = \begin{Bmatrix} c_j \\ c_k \end{Bmatrix} \cos \omega t \quad \{h_e\} = \begin{Bmatrix} h_j \\ h_k \end{Bmatrix} \sin \omega t \tag{28}$$

와 같으며 이를 식(27)에 대입하여 정리하면, 두 절점에서의 유속과 수두의 관계를 전달행렬 $[T]$ 로써 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} c_j \\ h_j \end{Bmatrix} = [T]_{jk} \begin{Bmatrix} c_k \\ h_k \end{Bmatrix} \tag{29}$$

여기서 $[T]_{jk}$ 는 절점 j 와 k 에 대한 전달행렬이다. 이 전달행렬 방법에 의하여 구하여진 각 절점에서의 c 와 h 는 변동 유속과 변동 압력의 크기이므로, 두 절점 사이에 흐르는 유체의 총 유속과 수두는 평균량과의 합으로 표현되고 이때 수두를 압력으로 표현하여 두 절점 사이의 유속과 유압은 다음과 같이 구하여진다.

$$c = c_0 + [1 - \frac{x^2}{Le^2}, \frac{x^2}{Le^2}] \begin{Bmatrix} c_j \\ c_k \end{Bmatrix} \cos \omega t \tag{30}$$

$$p = p_0 + [1 - \frac{x}{Le}, \frac{x}{Le}] \begin{Bmatrix} p_j \\ p_k \end{Bmatrix} \sin \omega t \tag{31}$$

한편 식(4)의 T 는 파이프의 굴곡된 부분에서 유체의 운동량변화에 의하여 발생하는 힘인데, 이 힘은⁽¹²⁾에서 제시된 방법에 의해 구해지며, 굴곡된 부분에서의 유속이 $c_a = c_0 + c_s \cos \omega t$, 압력이 $p_a = p_0 + p_s \cos \omega t$ 이고 굴곡각이 α_e 일때 다음과 같이 된다.

$$T = (T_0 + T_1 \cos \omega t + T_2 \sin \omega t + T_3 \cos 2\omega t) / (1 + \cos \alpha_e) \quad (32)$$

여기서

$$T_0 = m_f (c_0^2 + \frac{1}{2} c_s^2) + A p_0,$$

$$T_1 = 2 m_f c_0 c_s,$$

$$T_2 = A p_s, \quad T_3 = \frac{1}{2} m_f c_s^2$$

3차원 공간상에 굴곡된 파이프계를 다루기 위해, 파이프의 비틀림은 유체의 영향을 받지 않는 것으로 가정한 파이프의 비틀림 방정식, 식(3)과 식(4) 그리고 식(4)와 같은 형태의 Fig. 8의 z_m 방향의 굽힘방정식 각각의 변위 ϕ, u, v, w 를 형상함수(shape function)를 이용하여 다음과 같이 가정한 다.

$$\begin{aligned} \phi(x, t) &= [N_1(x)] \{\Phi_e(t)\} \\ u(x, t) &= [N_1(x)] \{u_e(t)\} \\ w(x, t) &= [N_2(x)] \{w_e(t)\} \\ v(x, t) &= [N_2(x)] \{v_e(t)\} \end{aligned} \quad (33)$$

여기서 $\{\Phi_e(t)\}, \{u_e(t)\}, \{w_e(t)\}$ 와 $\{v_e(t)\}$ 는 하나의 유한요소에 대한 변위벡터들로서, Fig. 8의 변위 표현을 사용하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \{\Phi_e(t)\} &= \{\theta_{jx}, \theta_{kx}\}^T \\ \{u_e(t)\} &= \{\delta_{jk}, \delta_{kx}\}^T \\ \{w_e(t)\} &= \{\delta_{jz}, \theta_{jy}, \delta_{kz}, \theta_{ky}\}^T \\ \{v_e(t)\} &= \{\delta_{jy}, \theta_{jz}, \delta_{ky}, \theta_{kz}\}^T \end{aligned} \quad (34)$$

그리고 형상함수 $[N_1]$ 은 1차 함수이며, $[N_2]$ 는 3차 함수이다.

식(3), 식(4)와 비틀림식 그리고 z_m 방향의 변형방정식에 식(30), 식(31), 식(32) 그리고 식(33)

Table 1 Material properties of piping system

Young's modulus	$1.2411 \times 10^{11} \text{N/m}^2$
Shear modulus	$4.6097 \times 10^9 \text{N/m}^2$
Inner diameter of pipe	$1.725 \times 10^{-2} \text{m}$
Outer diameter of pipe	$1.905 \times 10^{-2} \text{m}$
Mass of pipe per unit length	0.459kg/m
Mass of fluid per unit length	0.234kg/m
Fluid wave speed	$1.3 \times 10^3 \text{m/sec}$
Mean fluid pressure	0 N/m ²
Mean flow velocity	30m/sec

