

〈論 文〉

## 의사등방성재료내 균열에 대한 코스틱스방법의 적용(I)

백명철\* · 조상봉\*\* · 최선호\*\*\*

(1991년 1월 11일 접수)

### Application of Method of Caustics to Cracks in Pseudo-Isotropic Materials(I)

M.C. Baik, S.B. Cho and S.H. Choi

**Key Words :** Method of Caustics(Caustics방법), Composite Material(복합 재료), Characteristic Root(특성근), Stress Intensity Factor(응력확대계수), Orthotropic Material(직교이방성재료), Pseudo-Isotropic Material(의사등방성재료)

#### Abstract

Orthotropic materials can be divided into three groups by the characteristic roots, say, the different imaginary roots, the different complex roots and the same imaginary roots. In case of the same roots, the conventional stress field equations become singular and it makes the method of caustics not available to analyze stress intensity factor(S.I.F.) in these kinds of materials, which are provisionally named "Pseudo-Isotropic Materials" in this paper. In this paper, as a part of studying method of caustics in anisotropic materials, the applicability of the method of caustics to the above-mentioned "Pseudo-Isotropic Materials" was examined by numerical method and visualization of caustics images under various loading conditions. In addition to these investigation, the method for calculating stress intensity factor for these materials was presented to make the method of caustics usable in experimentation.

#### 1. 서 론

광학을 이용하여 응력확대계수를 구하는 방법에는 전통적으로 광탄성법, 공간섭법, 홀로그래피법, 모아레법 등이 있으며, 이들 방법은 각기 나름대로의 장점이 있어 여러분야의 응력확대계수를 구하는데 사용되고 있다. 그러나 이들 방법에서 얻는 광학패턴(optical pattern)은 균열선단 등과 같은 특이점부근에서는 간섭무늬들이 너무 조밀하여 정확한 파괴역학 매개변수(parameter)를 얻기 어려운 경우도 자주 일어난다. 한편, 위 광학방법들과는

달리 1964년 Manogg가 창안하였고<sup>(1)</sup>, Theocaris, Kalthoff등에 의해서 실용화되어<sup>(2,3)</sup> 폭넓게 파괴역학에 이용하게 된 코스틱스방법이 있다. 이 방법은 응력집중부에 있어서 빛의 굴절 혹은 반사에 의해서 형성되는 코스틱스상을 해석하는 방법으로, 간단한 장치로써 균열선단 근방의 광학적정보를 얻어 직접 응력확대계수를 구할 수 있으며, 시편 재료를 광탄성 감도 유무에 관계없이 무엇이든 사용할 수 있는 장점이 있다.

직교이방성재료에 대한 코스틱스방법의 적용은 Theocaris등에 의해서 처음으로 시도되었으나<sup>(4)</sup> 그 대상이 직교이방성재료 중에서도 일부만에(특성근이 서로 다른 허근의 경우) 한정되었으며 또 이들 재료에 대한 응력확대계수 산출법은 제시된 바 없다. 코스틱스방법을 모든 종류의 직교 이방성재료에

\* 정회원, 영남전문대학 자동차과

\*\* 정회원, 경남대학교 공과대학 기계설계과

\*\*\* 정회원, 영남대학교 공과대학 기계설계과

적용하기 위해서는 특성방정식의 근이 서로 같은 허근의 경우도 포함하여야 하며 적절한 응력확대계수 산출법이 확립되어야 한다.

본 연구에서는, 일반적인 이방성재료에 대한 코스틱스방법의 적용을 검토하는 일환으로서, 직교이방성재료중 특성방정식의 근이 동일함으로 인하여 균열의 응력장이 특이성을 갖게 되고, 따라서 지금까지는 코스틱스방법의 적용이 어려웠던 재료(의사등방성재료)에 대하여, 코스틱스상 및 초기곡선의 식을 이론적으로 구하였고, 이 식을 예상되는 여러가지 경계조건 하에서 컴퓨터 그래픽(computer graphic)으로 가시화(可視化)하여, 시편제작의 어려움으로 인하여 실험이 곤란한 의사등방성재료의 코스틱스상을 예시하였으며, 또 이들 재료에 대한 응력확대계수 산출법을 제시함과 동시에 이 산출법이 등방성재료 및 일반적 직교이방성재료에도 사용가능함을 밝혀 다음 제2부에서 실험을 통하여 검증되도록 하였다.

