

(論 文)

下向流動 領域에서 傾斜 等溫平面에 의하여 惹起된 定常狀態 自然對流의 多重解

劉甲鐘* · 李澤植** · 趙承煥***

(1991年 2月 20日 接受)

Multiple Solutions for Steady State Natural Convection adjacent to an Inclined Isothermal Flat Plate in the Region of Largely Downflow

Kap Jong Riu, Taik Sik Lee and Seung Hwan Cho

Key Words : Natural Convection(自然對流), Multiple Steady State(多重定常狀態), Similarity Analysis(相似解析), Inclined Isothermal Flat Plate(傾斜等溫平面), Cold Water(低溫의 물)

Abstract

This study has been performed on multiple steady state natural convection in the downflow region induced by inclined isothermal plate surface immersed in pure cold water. The governing equation with boundary conditions are solved numerically by using code BOUNDS. BOUNDS is a multiple shooting code, employing the Bulirsh-Stoer rational extrapolation algorithm for solutions initial value problems. The results are as follows : First, as the inclined angles increases, the ranges of multiple steady state region decrease. Second, as the inclination angle increases, the velocity boundary layer, thermal boundary layer and buoyant boundary layer increase along the downstream. Third, as the inclination angle increase, mean Nusselt number decrease. And in the range of the region, the ratio of Nusselt numbers increases as free stream temperatures increase but constants with inclination angle.

기 호 설 명

C_p : 定壓比熱, $J/(kg \cdot ^\circ C)$
 f : 無次元 流動函數
 G : $4(Gr_x/4)^{1/4}$
 Gr_x : 局所 Grashof 數, $(gx^3/\nu^2)\alpha|T_o - T_\infty|^q$
 g : 重力加速度, m/s^2
 g_x : 重力加速度的 x 方向 성분, m/s^2
 g_y : 重力加速度的 y 方向 성분, m/s^2

h : 平均熱傳達係數 $\cdot W/(m^2 \cdot ^\circ C)$
 h_x : 局所熱傳達係數 $\cdot W/(m^2 \cdot ^\circ C)$
 k : 熱傳導率 $\cdot W/(m \cdot ^\circ C)$
 L : 試片의 길이, m
 Nu : 平均 누셀트數
 Nu_x : 局所 누셀트數
 p_m : 局所動壓力, $kg/(m \cdot s^2)$
 P_m : 無次元 局所動壓力
 Pr : 플란틀 數
 q : 密度式의 指數
 R : 密度最大 파라미터, $(T_m - T_\infty)/(T_o - T_\infty)$
 T : 溫度, $^\circ C$

* 正會員, 慶北大學校 工科大學 機械工學科

** 名譽會員, 서울大學校 工科大學 機械工學科

*** 正會員, 慶北大學校 大學院

u	: x 方向의 速度成分, m/s
v	: y 方向의 速度成分, m/s
W	: 無次元 局所浮力
x	: 전단에서부터 等溫面을 따른 下流方向의 距離
y	: 等溫面에서 垂直方向의 距離
α	: 密度式의 係數, $(^\circ\text{C})^{-1}$
β	: 壓力勾配係數
η	: 無次元길이, $yG/4x$
θ	: 等溫面의 傾斜角
ν	: 動粘性係數, m^2/s
ρ	: 密度, kg/m^3
ϕ	: 局所無次元 溫度, $(T - T_\infty)/(T_0 - T_\infty)$

참 자

m	: 최대 밀도점
o	: 等溫試片面
∞	: 周圍流體

1. 서 론

低溫의 流體속에서 일어나는 自然對流은 自然環境과 工業에서 흔히 볼 수 있다. 特히 同一한 物理的인 因子와 境界條件下에서 서로 다른 두 種類 以上の 流動형태나 熱傳達形態가 發生되는 多重定常狀態를 包含하는 現象은 自然科學이나 工業에서 매우 重要視되어 지고 있다. 이에 대한 研究中에는 다음과 같은 것이 있다. Stewartson⁽¹⁾은 wedge 위 흐름에서 壓力勾配係數(β)가 $-0.1988 < \beta < 0$ 領域에서 두 개의 解가 存在하며, $-0.5 < \beta < 0$ 에서 多重解가 存在할 可能性이 있다는 理論證明을 처음으로 發表하였다. Cebeci와 Keller⁽²⁾는 $-0.198851 < \beta < 1$ 領域에서 parallel shooting 方法을 使用하여 求한 多重解가 Stewartson이 얻은 값과 一致하는 것을 確認하였다. Saitoh⁽³⁾는 水平열음 실린더 周圍에서 일어나는 自然對流 現象에 관한 研究에서 두 개의 解가 얻어질 수 있음을 暗示하였다. Zandbergen과 Dijkstra⁽⁴⁾는 回轉平板上에서 回轉하는 流體에 관한 研究中 同一條件 下에서 Navier-Stokes 運動方程式의 解가 唯一解가 아닌 두개 以上の 相異한 解를 求하였다. Lentini와 Keller⁽⁵⁾는 Rossby數, 즉 디스크의 角速度에 대한 周圍流體의 角速度의 比가 零인 kármán swirling 흐름에 관해 解析的인 方法으로 多重解를 求하였다