를 대입하여 Galerkin방법으로 유한요소에 대하여 적용하면 국부좌표에 대한 유한요소 운동방정식을 얻는다. 변환행렬을 이용하여 국부좌표상의 행렬들을 전체좌표로 표현하고 합성하여 파이프의 경계조건을 대입하면 다음과 같은 비제차 Mathieu-Hill 형태의 운동방정식을 최종적으로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} [M]\{\delta\} + [[L] + [D] \cos \omega t] \{\dot{\delta}\} \\ + [[K_A] + [K_B] \cos \omega t + [K_C] \sin \omega t \\ + [K_E] \cos 2\omega t] \{\delta\} = \{F\} \end{aligned} \quad (37)$$

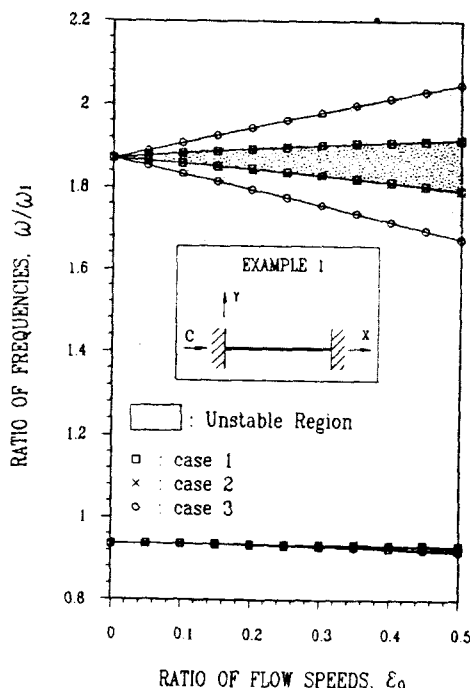


Fig. 9 Instability boundaries of example 1; $\omega_1 = 76.9 \text{ rad/s}$

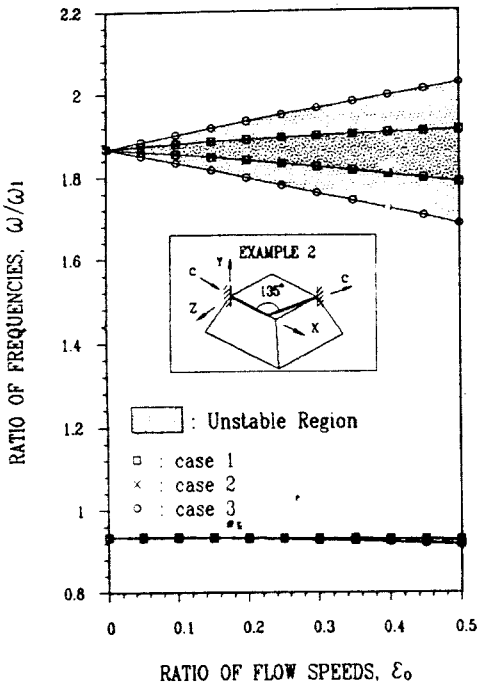


Fig. 10 Instability boundaries of example 2; $\omega_1=76.9$ rad/s

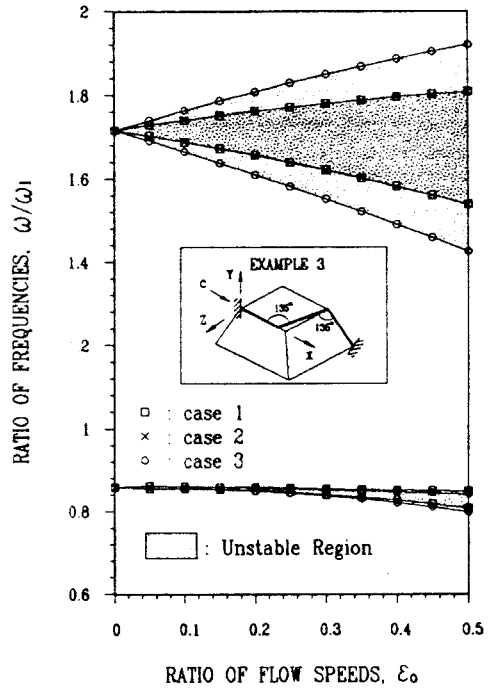


Fig. 11 Instability boundaries of example 3; $\omega_1=76.9$ rad/s

안정성 해석을 앞에서와 같은 방법으로 행하여 제1차 불안정영역의 경계와 제2차 불안정영역의 경계에 대한 조건식을 얻을 수 있다. 본 연구에서 수행한 안정성 해석결과를 앞에서와 같은 방법으로 case 1, 2, 3의 세 경우를 함께 표시하여 비교할 수 있도록 하였으며, 사용 data는 Table 1과 같다. Fig. 9, 10, 11을 통하여 볼때, 유속만을 고려한 case 1, 2보다 유속과 그에 따른 압력의 영향을 고려한 경우가 불안정영역이 훨씬 크며, 제1차 불안정영역이 제2차 불안정영역보다 훨씬 큼을 알 수 있다. 또한 유속이 작으면 불안정 영역은 작아지나 파라미터의 변화에 따른 공진현상이 발생한 가능성이 있으며 파동속도와 밸브조절 주파수의 영향에 따라서 불안정 영역이 크게 될 수도 있다.