## 2. 이론의 전개

일반적인 이방성재료(anisotropic material)에 대한 Hooke의 법칙은 아래 식 (1)의 한 형태로 표현된다.

$$\epsilon_i = \sum_{j=1}^6 a_{ij} \sigma_j, \quad \sigma_i = \sum_{j=1}^6 c_{ij} \epsilon_j \quad (1)$$

여기에서

$$\{\epsilon_i\} = [\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, 2\epsilon_{23}, 2\epsilon_{31}, 2\epsilon_{12}]^T$$

$$\{\sigma_i\} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}]^T$$

이며,  $a_{ij}$ ,  $c_{ij}$ 는 각각 콤플라이언스(compliance), 스티프니스(stiffness) 행렬이다. 평면 응력 상태의 경우, 식 (1)의 첫번째 식은 식 (2)로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (2)$$

평면변형률상태의 경우에는

$$b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i3}a_{j3}}{a_{33}} \quad (i, j = 1, 2, 6)$$

에 의하여 식 (2)와 동일한 형태로 표현된다.

식 (2)에 Airy의 응력함수  $U$ 와 적합조건식을 적용하면 아래의 식 (3)이 된다.

$$a_{22} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2a_{26} \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} - 2a_{16} \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} + a_{11} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0 \quad (3)$$

operator  $D_j = \frac{\partial}{\partial y} - S_j \frac{\partial}{\partial x}$ 를 이용한 식 (3)의 특성 방정식은

$$a_{11}s^4 - 2a_{16}s^3 + (2a_{12} + a_{66})s^2 - 2a_{26}s + a_{22} = 0 \quad (4)$$

이며, 근  $S_j (j=1, 2, 3, 4)$ 는 복소수 또는 순허수로 된다<sup>(5)</sup>.

$$s_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \quad s_2 = \alpha_2 + i\beta_2, \quad s_3 = \bar{s}_1, \quad s_4 = \bar{s}_2 \quad (5)$$

여기에서,  $\alpha_j, \beta_j (j=1, 2)$ 는 실수이다.

직교이방성 재료(orthotropic material)의 경우에는  $a_{16} = a_{26} = 0$ 이므로 식 (4)는 다음의 식 (6)이 된다.

$$\lambda s^4 + 2\rho\sqrt{\lambda s^2} + 1 = 0 \quad (6)$$

여기에서,  $\lambda, \rho$ 는 무차원 매개변수이며,

$$\lambda = \frac{a_{11}}{a_{22}}, \quad \rho = \frac{2a_{12} + a_{66}}{2\sqrt{a_{11}a_{22}}} \quad (7)$$

이다.

식 (9)에서,  $n$ 과  $m$ 이 실수가 되기 위해서는,  $\lambda$ 와  $\rho$ 는 아래식 (8)의 범위를 갖게 된다<sup>(6)</sup>.

$$\lambda > 0 \text{ and } -1 < \rho < \infty \quad (8)$$

식 (6)의 근은  $\rho$ 의 범위에 따라,

$$1 < \rho < \infty, \quad s_1 = i\lambda^{-1/4}(n+m), \quad s_2 = i\lambda^{-1/4}(n-m) \quad (9.a)$$

$$-1 < \rho < 1, \quad s_1 = \lambda^{-1/4}(in+m), \quad s_2 = \lambda^{-1/4}(in-m) \quad (9.b)$$

$$\rho = 1, \quad s_1 = s_2 = i\lambda^{-1/4} \quad (9.c)$$

여기에서

$$n = \sqrt{\frac{1+\rho}{2}}, \quad m = \sqrt{\frac{1-\rho}{2}} \quad (10)$$

이다.

코스틱스방법을 이용한 직교이방성 재료의 연구에서 식 (9.a)의 경우에 대해서는 Theocaris 등에 의하여 연구되었던 바 있다. 본 연구에서는 식 (9.c)의 경우, 즉  $s_1 = s_2 (\rho=1)$ 로 인하여 종래의 균열의 응력장이 특이성을 갖게되는 재료[의사(擬似)등방성재료: Pseudo-Isotropic Material]에 대하여 코스틱스방법의 적용가능성을 검토하기로 한다.

