

〈技術論文〉

플라이휠의 새로운 설계 해석

김 재 호* · 신 영 재**

(1991년 2월 7일 접수)

A New Design Analysis of Flywheel

Chae Ho Kim and Young Jae Shin

Key Words : Profit and Loss Work(양 및 부의 일), Flywheel(플라이휠), Equivalent Mass Moment of Inertia(등가 질량 관성 모멘트), Angular Velocity Fluctuation(각속도 변동), Working Torque(작동 토크), Load Torque(부하 토크)

Abstract

In rotating machines, fluctuation of rotational velocity is an important problem. Control of the fluctuation is achieved mainly by flywheels with sufficient mass moment of inertia. The control, however, is not complete in general. This paper performs the dynamic analysis of flywheel rigorously and suggests a new design method of the flywheel which can control the angular velocity fluctuation under the allowance of fluctuation more closely than the flywheel by the conventional design method. Performances of flywheels designed by both the conventional and the newly suggested methods are displayed by computer simulation for comparison.

1. 서 론

변동토크가 작용하는 내연기관, 왕복펌프, 공기 압축기 등의 기계에 설치된 플라이휠은 운동에너지를 축적 혹은 방출함으로써 1사이클중의 토크가 역 방향으로 작용하는 경우에도 회전을 가능하게 하고, 또 큰 각속도의 변동을 일으키지 않도록 하여 운전을 원활하게 한다. 그러나 이 변동토크는 1사이클중에 방향이 변하고, 또 그 크기가 평균토크보다 크게 혹은 작게 됨으로 크랭크축의 순간적인 각속도는 항상 변동한다⁽¹⁻⁴⁾. 1사이클 동안 발생하는 기계 기구의 파라미터의 변화와 작동시 저항 및 작용력의 변화로 생기는 계의 양 및 부의 일(profit and loss work)에 의한 크랭크축의 각속도 변동의 정확한 해석은 기계 기구가 고속화, 경량화 및 정

밀화 될수록 매우 중요하게 된다. 그러나 기존 플라이휠의 설계에서는 토크의 변화에 의해 생기는 크랭크의 각속도 변동과 계의 등가 질량 관성모멘트를 일정한 것으로 가정하여 플라이휠을 설계하기 때문에 주어진 허용 각속도 변동률을 만족하지 못하는 경우가 있다.

본 논문에서는 기계 기구의 각속도 변동을 줄이는데 사용되는 플라이휠을 운동에너지의 법칙을 이용하여 해석하고, 주어진 허용 각속도 변동률을 정확히 만족하는 플라이휠의 크기를 결정하는 새로운 방법을 제시하였다. 또한 수치 해석을 통하여 본 해석방법에 의해 설계된 플라이휠과 종래 방법에 의한 플라이휠의 성능을 비교하였다.

2. 플라이휠의 기존 설계 방법

Fig. 1은 슬라이더-크랭크기구에 의한 동력전달 기계기구의 개략도이다. 여기서 M 과 M_L 은 출력토

* 정회원, 경북대학교 공과대학 기계공학과

** 정회원, 대구공업전문대학 자동차과

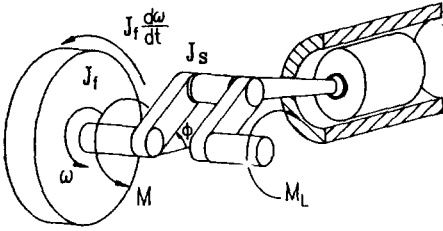


Fig. 1 Schematic diagram of slider crank and flywheel

크 및 부하토크이고, J_f 는 플라이휠의 질량 관성모멘트이다. ϕ 와 ω 는 크랭크의 각변위와 각속도이다.