다. Turcotte, Spence와 Bau⁽⁶⁾는 粘性消散과 壓力에 의한 일을 隨伴하는 垂直水路內에서 부시네스크 流體(Boussinesq fluid)의 垂直流動에 관한 研究에서 無次元熱흐름 變數의 값에 따라 多重解를 얻었다. El-Henawy 등⁽⁷⁾은 停止된 低溫의 물속에 垂直 等溫平面이 잠겨 있을때, 周圍 물에서 일어나는 流動과 周圍 물에서 等溫面으로 일어나는 熱傳達을 COLSYS⁽⁸⁾와 BOUNDS⁽⁹⁾로 計算하여 上向流動 領域에서는 $4.7504^\circ\text{C} \leq T_\infty \leq 4.7887^\circ\text{C}$, 下向流動 領域에서는 $5.6895^\circ\text{C} \leq T_\infty \leq 7.7335^\circ\text{C}$ 에서 多重解를 얻었다. 以上과 같이 多重定常狀態를 糾明하기 위하여 많은 研究가 活潑하게 進行되고 있다. EL-Henawy 등⁽⁷⁾은 下向流動中 多重定常領域에서 BOUNDS로 垂直에 대해서만 解를 求하였다.

本 論文은 下向流動領域에서 垂直面으로부터 傾斜角이 60° 以下인 傾斜等溫面이 低溫의 물속에 잠겨 있을때 일어나는 多重定常狀態 領域을 밝혀내고, 이 領域에서 傾斜角이 熱傳達, 溫度分布, 速度分布, 浮力分布 및 누셀트 數에 미치는 影響을 究明하였다. 또 解析方法은 이제까지 發表된 研究結果와 比較檢討하기 위하여 既存 論文에서와 같이 相似解析을 使用하였다.

2. 理論解析

2.1 支配方程式

Fig. 1은 傾斜된 等溫平面의 幾何學的인 係의 概要圖이다.

x 는 전단에서부터 等溫面에 나란한 方向의 거리

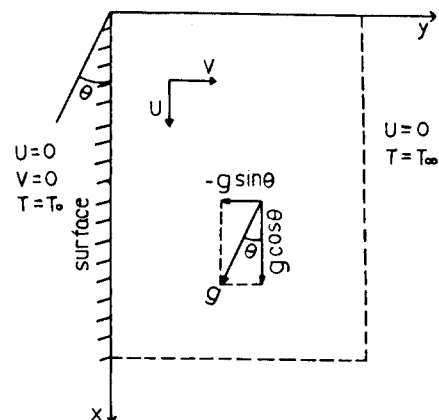


Fig. 1 Schematic diagram of an inclined plate and boundary conditions

이고, y 는 等溫面에서 垂直方向의 거리이며, θ 는 等溫面이 重力의 作用 方向과 이루는 角이다. 下向 流動에서는 等溫面의 上端이 전단, 즉 $x=0$ 이고, 重力加速度的 x 方向과 y 方向의 成分은 (+)이다. 一般的인 Navier-Stokes 方程式과 에너지方程式을 單純化하여 等溫面에 의한 自然對流 現象을 解析하기 위하여 다음과 같은 몇가지 假定을 하였다.

- (1) 流動은 二次元 定常層流이다.
- (2) 溫度差에 의한 密度變化를 除外한 流體의 모든 物理的 性質은 一定하다.
- (3) 粘性消散, 壓縮性 效果, 輻射熱傳達은 無視한다.

위의 假定과 Boussinesq 近似를 이 系에 適用하면 支配方程式들은 二次元定常層流流動方程式으로 표시되고, 浮力과 局所動壓力 p_m 으로 나타내면 支配方程式들은 다음과 같다[參考文獻 (7) 參照].

- (1) 連續 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

- (2) 運動量 方程式

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_m}{\partial x} + g_x F(T, T_\infty) + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_m}{\partial y} + g_y F(T, T_\infty) + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

- (3) 에너지 方程式

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

Fig. 1에 表示된 바와 같이 低溫의 物속에서 傾斜 等溫面이 잠겨 있을 때 境界條件은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u(x, \infty) = 0 \\ v(x, 0) &= 0 \\ T(x, 0) - T_o &= T(x, \infty) - T_\infty = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

물의 密度 ρ 는 Gebhart와 Mollendorf⁽¹⁰⁾의 研究 結果인 다음 式을 使用하였다.

$$\rho(T) = \rho_m [1 - \alpha (T - T_m)^q] \quad (6)$$

식 (6)에서 T_m 은 물의 密度가 最大가 되는 溫度이고, ρ_m 은 最大密度이다. 標準大氣壓力下에서 순수 물의 T_m 은 4.029325°C이고, 순수 물의 ρ_m 은 999.9720 kg/m³이다. 또한 係數 α 는 9.297173 × 10⁻⁶ (°C)^{-q}이고, 指數 q 는 1.894816이다.

式 (2) 및 式 (3)의 浮力 $g_x F(T, T_\infty)$ 와 $g_y F(T, T_\infty)$ 는 다음과 같이 된다[參考文獻 (10) 參照].

$$g_x F(T, T_\infty) = (+g \cos \theta) \alpha |T_o - T_\infty|^q \cdot (|\phi - R|^q - |R|^q) \quad (7)$$

$$g_y F(T, T_\infty) = (-g \sin \theta) \alpha |T_o - T_\infty|^q \cdot (|\phi - R|^q - |R|^q) \quad (8)$$

위의 式 (7), (8)에서 局所無次元 溫度 ϕ 와 密度 最大 파라미터 (density extremum parameter) R 은 다음과 같이 定義하였다.

$$\phi = \frac{T - T_\infty}{T_o - T_\infty}, \quad R = \frac{T_m - T_\infty}{T_o - T_\infty} \quad (9)$$