$\rho=1$ 인 경우, 직교이방성 재료의 지배방정식은 중조화미분방정식이기 때문에 다음 식<sup>(6)</sup>에서 등방성 재료와 유사한 방법으로 균열의 응력장을 구할 수 있으며, 응력함수  $\phi(z)$ ,  $\Psi(z)$ 를 등방성재료와 같은 형태로 잡을 수 있다.

$$\sigma_y + \lambda^{1/2} \sigma_x = 4R_e\{\phi'(Z)\}$$

$$\sigma_y - \lambda^{1/2} \sigma_x + 2i\lambda^{1/4} \tau_{xy}$$

$$= 2[\bar{z}\phi''(z) + \Psi'(z)] \quad (11)$$

$$(z = x + i\lambda^{-1/4}y = r' e^{i\theta'}, \quad x + iy = r e^{i\theta})$$

따라서, 식 (11)에 의한 응력성분은, 저자중의 한 사람에 의해 이미 발표된 바 있으며<sup>(8)</sup>,

$$\begin{bmatrix} \lambda^{1/2}\sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \lambda^{1/4}\sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r'}} \cos\left(\frac{\theta'}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 - \sin\frac{\theta'}{2} \sin\frac{3}{2}\theta' \\ 1 + \sin\frac{\theta'}{2} \sin\frac{3}{2}\theta' \\ \sin\frac{\theta'}{2} \cos\frac{3}{2}\theta' \end{bmatrix} \\ + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r'}} \begin{bmatrix} \sin\frac{\theta'}{2} \left(2 + \cos\frac{\theta'}{2} \cos\frac{3}{2}\theta'\right) \\ \sin\frac{\theta'}{2} \cos\frac{\theta'}{2} \cos\frac{3}{2}\theta' \\ \cos\frac{\theta'}{2} \left(1 - \sin\frac{\theta'}{2} \sin\frac{3}{2}\theta'\right) \end{bmatrix} \quad (12)$$

이다.

Fig. 1에서 화면(screen)의 코스틱상의 좌표( $\bar{W}$ )는<sup>(1)</sup>

$$\bar{W} = m\vec{r} + \vec{w} = m\vec{r} + (-z_0tc)\text{grad } V \quad (13)$$

여기에서  $V = \sigma_{11} + \sigma_{22}$ 이며, 식 (12)에 의해서

$$V = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r'}} \cos\frac{\theta'}{2} \left[ \lambda^{-1/2} \left(1 - \sin\frac{\theta'}{2} \sin\frac{3}{2}\theta'\right) + \left(1 + \sin\frac{\theta'}{2} \sin\frac{3}{2}\theta'\right) \right] \\ + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r'}} \sin\frac{\theta'}{2} \left[ \lambda^{-1/2} \left(2 + \cos\frac{\theta'}{2} \cos\frac{3}{2}\theta'\right) + \cos\frac{\theta'}{2} \cos\frac{3}{2}\theta' \right]$$

이고, 또

$$\text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial x} i + \frac{\partial V}{\partial y} j \\ = \left( \frac{\partial V}{\partial r'} \cos\theta' - \frac{\partial V}{\partial \theta'} \frac{\sin\theta'}{r'} \right) i \\ + \lambda^{(-1/4)} \left( \frac{\partial V}{\partial r'} \sin\theta' + \frac{\partial V}{\partial \theta'} \frac{\cos\theta'}{r'} \right) j \quad (14)$$

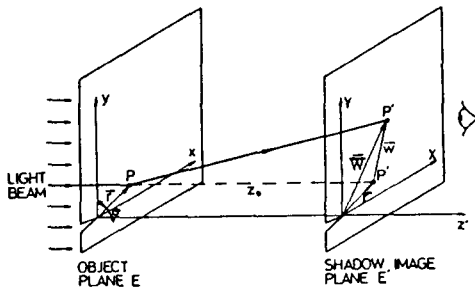


Fig. 1 Geometry of the formation of a Caustic

이다.

식 (13), (14)에 의해서, 코스틱상의 좌표  $\bar{W} = X + iY$ 는

$$X = mr \cos\theta + C(r')^{-3/2} \left[ K_I \left\{ A_{11} \cos\frac{3}{2}\theta' + (1 - \lambda^{-1/2}) B_1 D_1 \right\} + K_{II} \left\{ A_{22} \sin\frac{3}{2}\theta' - (1 - \lambda^{-1/2}) B_2 D_2 \right\} \right] \quad (15.a)$$

$$Y = mr \sin\theta + \lambda^{-1/4} C(r')^{-3/2} \left[ K_I \left\{ A_{11} \sin\frac{3}{2}\theta' - (1 - \lambda^{-1/2}) B_1 E_1 \right\} - K_{II} \left\{ A_{22} \cos\frac{3}{2}\theta' - (1 - \lambda^{-1/2}) B_2 E_2 \right\} \right] \quad (15.b)$$