크랭크축의 운동방정식은 식 (1)과 같다^(3,5).

$$J_f \frac{d\omega}{dt} = M - M_L \quad (1)$$

식 (1)의 양변에 $\omega dt = d\phi$ 를 곱하면 식 (2)와 같이 된다.

$$J_f \omega d\omega = (M - M_L) d\phi \quad (2)$$

크랭크의 각속도 ω 가 최대 ω_{ma} 및 최소 ω_{mi} 로 되는 크랭크의 각 위치 ϕ_{ma} , ϕ_{mi} 를 적분의 하한과 상한으로 하여 식 (2)를 적분하면 식 (3)을 얻는다.

$$\int_{\phi_{ma}}^{\phi_{mi}} (M - M_L) d\phi = \int_{\omega_{ma}}^{\omega_{mi}} J_f \omega d\omega \\ = J_f (\omega_{mi}^2 - \omega_{ma}^2) / 2 \quad (3)$$

평균 각속도가 ω_a , 허용 각속도 변동률(allowable angular velocity fluctuation)을 δ 라고 하면 ω_{ma} 와 ω_{mi} 는

$$\omega_{ma} = \omega_a (1 + \delta/2), \quad \omega_{mi} = \omega_a (1 - \delta/2) \quad (4)$$

로 표현된다.

식 (3)과 (4)로부터,

$$J_f = -\frac{1}{\delta \omega_a^2} \int_{\phi_{ma}}^{\phi_{mi}} (M - M_L) d\phi \quad (5)$$

식 (5)중의 ϕ_{ma} 와 ϕ_{mi} 의 값은 $(M - M_L)$ 과 ϕ 와 표측이 부의 최대면적을 이루는 구간에서 $(M - M_L) = 0$ 을 만족하는 ϕ 값중, 작은 것을 ϕ_{ma} 로, 큰 것을 ϕ_{mi} 로 한다. 식 (5)의 적분식을 풀어 플라이휠의 질량 관성모멘트 J_f 를 구한다^(1,3,5).

이상이 플라이휠의 크기를 결정하는 종래의 일반적인 방법이다.

3. 플라이휠의 새로운 설계 방법

외력에 의한 일은 계의 운동에너지의 증가와 같으므로 다음식을 얻는다.

$$(M - M_L) d\phi = d(J\omega^2/2) \quad (6)$$

여기서 J 는 계의 등가 질량 관성모멘트 J_s 와 플라이휠의 질량 관성모멘트 J_f 의 합이다. J 는 일반적으로 크랭크의 각변위 ϕ 의 함수이다.

각위치 ϕ_{ma} , ϕ_{mi} 를 적분의 하한과 상한으로 하여 식 (6)을 적분하면 식 (7)을 얻는다.

$$\int_{\phi_{ma}}^{\phi_{mi}} (M - M_L) d\phi = \frac{J_{mi} \omega_{mi}^2}{2} - \frac{J_{ma} \omega_{ma}^2}{2} \\ = \frac{(J_{smi} + J_f) \omega_{mi}^2 - (J_{sma} + J_f) \omega_{ma}^2}{2} \quad (7)$$

여기서 J_{ma} 와 J_{mi} 는 ω 가 ω_{ma} 및 ω_{mi} 일때의 플라이휠을 포함한 계의 등가 질량 관성모멘트이다. 그리고 $J_{sma} (= J_{ma} - J_f)$ 와 $J_{smi} (= J_{mi} - J_f)$ 는 각각 ω_{ma} 및 ω_{mi} 에 대응하는 플라이휠을 제외한 계의 등가 질량 관성 모멘트들이다.

식 (4)와 (7)로부터,

$$J_f = \frac{1}{2\delta} \left[J_{smi} (1 - \frac{\delta}{2})^2 - J_{sma} (1 + \frac{\delta}{2})^2 \right] \\ - \int_{\phi_{ma}}^{\phi_{mi}} \frac{(M - M_L)}{\delta \omega_a^2} d\phi \quad (8)$$

상기의 식 (8)이 본 논문에서 제안하는 방법의 의해 플라이휠의 질량 관성 모멘트 J_f 를 결정하는 방정식이다. 식 (8)의 J_f 를 구하기 위해서는 ϕ_{ma} 와 ϕ_{mi} 의 값을 알아야 된다. ϕ_{ma} 를 적분의 하한으로 하여 식 (6)을 적분하면 식 (9)로 된다.