支配方程式 (1), (2), (3) 및 (4)를 相似解析하기 위하여 相似變數 η , 局所Grashof數 Gr_x , Grashof數 G 를 參考文獻 (7)과 같이 定義하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{yG}{4x}, \quad G = 4 \left(\frac{Gr_x}{4} \right)^{1/4}, \\ Gr_x &= \frac{g_x^3}{\nu^2} \alpha |T_o - T_\infty|^q \end{aligned} \quad (10)$$

또한 流動函數 φ 와 局所動壓力 P_m 을 다음과 같이 定義하였다.

$$\varphi(x, y) = \nu G f(\eta), \quad P_m = \frac{\rho \nu^2 G^2 P_m}{(4x)^2} \quad (11)$$

위의 式 (11)의 $f(\eta)$ 는 η 의 函數이다. 새로운 獨立變數 η 와 從屬變數 f 및 ϕ 로서 x 方向速度 u 와 y 方向速度 v 를 나타내면 다음과 같다.

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\nu G^2 f'(\eta)}{4x} \quad (12)$$

$$v = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\nu G}{4x} (3f - \eta f') \quad (13)$$

위의 式 (12), (13)에서 '은 $\partial/\partial \eta$ 를 表示한다. 새로운 變數들로서 式 (2), (3) 및 (4)를 變換하면 다음과 같다.

x 方向 運動量 方程式

$$\begin{aligned} 2(f'')^2 - 3ff'' &= \frac{2P_m + P_m'}{G^2} + f''' \\ &+ (|\phi - R|^q - |R|^q) \cos \theta \\ &+ \frac{-4f' + \eta f'' + \eta^2 f'''}{G^2} \end{aligned} \quad (14)$$

y 方向 運動量 方程式

$$\begin{aligned} 9ff' - \eta(f'')^2 - 3\eta ff'' &= -P_m' + \eta f''' - f'' \\ &- (|\phi - R|^q - |R|^q) G \sin \theta \\ &+ \frac{-15f - 9\eta f' + 6\eta^2 f'' + \eta^3 f'''}{G^2} \end{aligned} \quad (15)$$

에너지方程式

$$\phi'' + 3Prf\phi' + \frac{\eta^2 \phi'' + 5\eta \phi'}{G^2} = 0 \quad (16)$$

물의 α 는 $9.3 \times 10^{-6} (\text{C})^{-1}$ 이고 물의 ν 는 $1.67 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{sec}$ 이며, g 가 $9.81 \text{m}/\text{sec}^2$ 일 때 식 (14), (15) 및 (16)의 G^2 의 값은 다음과 같다.

$$G^2 = 45800 |T_o - T_\infty|^{9/2} x^{3/2} \quad (17)$$

$x \geq 0.02 \text{m}$ 이고, $T_o - T_\infty = 1^\circ\text{C}$ 일 때에도 G^2 의 값은 매우 크므로 식 (14), (15) 및 (16)의 항들 중 G^{-2} 를 포함하는 항은 無視하고, 整理하면 다음과 같다[參考文獻 (7) 參照].

$$f''' = -(|\phi - R|^q - |R|^q) \cos \theta + 2(f')^2 - 3ff'' \quad (18)$$

$$P_m' = 3\eta(f')^2 - 9ff' - f'' + (|\phi - R|^q - |R|^q) \cdot (-G \sin \theta - \eta \cos \theta) \quad (19)$$

$$\phi'' = -3Prf\phi' \quad (20)$$

式 (5)의 境界條件을 새로운 變數들로서 變換하면 다음과 같다.

$$u(x, 0) = \frac{\nu G^2}{4x} f'(0) = 0 \quad \therefore f'(0) = 0$$

$$v(x, 0) = \frac{\nu G \eta}{4x} f'(0) - \frac{3\nu G}{4x} f(0) = 0 \quad \therefore f(0) = 0$$

$$u(x, \infty) = \frac{\nu G^3}{4x} f'(\infty) = 0 \quad \therefore f'(\infty) = 0$$

$$T(x, 0) = T_\infty + (T_o - T_\infty) \phi(0) = T_o \quad \therefore \phi(0) = 1$$

$$T(x, \infty) = T_\infty + (T_o - T_\infty) \phi(\infty) = T_\infty \quad \therefore \phi(\infty) = 0$$

위의 結果들을 整理하면 다음과 같다.

$$f(0) = f'(0) = f'(\infty) = 1 - \phi(0) = \phi(\infty) = 0 \quad (21)$$

局所 無次元浮力 W , 局所 누셀트 數 Nu_x 및 平均누셀트 數 Nu 는 다음과 같이 定義하였다.

$$W = [|\phi - R|^q - |R|^q] \cos \theta \quad (22)$$

$$Nu_x = \frac{h_x \cdot x}{k} = -\frac{\phi'(0)}{\sqrt{2}} Gr_x^{1/4} \quad (23)$$

$$Nu = \frac{1}{L} \int_0^L Nu_x dx \quad (24)$$

式 (18)과 (20)은 非線型常微分 聯立方程式이며, 境界條件 (21)과 함께 二點境界值問題가 된다. Diekhoff 等⁽¹¹⁾, EL-Henawy 等⁽⁷⁾과 Deuffhard⁽⁹⁾는 境界值 問題를 Bulirsch-Stoer rational extrapolation algorithm⁽¹²⁾을 適用한 multiple shooting 方法인 code BOUNDS을 使用한 結果, 計算上 많은 長點이 있는 것을 發見하였다. 그래서 本 計算에서도 BOUNDS를 使用하였다. 支配方程式 (18)과 (20) 및 境界條件 (21)을 multiple shooting에 使