( $-\pi \leq \theta, \theta' \leq \pi$ )

여기에서

$$C = (Z_0tc) \{2(2\pi)^{1/2}\}^{-1}$$

$$A_{11} = \lambda^{-1/2} \left(1 - \sin\frac{\theta'}{2} \cos\frac{3}{2}\theta'\right) + \left(1 + \sin\frac{\theta'}{2} \sin\frac{3}{2}\theta'\right)$$

$$A_{22} = -\lambda^{-1/2} \left(2 + \cos\frac{\theta'}{2} \cos\frac{3}{2}\theta'\right) + \left(\cos\frac{\theta'}{2} \cos\frac{3}{2}\theta'\right)$$

$$B_1 = \sin 2\theta' + 2 \sin\frac{\theta'}{2} \cos\frac{3}{2}\theta'$$

$$B_2 = \sin 2\theta' + 2 \cos\frac{\theta'}{2} \sin\frac{3}{2}\theta'$$

$$D_1 = \cos\frac{\theta'}{2} \sin\theta'$$

$$D_2 = \sin\frac{\theta'}{2} \sin\theta'$$

$$E_1 = \cos\frac{\theta'}{2} \cos\theta'$$

$$E_2 = \cos\theta' \sin\frac{\theta'}{2}$$

이다.

식 (15)에서,  $\lambda=1$ 일때, 즉 등방성 재료로 될 때는 식 (15)는 아래와 같이 등방성재료의 코스틱상의 좌표로 변환됨을 알 수 있다.

$$X = mr \cos\theta + 2C(r)^{-3/2} \left( K_I \cos\frac{3}{2}\theta - K_{II} \sin\frac{3}{2}\theta \right) \quad (16.a)$$

$$Y = mr \sin\theta + 2C(r)^{-3/2} \left( K_I \sin\frac{3}{2}\theta + K_{II} \cos\frac{3}{2}\theta \right) \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi) \quad (16.b)$$

코스틱상은, 균열선단 주위에 형성되는 초기곡선이 화면(screen)에 결상(結像) 하는 것이며, 초기곡선이 형성되는 조건은 식 (15) 혹은 식 (16)의 자코비안 행렬식(Jacobian Determinant)이 "0"으로 되는 것이다<sup>(2)</sup>.

$\rho=1$ 의 경우는, 식 (15)의 자코비안 행렬식  $D$ 를 구한다.

$$D = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(r, \theta)} = 0 \quad (17)$$

식 (17)에 의해서 구해진 초기곡선의 방정식은 아래와 같다.

$$m^2(r')^5 - mC(r')^{5/2}(1-\lambda^{-1/2})F_{11} - F_{12} = 0 \quad (18)$$

여기에서

$$\begin{aligned} F_{11}(K_I, K_{II}, \theta') &= \frac{3}{2}\phi_1 + K_I J_1 - K_{II} J_2 \\ &\quad - \lambda^{-1/2}(K_I S_1 + K_{II} S_2) \\ F_{12}(K_I, K_{II}, \theta') &= C^2 \lambda^{-1/2} \left[ \frac{9}{4}\phi_3 + \frac{3}{2}(1-\lambda^{-1/2}) \right. \\ &\quad \left. (\eta_1 + \eta_2) + (1-\lambda^{-1/2})^2 \phi_4 \right] \end{aligned}$$

이다.