$$\int_{\phi_{ma}}^{\phi} (M - M_L) d\phi = \frac{J\omega^2}{2} - \frac{(J_{sma} + J_f) \omega_{ma}^2}{2} \quad (9)$$

식 (9)로부터

$$\omega^2 = \frac{2}{J} \left[\int_{\phi_{ma}}^{\phi} (M - M_L) d\phi + \frac{(J_{sma} + J_f) \omega_{ma}^2}{2} \right] \quad (10)$$

ω^2 을 극대 및 극소로 하는 크랭크의 각변위 ϕ_{ma} 및 ϕ_{mi} 는 다음의 식 (11)을 만족한다.

$$\frac{d(\omega^2)}{2d\phi} = \left[J(M - M_L) - \left\{ \int_{\phi_{ma}}^{\phi} (M - M_L) d\phi + \frac{(J_{sma} + J_f) \omega_{ma}^2}{2} \right\} \frac{dJ}{d\phi} \right] / J^2 = 0 \quad (11)$$

플라이휠의 질량 관성모멘트 J_f 는 크랭크의 각변위 ϕ 에 대해 일정하므로 $dJ/d\phi = d(J_s + J_f)/d\phi = dJ_s/d\phi$ 가 된다. 그러므로 식 (11)은 식 (12)와 같이 표현된다.

$$J(M - M_L) - \left[\int_{\phi_{ma}}^{\phi} (M - M_L) d\phi + \frac{(J_{sma} + J_f) \omega_{ma}^2}{2} \right] \frac{dJ_s}{d\phi} = 0 \quad (12)$$

식 (4)와 (8)을 식 (12)에 대입하면

$$\left[J_s + \frac{1}{2\delta} \left[J_{smi} \left(1 - \frac{\delta}{2} \right)^2 - J_{sma} \left(1 + \frac{\delta}{2} \right)^2 \right] - \int_{\phi_{ma}}^{\phi_{mi}} \frac{(M - M_L)}{\delta \omega_a^2} d\phi \right] (M - M_L) - \left[\int_{\phi_{ma}}^{\phi} (M - M_L) d\phi - \frac{(1 + \delta/2)^2}{2\delta} \int_{\phi_{ma}}^{\phi_{mi}} (M - M_L) d\phi + \frac{\omega_a^2 (1 - \delta^2/4)^2}{4\delta} (J_{smi} - J_{sma}) \right] \frac{dJ_s}{d\phi} = 0 \quad (13)$$

식 (13)의 ϕ 대신에 ϕ_{ma} 혹은 ϕ_{mi} 를 대입하여 정리하면 ϕ_{ma} 와 ϕ_{mi} 를 구하는 방정식이 다음과 같이 각각 구하여 진다.

$$M(\phi_{ma}) - M_L(\phi_{ma}) - \frac{\omega_a^2 (1 + \delta/2)^2}{2} \frac{dJ_s}{d\phi}(\phi_{ma}) = 0 \quad (14)$$

$$M(\phi_{mi}) - M_L(\phi_{mi}) - \frac{\omega_a^2 (1 - \delta/2)^2}{2} \frac{dJ_s}{d\phi}(\phi_{mi}) = 0 \quad (15)$$

상기의 식 (14)와 (15)는 비선형 방정식이므로 수치해석에 의해 ϕ_{ma} 와 ϕ_{mi} 의 값을 구할 수 있다. 등가 질량 관성모멘트 J_s 가 일정하다고 가정하면 $dJ_s/d\phi=0$, 즉 식 (14)와 (15)는 $(M - M_L)=0$ 이 된다.