用하는 벡터 形態로 表示하면 다음과 같다.

$$y' = g(y) \quad (25)$$

$$y = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ f' \\ f'' \\ \phi \\ \phi' \\ R \end{Bmatrix}$$

$$y' = \begin{Bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \\ y_5' \\ y_6' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ [\pm (|y_4 - y_6|^q - |y_6|^q) \cos \theta + 2y_2^2 - 3y_1y_3] \\ y_5 \\ -3Pr y_1 y_5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$G = \begin{Bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_2(\infty) \\ 1 - y_4(0) \\ y_4(\infty) \\ y_5(0) - \phi'(0) \end{Bmatrix} = 0 \quad (26)$$

위의 式 (25) 및 (26)에서 $\phi'(0)$ 을 固定시키고 未知數 R 과 境界條件 $R' = 0$ 을 添加시켰다. $\phi'(0)$ 을 0.01程度로 增加시키면서 바로 전에 求한 값을 初期值로 하여 連續的으로 計算하였다. $\phi'(0)$ 가 매우 작은 값에서는 0.00001씩 增加시켰다.

물의 物性值는 Kukulka⁽¹³⁾의 研究結果를 利用하였다. 특히 多重定常狀態領域을 求하기 위하여 플란틀 數를 11.6으로 하여 相異解를 計算하였다. 이 값은 下向流動中 多重解의 領域인 $T_\infty = 7^\circ\text{C}$ 와 $T_o = 0^\circ\text{C}$ 일 때 熱境界層內의 물의 溫度를 위의 두 값의 平均값 3.5°C 로 하여 求한 것이다. 이것은 參考文獻 (7)에서도 이 값을 使用하였으므로 比較考察하는 데에도 便利하도록 하였다. 等溫平面의 溫度 $T_o = 0^\circ\text{C}$ 이고, 最大 Grashof 數는 10^8 정도이다. 計算領域은 垂直과 傾斜角이 $30^\circ, 45^\circ$ 및 60° 이고, 計算機는 CDC Cyber 170-815를 使用하였고, CPU 時間은 3000초 程度 所要되었다.

3. 結果 및 考察

本 研究에서는 計算過程의 信濼性을 얻기 위하여 垂直等溫平面에 대한 結果와 EL-Henawy 等^(7,14)의 結果와 同一條件下에서 一致하는 것을 確認한 後

모든 計算을 遂行하였고, 計算時 수렴치를 얻을 수 있는 相似變數 η_∞ 의 값은 100~300으로 充分한 값을 取하였다.

Table 1은 傾斜角이 30°, 45° 및 60°일 때 求한 相似解를 表示한 것이다.

Fig. 2는 Table 1에서 熱傳達率 $-\phi'(0)$ 에 대한 R 의 變化를 表示한 것이다.

코(nose)의 윗 部分은 θ 와 R 이 增加하면 $-\phi'$

(0)도 增加하며, 코의 아래 部分은 θ 및 R 이 增加하면 $-\phi'(0)$ 는 減少한다. 垂直 및 傾斜 等溫面이 停止된 低溫의 물 속에 잠겨 있을 때는 T_o 와 T_m 이 一定하므로 코의 윗 部分은 T_∞ 가 增加하면 熱傳達이 增加하고 θ 가 增加하면 熱傳達이 減少하고, 코의 아래 部分은 T_∞ 가 增加하면 熱傳達이 減少하고 θ 가 增加하면 熱傳達이 減少한다.

Fig. 3은 質量流動率 $f(\infty)$ 에 대한 R 의 變化를 그림으로 表示한 것이다.

코의 아래 部分은 Fig. 2의 코 윗 部分에서 求한 값이고, 코의 윗 部分은 Fig. 2의 코 아래 部分에서 求한 값이다. 두 部分 모두 η_∞ 에서 R 이 增加하

Table 1 Solution data at $Pr=11.6$ and $q=1.894816$ computed by continuation with respect to $-\phi'(0)$ in the region of largely downflow

$-\phi'(0)$	R			
	0°	30°	45°	60°
0.97	0.44984	0.47988	0.53109	0.65017
0.54	0.29295	0.29415	0.29672	0.30406
0.52	0.29218	0.29307	0.29489	0.30058
0.50	0.29197	0.29228	0.29340	0.29756
0.49	0.29196	0.29202	0.29280	0.29624
0.46	0.29250	0.29208	0.29199	0.29352
0.42	0.29463	0.29363	0.29258	0.29199
0.38	0.29834	0.29688	0.29507	0.29282
0.34	0.30361	0.30180	0.29942	0.29592
0.30	0.31043	0.30839	0.30561	0.30119
0.26	0.31897	0.31679	0.31377	0.30876
0.22	0.32927	0.32704	0.32391	0.31861
0.18	0.34158	0.33940	0.33631	0.33098
0.16	0.34861	0.34649	0.34346	0.33822
0.14	0.35631	0.35427	0.35136	0.34627
0.12	0.36480	0.36286	0.36009	0.35524
0.10	0.37422	0.37242	0.36983	0.36529
0.08	0.38482	0.38318	0.38083	0.37669
0.06	0.39700	0.39557	0.39351	0.38987
0.04	0.41157	0.41040	0.40870	0.40571
0.03	0.42029	0.41927	0.41780	0.41520
0.02	0.43064	0.42981	0.42861	0.42648
0.01	0.44423	0.44363	0.44277	0.44125
0.005	0.45362	0.45362	0.45299	0.45189