4. 결 론

본 연구에서 얻은 결론을 정리하면 다음과 같다.

(1) 내부 유동을 포함한 파이프계의 해석에 대한 기존의 연구에서 아직 다루지 않은 유속과 유압이 시간과 위치의 함수로 주어지는 유체 특성을 고려

한 파이프계의 운동 방정식을 얻었다.

(2) 기존의 안정성해석 결과와 본 연구의 결과를 비교한 결과, 유속에 의해 야기된 압력의 변동이 파이프계의 안정성에 비교적 큰 영향을 미침을 알 수 있었으며, 그 영향은 제1차 불안정영역에서 더 큼을 알 수 있었다.

(3) 파이프 내부를 흐르는 비정상 유동을 해석할 때 유체의 파동속도, a 의 영향을 고려해야 하는데, 이 값이 밸브를 조절하는 주파수 Ω 와 일정한 비 $\frac{\Omega}{a} = \frac{k\pi}{2}$ ($k=1, 3, 5, \dots$)일때 유체는 공진현상을 일으키며, 이 때에 파이프계는 불안정해진다. 또한 이 비값이 $\frac{k\pi}{2}$ 에 가까울수록 파이프의 불안정영역은 증가한다.

(4) 실제 많은 파이프계는 3차원 공간상에 설치된 굴곡된 현상을 가지고 있으므로, 이러한 파이프계의 동특성을 해석하기 위하여 유한요소법을 이용한 수학적 모델을 개발하였으며, 이를 이용하여 몇가지 형태의 파이프 모델에 대한 안정성해석을 수행하였다.

후 기

본 연구는 한국 원자력 연구소의 위탁연구로 수행되었으며, 관계자 여러분에게 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

- (1) Ashley, H. and Haviland, G., 1950, "Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid," *Journal of Applied Mechanics*, Trans. ASME, Vol. 72, pp.229~232.
- (2) Housner, G.W., 1952 "Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 19, pp.205~209.
- (3) Benjamin, T.B., 1961, "Dynamics of a System of a Articulated Pipes Containing Fluid, Part I and II," *Proc. of Roy. Soc. (London)*, Ser. A261, pp.457~486.
- (4) Gregory, R.W. and Paidoussis, M.P., 1966, "Unstable Oscillation of Tubular Cantilevers Conveying Fluid-I Theory," *Proc. of Roy. Soc. (London)*, A293, pp.512~527.
- (5) Gregory, R.W. and Paidoussis, M.P., 1966, "Unstable Oscillation of Tubular Cantilevers Conveying Fluid-II Experiments," *Proc. of Roy. Soc. (London)*, A293, pp.528~542.
- (6) Unny, T.E., E.L. Martin and Dubey, R.N. 1970. "Hydroelastic Instability of Uniformly Curved Pipe-Fluid System," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 37, pp.617~622.
- (7) Chen, S.S., 1972, "Vibration and Stability of a Uniformly Curved Tube Conveying Fluid," *Journal of Acoustical Soc. of America*, Vol. 51, pp.223~232.
- (8) Chen, S.S., 1973, "Out-of-Plane Vibration and Stability of Curved Tube Conveying Fluid," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 40, pp.362~368.
- (9) Hill, J.L. and Davis, C.G., 1974, "The Effect of Initial Forces on the Hydroelastic Vibration and Stability of Planar Curved Tubes," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 41, pp.355~359.
- (10) Pak, C.H., Hong, S.C. and Kim, T.R., 1991, "Out-of-Plane Vibration of Angled Pipes Conveying Fluid," *Korean Nuclear Society*, Vol.23, To be Appared.
- (11) Chen, S.S., 1971, "Dynamic Stability of a Tube Conveying Fluid," *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Proc. of ASCE, Vol. 97, pp.1469~1485.
- (12) Pak, C.H., Yun, Y.S., Hong, S.C. and Kim, T.R., 1989, "On the Parametrically Excited Vibration of a Three Dimensionally Curved Piping System Containing Pulsating Flow," *Proceedings of International Symposium on Pressure Vessel Technology and Nuclear Codes & Standards*, Sec. 4, pp.20~31.
- (13) Wylie, E.B. and Streeter, V.L., 1982, *Fluid Transients*, Feb. Press.
- (14) Magnus, W. and Winkler, S., 1966, *Hill's Equation*, Dover Publications Inc.
- (15) Bolotin, V.V., 1964, *The Dynamic Stability of Elastic Systems*, Holden Day Inc.
- (16) Streeter, V.L., 1972, "Unsteady Flow Calculations by Numerical Methods," *Journal of Basic Engineering*, Trans. ASME, pp.457~466.
- (17) Krandestuncer, H., 1987, *Finite Element Handbook*, McGraw-Hill Co.