4. 수치 해석 및 고찰

본 논문에 제안된 방법의 적용 실례로서 2사이클 기관 슬라이더-크랭크기구의 개략적인 그림을 Fig. 2에 나타냈다. 크랭크와 커넥팅 로드의 길이는 각

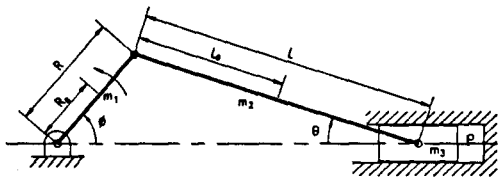


Fig. 2 Schematic diagram of the slider-crank mechanism

Table 1 Inertia properties and mechanism parameters

Body	Mass (kg)	Moment of inertia (kgfcm ²)	Length (cm)	Center of mass (cm)
Crank	2.26	54.4	7.62	3.86
Connecting rod	3.36	480	28.6	14.3
Piston	2.72	60.0	8.10	4.05

각 R 과 L 이고, 각각의 질량중심까지의 길이는 R_c 와 L_c 이다. 그리고 각 기계요소의 질량 관성모멘트와 기구학적 파라미터들을 Table 1에 나타냈다.

본 모델에 작용하는 작동 토크 (working torque) $(M - M_L)$ 은 관성력, 작용부하(압력) 및 마찰력 등이 포함된 것으로서, Fig. 3과 같이 가정한다.

전체 계의 크랭크 회전축에 관한 등가 질량 관성모멘트 J_s 는 크랭크의 각변위 ϕ 의 함수로서 다음 식으로 표현된다.

$$J_s(\phi) = J_1 + m_1 R_c^2 + k^2 J_2 + m_2 (R^2 \sin^2 \phi + 2L_c k/L + L_c^2 k^2) + m_3 (k+1)^2 R^2 \sin^2 \phi \quad (16)$$

여기서 m_1 , m_2 와 m_3 은 각각 크랭크, 커넥팅 로드와 피스톤의 질량, J_1 과 J_2 는 각각 크랭크와 커넥팅 로드의 질량 중심에 관한 질량 관성모멘트이다. 그리고 $k = R \cos \phi / (L^2 - R^2 \sin^2 \phi)^{1/2}$ 이다.

본 방법에 의한 플라이휠의 설계 해석을 종래의 방법과 비교 검토하기 위하여 크랭크의 평균회전속도 $\omega_a = 1200$ RPM, 허용 각속도 변동률 $\delta = 1/60$ 인 플라이휠을 설계하기로 한다^(2,3,5).

플라이휠의 종래 설계방법에 의한 ϕ_{ma} 와 ϕ_{mi} 값은 $(M - M_L)=0$ 을 만족하는 ϕ 로서 $\phi_{ma} = 167.1^\circ$ 와 $\phi_{mi} = 278.1^\circ$ 이다. 이 값들과 Fig. 3의 작동 토크를 식 (5)에 대입하여 종래 설계방법에 의한 플라이휠의 질량 관성모멘트 J_f 를 구하면 $J_f = 1.787 \text{ kgf} \cdot \text{m}$ 가 된다.

본 방법에 의한 플라이휠의 질량 관성모멘트를 구하기 위해서는 식 (16)을 ϕ 에 대하여 1차 미분한 $dJ_s/d\phi$ 와 작동 토크를 식 (14)와 (15)에 대입

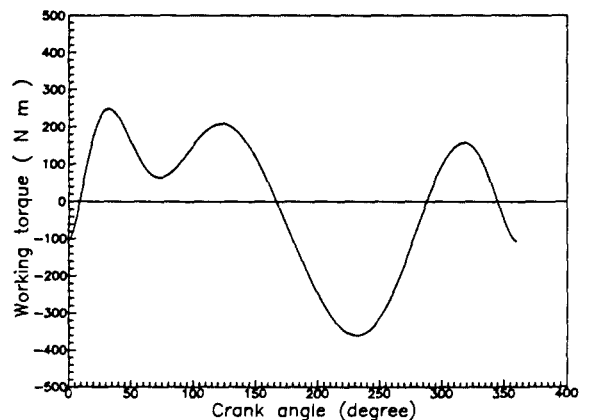


Fig. 3 Working torque of the system

하여 수치해석으로 각속도 제곱 ω^2 을 최대 및 최소로 하는 ϕ 를 구한다. 그 계산결과 $\phi_{ma}=171.7^\circ$ 와 $\phi_{mi}=278.2^\circ$ 이다. 이 값들과 Fig. 3의 작동 토크를 식 (8)에 대입하면 본 방법에 의한 플라이휠의 질량 관성모멘트 J_f 는 2.5782 kgf·m로 구해진다.