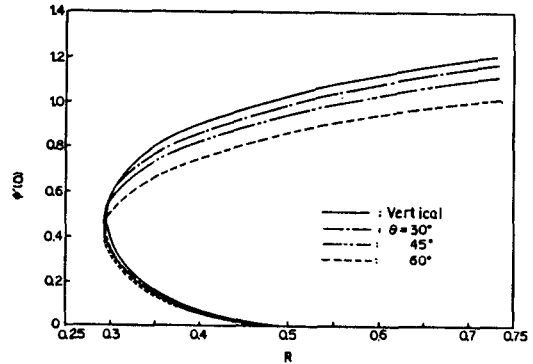


Fig. 2 The variation of heat-transfer rate $-\phi'(0)$ with R , using similarity

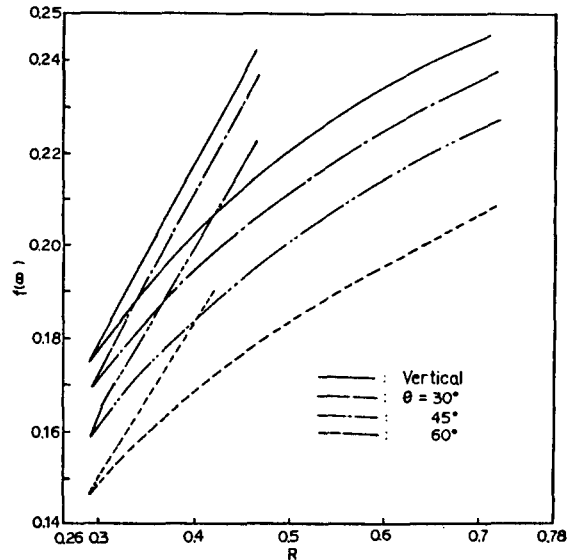


Fig. 3 The variation of mass flow rate $f(\infty)$ with R , using similarity

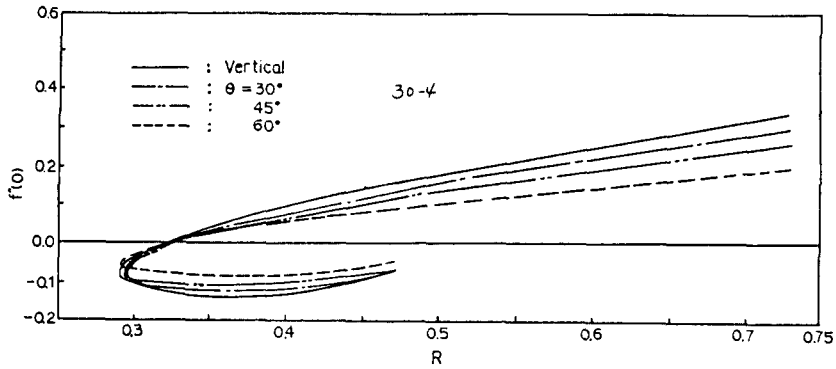


Fig. 4 The variation of shear $f''(0)$ with R , using similarity

면 v 가 增加한다. 그러나 兩部分의 $f(\infty)$ 는 相當한 差異를 나타낸다.

Table 2는 $-\phi'(0)$ 를 10^{-4} 까지 計算하였을 때 두개의 相似解를 求한 領域을 表示한 것이다.

傾斜角이 增加하면 多重定常狀態의 領域이 좁아진다.

Fig. 4는 試片面에서의 無次元剪斷應力을 나타낸 것이다.

코의 上部分에서는 溫度가 增加할수록 試片面에서 剪斷應力이 增加하고 傾斜角이 增加하면 減少하고 있다. 코의 下部分에서는 溫度가 增加하면 陰의 方向으로 若干 增加하다가 減少하며, 傾斜角이 增加하면 陰의 方向으로 減少하고 있다. 코의 上部分 中 $R=0.325$ ($T_\infty=5.96^\circ\text{C}$) 附近부터 코까지와 코의 下部分은 $f''(0)$ 가 $-$ 이므로 試片面 가까이에서 逆流가 發生한다. 이 값은 Carey 等⁽¹⁵⁾의 研究結果와 一致한다.

Fig. 5는 $T_0=0^\circ\text{C}$, $T_\infty=7^\circ\text{C}$ 인 경우 대표적인 거리로 $x=0.043023\text{m}$ 에서 垂直 및 $\theta=30^\circ, 45^\circ$ 및 60° 일 때 y 에 따른 溫度分布를 나타낸 것이다. Fig. 2에서 코의 上부분에 해당하는 값을 "small", 下부분에 해당하는 값을 "large"로 나타내었다.

Table 2 The ranges of multiple steady state regions, using similarity

θ	R	T_∞ ($^\circ\text{C}$)
0°	0.29180672-0.47898126	5.68954848-7.73355100
30°	0.29180681-0.47885589	5.68958450-7.73169056
45°	0.29181165-0.47868603	5.68962338-7.72917090
60°	0.29182619-0.47839181	5.68974020-7.72481160

벽면에서의 溫度勾配는 傾斜角이 增加할수록, 下流로 갈수록 減少하나 溫度境界層의 두께는 增加한다. 이것은 熱傳達의 減少를 意味한다.

Fig. 6은 $T_0=0^\circ\text{C}$, $T_\infty=7^\circ\text{C}$, $x=0.043023\text{m}$ 에서 垂直 및 $\theta=30^\circ, 45^\circ$ 및 60° 일 때 y 에 따른 無次元 浮力分布이다.

浮力이 發生하는 境界層은 Fig. 5에 表示되는 溫度境界層과 一致하고 있다.