상기의 두 방법을 비교해 보면 본 방법의 경우가 종래 설계방법보다 ϕ_{ma} 는 약 4.6° 정도 적고 ϕ_{mi} 는 큰 변화가 없다. 그리고 본 방법에 의한 플라이휠의 질량 관성모멘트가 종래 방법의 것보다 약 31.4% 정도 크다.

Fig. 4에는 본 해석에 의한 플라이휠의 설계방법과 종래의 플라이휠 설계방법의 결과를 비교하기 위하여 크랭크의 각변위 ϕ 에 대한 크랭크의 각속도 변동을 나타냈다. 그 결과 크랭크의 전 각변위에서 종래의 설계방법에 의해 결정된 플라이휠이 부착된 경우는 최대 각속도 변동률이 설계조건으로 주어진 허용 각속도변동률 $\delta=1/60$ 보다 훨씬 큰 δ

$\cong 1/40$ 로 되었지만, 본 해석에 의한 플라이휠이 부착된 경우는 각속도의 최대 변동률이 $\delta \cong 1/60$ 로서 설계조건을 만족하고 있다.

그러므로 본 해석에 의한 플라이휠이 부착된 경우는 주어진 허용 각속도 변동률을 만족하면서 운동을 하게 되지만, 종래의 설계방법에 의한 경우는 주어진 허용 각속도 변동률의 범위를 훨씬 벗어나 회전함을 알 수 있다.

5. 결 론

기계 기구의 각속도 변동을 줄이는데 사용되는 플라이휠의 설계에서 주어진 허용 각속도 변동률을 정확히 만족하는 플라이휠의 크기를 결정하는 새로운 방법을 제시하였다. 수치 해석을 통하여 본 해석방법에 의해 설계된 플라이휠과 종래 방법에 의한 플라이휠의 성능을 비교한 결과 본 방법에 의한 플라이휠이 부착된 경우는 주어진 허용 각속도 변동률을 잘 만족하면서 회전하지만, 종래의 방법에 의한 경우는 주어진 허용 각속도 변동률의 범위를 훨씬 벗어나 회전함을 알 수 있었다.

참 고 문 헌

- (1) Matin, G. H., 1982, "Kinematics and Dynamics of Machines", McGraw-Hill, pp.385~392.
- (2) 鄭善謨, 1976, "機械 設計學(上)", 東明社, pp.432~439.
- (3) Mabie, H. H. and Reinholtz, C. F., 1987, "Mechanisms and Dynamics of Machinery", John Wiley & Sons Inc., pp.456~462.
- (4) 朴榮祖, 1987, "機械 設計", 晉成文化社, pp.471~476.
- (5) Spotts, M. F., "Machine Elements", Prentice-Hall, pp.559~562.

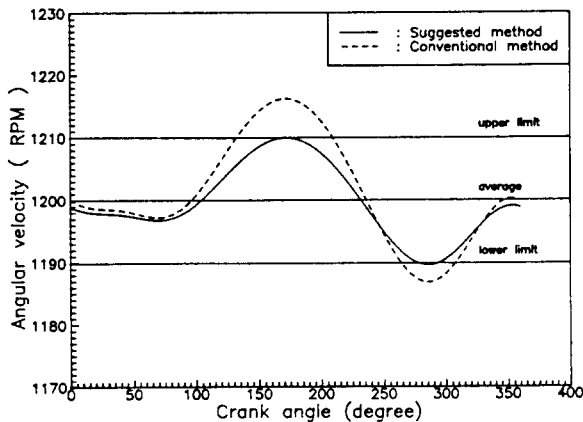


Fig. 4 Performance comparison of flywheels by suggested and conventional method