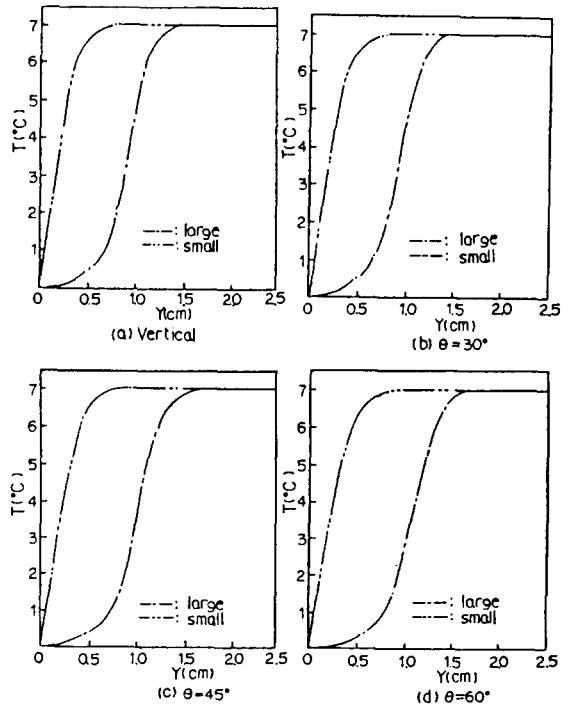


Fig. 5 Temperature profiles for different inclined angles at $x=0.043023\text{ m}$ and $T_\infty=7.0^\circ\text{C}$

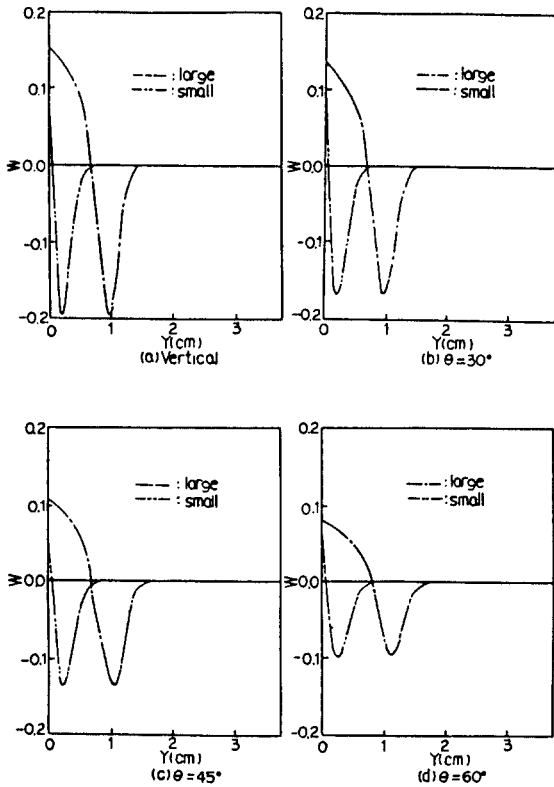


Fig. 6 Buoyancy force profiles for different inclined angles at $x=0.043023$ m and $T_{\infty}=7.0^{\circ}\text{C}$

이것은 浮力이 溫度만의 函數로 表示되기 때문이다. 傾斜角이 增加할수록 浮力境界層의 두께는 增加하며, 浮力の 絕對값은 減少하고 있다. 이는 重力加速度的 x 方向成分은 傾斜角이 增加하면 減少하고 浮力은 反重力方向으로 作用하기 때문이다. x 가 增加해도 浮力の 絕對값의 最大值는 거의 一定하다. 이는 x 가 增加하여도 溫度境界層 內에서 浮力이 最大가 되는 溫度의 位置는 移動하여도 값은 같기 때문이다. $\phi'(0)$ 가 작을 때에는 等溫面 附近에서는 浮力の 값은 (+)이고, 大部分의 浮力場에서는 (-)값이다. 이러한 性向으로부터 等溫面 附近에서는 上向流動이 일어나고 大部分의 領域에서는 下向流動이 일어나는 것을 豫測할 수 있다. 이 性向은 垂直일 境遇 Carey 等⁽¹⁵⁾의 研究結果와 一致한다. $\phi'(0)$ 가 클 때에는 等溫面 附近에서 相當히 넓은 領域까지 浮力은 (+)값이고, 멀리 떨어진 部分에서는 浮力이 (-)값이다. 이것으로 速度

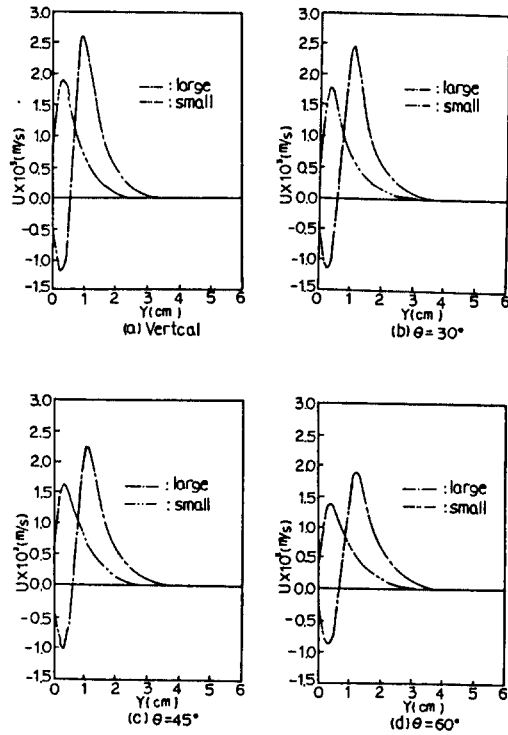


Fig. 7 u -velocity profiles for different inclined angles at $x=0.043023$ m and $T_{\infty}=7.0^{\circ}\text{C}$

境界層의 안쪽 部分은 上向流動, 바깥쪽 部分은 下向流動이 일어남을 豫測할 수 있다. 이 性向은 垂直일 경우 EL-Henawy 等⁽⁷⁾의 計算結果와 一致한다.

Fig. 7은 $T_o=0^{\circ}\text{C}$, $T_{\infty}=7^{\circ}\text{C}$, $x=0.043023\text{m}$ 에서 垂直 및 $\theta=30^{\circ}, 45^{\circ}$ 및 60° 일 때 x 方向의 速度成分 u 를 나타낸 것이다.

$\phi'(0)$ 가 작을 때에는 下向流動만 나타나고 있다. Fig. 6의 浮力分布의 性向으로는 等溫面 가까이에서는 上向流動이 일어날 수 있으나 速度分布에서 이러한 流動이 나타나지 않는 것은 等溫面의 剪斷力이 上向流動을 減衰시키기 때문이다. 傾斜角이 增加하면 速度 u 는 減少하는데 이는 重力加速度的 x 方向成分이 減少하기 때문이다. 浮力이 反重力方向으로 作用하므로 傾斜角이 增加하면 速度境界層의 두께는 增加한다. 전단에서 下流로 갈수록 浮力은 一定하나 速度 u 는 增加하며, 速度境界層의 두

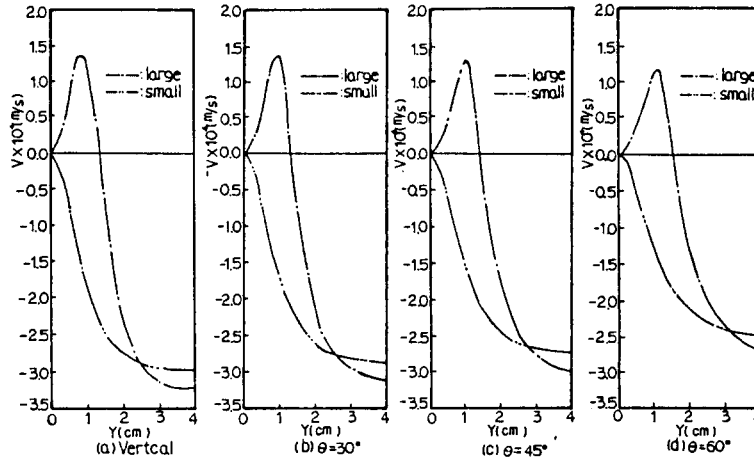


Fig. 8 v -velocity profiles for different inclined angles at $x=0.043023\text{ m}$ and $T_{\infty}=7.0^{\circ}\text{C}$

계도 증가하고 있다. 이는慣性力의影響으로解析된다. $\phi'(0)$ 가 클 때의速度 u 는浮力의性向과一致한다.

Fig. 8은 $T_0=0^{\circ}\text{C}$, $T_{\infty}=7^{\circ}\text{C}$, $x=0.043023\text{m}$ 에서垂直 및 $\theta=30^{\circ}, 45^{\circ}$ 및 60° 일때 y 方向의速度 v

를 나타낸 것이다.

傾斜角이增加할수록, 전단에서부터下流로갈수록速度 v 는減少한다.等溫面에서부터距離가 멀어질수록 v 는增加해서速度境界層의外部 끝에서一定速度로收斂한다.

Fig. 9는 R 에 따른平均 누셀트數를 나타낸 것이다.

그림의 코는 Fig. 2의 코와一致한다. 코의 윗부분은 R 이增加할수록平均 누셀트數는增加하고傾斜角이增加하면平均 누셀트數는減少한다. 코의 아래부분은 R 이增加할수록,傾斜角이增加할수록平均 누셀트數는減少하고 있다. 이性向은 Fig. 2의性向과一致한다. 코의 아래부분의平均 누셀트數가 작은 것은 Fig. 5에 나타낸 것과같이等溫面에서 온도勾配가 작기 때문이다.

Table 3에 코의 아래部分과 윗部分에서의平均 누셀트數의比를 나타내었다.

T_{∞} 가增加할수록 두部分의比는增加하고,傾斜角은增加해도 거의 같은 값이 된다.平均 누셀트數의比가第一 큰 것은 36 정도이므로實際 이런現象이 일어나면 이溫度領域에서는傳熱工學上注意를要한다.

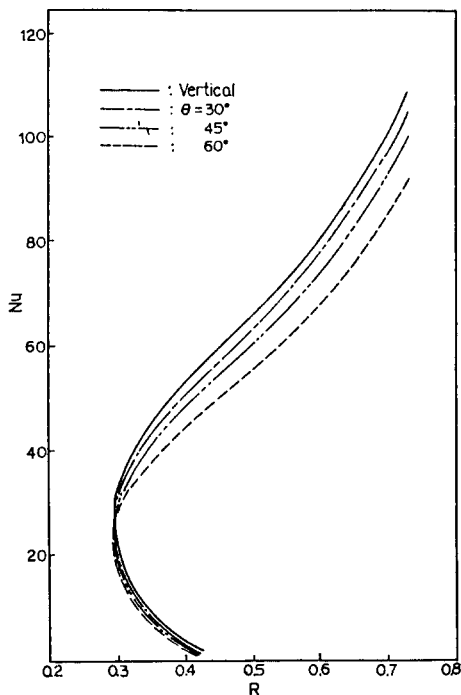


Fig. 9 The variation of mean Nusselt number for different angles, using similarity

4. 結 論

垂直 및 傾斜角이 $30^{\circ}, 45^{\circ}$ 및 60° 인等溫面이 물속에 잠겨 있을 때 下向流動領域에서 일어나는多

Table 3 Ratios of mean Nusselt numbers in multiple steady state region, using similarity

T_{∞} $\phi'(0)$ θ	5.70°C			5.80°C			5.90°C			6.00°C			7.00°C		
	A	B	A/B	A	B	A/B	A	B	A/B	A	B	A/B	A	B	A/B
0°	28.94	23.61	1.23	34.93	17.68	1.98	38.18	14.54	2.63	40.70	12.19	3.34	55.61	1.53	36.35
30°	27.92	22.78	1.23	33.69	17.06	1.98	36.83	14.03	2.63	39.26	11.76	3.34	53.64	1.47	36.49
45°	26.54	21.65	1.23	32.03	16.22	1.98	35.01	13.34	2.62	37.32	11.18	3.34	50.99	1.40	36.42
60°	24.33	19.86	1.23	29.37	14.87	1.98	32.10	12.23	2.60	34.22	10.25	3.34	46.76	1.28	36.53

* A : Small, B : Large

重定常狀態의 領域과 이 領域에서 일어나는 流動과 自然對流를 理論解析하여 다음과 같은 結果를 얻었다.

下向流動이 支配인 領域에서 두 個의 定常狀態 解을 가지는 領域이 存在하였으며, 그 領域의 幅은 傾斜角이 增加하면 減少하였다. 傾斜角이 增加할수록, 前단에서 下流로 갈수록 速度境界層, 熱境界層 및 浮力境界層의 두께는 增加하였다. 平均 누셀트 數는 傾斜角이 增加할수록 減少하였다. 또한 코의 위 및 아래 部分의 平均 누셀트 數의 比는 T_{∞} 가 增加할수록 增加하였고 傾斜角에는 관계없이 一定 하였다.

참 고 문 헌

(1) Stewartson, K., 1953, "Further Solutions of the Falkner-Skan Equation", Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 50, pp. 454~465.
 (2) Cebeci, T. and Keller, H. B., 1971, "Shooting and Parallel Shooting Methods for Solving the Falkner-Skan Boundary Layer Equation", J. of Computer. Phys., Vol. 7, pp. 289~300.
 (3) Saitoh, T., 1976, "Natural Convection Heat Transfer from a Horizontal Ice Cylinder", Appl. Sci. Res., Vol. 32, pp. 429~451.
 (4) Zandbergen, P. J. and Dijkstra, D., 1977, "Non-Unique Solution of the Navier-Stokes Equations for the Karman Swirling Flow", J. of Engineering Math., Vol. 11, No. 2, pp. 167~188.
 (5) Lentini, M. and Keller, H.B., 1978, "Computation of Karman Swirling Flows", Lecture Notes in Computer Sci., Vol. 76, Springer-Verlag, München, pp. 89~100.
 (6) Turcotte, D. L., Spence, D.A. and Bau, H. H., 1981,

"Multiple Solutions for Natural Convective Flows in an Internally Heated, Vertical Channel with Viscous Dissipation and Pressure Work", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 25, No. 5, pp. 699~706.

(7) El-Henawy, I. M., Kasarinoff, N., Gebhart, B. and Mollendorf, J. C., 1982, "Numerically Computed Multiple Steady State of Vertical Buoyancy Induced Flows in Cold Pure Water", J. of Fluid Mech., Vol. 107, pp. 37~55.
 (8) Ascher, U., Christianson, J. and Russel, R. D., 1978, "COLSYS-a Collocation Code for Boundary Value Problems, Codes for Boundary Value Problems in Ordinary Differential Equation(ed. G. Goods and J. Hartmains)", Lecture Notes in Computer Sci., Vol. 76, Springer-Verlag, München, pp. 164~185.
 (9) Deuffhard, P., 1978, "Nonlinear Equation Solves in Boundary Value Problem, Codes an Invited Survey Paper", Lecture Notes in Computer Sci., Vol. 76, Springer-Verlag, München, pp. 40~60.
 (10) Gebhart, B. and Mollendorf, J.C., 1977, "A New Density Relation for Pure and Saline Water", Deep-Sea Res., Vol. 24, pp. 831~848.
 (11) Diekhoff, H.J., Lavy, P., Oberle, H. J., Pesch, J.J., Rentrop, P. and Seydel, R., 1977, "Comparing Routines for the Numerical Solution of Initial Value Problem of Ordinary Differential Equations in the Multiple Shooting", Numerische Mathematik, Vol. 27, pp. 449~469.
 (12) Bulirsh, R. and Stoer, J., 1966, "Numerical Treatment of Ordinary Differential Equations by Extrapolation Methods", Numerische Mathematik, Vol. 8, pp. 1~13.
 (13) Kukulka, D.J., 1981, "Thermodynamic and Transport Properties of Pure and Saline Water", Master Thesis, State University of New York at Buffalo, pp. 46~50.

- (14) El-Henawy, I.M., 1982, "Multiple Steady States of Buoyancy Induced Flows in Cold Water", Doctoral Dissertation, State Univ. of New York at Buffalo.
- (15) Carey, V.P., Gebhart, B. and Mollendorf, J.C., 1980, "Buoyancy Force Reversals in Vertical Natural Convection Flows in Cold Water", J. Fluid Mech., Vol. 97, pp. 279~297.