단,

$$\begin{aligned} \phi_1 &= K_I A_{11} \cos \frac{5}{2} \theta' + K_{II} A_{22} \sin \frac{5}{2} \theta' \\ \phi_2 &= -K_I A_{11} \sin \frac{5}{2} \theta' + K_{II} A_{22} \cos \frac{5}{2} \theta' \\ \phi_3 &= (K_I A_{11})^2 + (K_{II} A_{22})^2 \\ \phi_4 &= K_I^2 (J_1 S_1 - L_1 M_1) - K_I K_{II} (J_2 S_1 - J_1 S_2 \\ &\quad - L_1 M_2 - M_1 L_2) - K_{II}^2 (J_2 S_2 + M_2 L_2) \\ \eta_1 &= \phi_1 \{ K_I (J_1 + S_1) - K_{II} (J_2 - S_2) \} \\ \eta_2 &= \phi_2 \{ K_I (M_1 - L_1) - K_{II} (M_2 - L_2) \} \\ A_1 &= \sin \frac{\theta'}{2} \sin \frac{3}{2} \theta' \\ A_2 &= \cos \frac{\theta'}{2} \cos \frac{3}{2} \theta' \\ J_1 &= \frac{3}{2} \cos \theta' B_1 D_1 + A_1' F_1 \\ &\quad + \sin \theta' (B_1' D_1 + B_1 D_1') \\ F_1 &= \cos \frac{3}{2} \theta' \sin \theta' \\ S_1 &= \frac{3}{2} \sin \theta' B_1 E_1 + A_1' G_1 \\ &\quad + \cos \theta' (B_1' E_1 + B_1 E_1') \\ G_1 &= \cos \theta' \sin \frac{3}{2} \theta' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{3}{2} \sin \theta' B_1 D_1 - A_1' H_1 \\ &\quad - \cos \theta' (B_1' D_1 + B_1 D_1') \\ M_1 &= \frac{3}{2} \sin \theta' B_1 E_1 + A_1' I_1 \\ &\quad + \sin \theta' (B_1' E_1 + B_1 E_1') \\ H_1 &= \cos \frac{3}{2} \theta' \cos \theta' \\ I_1 &= \sin \frac{3}{2} \theta' \sin \theta' \\ J_2 &= \frac{3}{2} B_2 D_2 \cos \theta' + (B_2' D_2 + B_2 D_2') \sin \theta' \\ &\quad + \frac{1}{2} B_2 F_2 \\ F_2 &= \sin \frac{3}{2} \theta' \sin \theta' \\ S_2 &= -\frac{3}{2} B_2 E_2 \sin \theta' + (B_2' E_2 + B_2 E_2') \cos \theta' \\ &\quad + \frac{1}{2} B_2 G_2 \\ G_2 &= \cos \frac{3}{2} \theta' \cos \theta' \\ M_2 &= \frac{3}{2} \cos \theta' B_2 E_2 + \frac{1}{2} B_2 I_2 \\ &\quad + (B_2' E_2 + B_2 E_2') \sin \theta' \\ I_2 &= \cos \frac{3}{2} \theta' \sin \theta' \\ L_2 &= \frac{3}{2} \sin \theta' B_2 D_2 - \frac{1}{2} B_2 H_2 \\ &\quad - (B_2' D_2 + B_2 D_2') \cos \theta' \\ H_2 &= \sin \frac{3}{2} \theta' \cos \theta' \end{aligned}$$

여기에서  $A_1'$ ,  $B_1'$  등은 각각  $\frac{dA_1}{d\theta}$ ,  $\frac{dB_1}{d\theta}$ , 등을 의미한다.

식 (18)에서,  $\lambda=1$ 일 때는, 아래식 (19)로 변환되며, 등방성 재료에 대한 초기곡선 방정식과 일치한다.

$$m^2 r^5 - 9C^2 (K_I^2 + K_{II}^2) = 0 \quad (19)$$

### 3. 수치해석 및 고찰

등방성재료의 경우, 초기곡선(식 19) 및 코스틱상(식 16)은 각각 원과 에피사이크로이드(epicycloid)가 되나, 직교이방성재료는 식 (18), (15)에서 알 수 있듯이, 이미 초기곡선은 원이 아니고, 코스틱상도 에피사이크로이드가 아닌 독특한 형태가 된다. 이러한 상을 구하기 위해서는 먼저 초기

곡선의 방정식(식 18)을 주어진 경계조건에 따라 풀어야 하며, 본 논문에서는 Newton-Raphson법을 이용하였고, 그 순서도(flow chart)는 Fig. 2와 같다.

의사등방성재료는,  $\lambda(E_{22}/E_{11})$ 의 값에 따라 여러 가지 종류로 나누어지며, 이들중  $\lambda=1$ 인 경우에는 등방성 재료가 된다. 이러한 의사등방성 재료에 대한 코스틱상 및 초기곡선식(15 및 16)을 모드 I, 모드 II 및 혼합형 (mixed mode)의 경우에 대하여 Fig. 3에서와 같이  $\lambda$ 의 변화에 따른 상의 형태변화를 가시화(可視化)하였다. 이 결과,  $\lambda$ 의 값이 1에 접근함에 따라 코스틱상이 점차로 등방성재료에 대한 기존의 코스틱상과 근사하게되며,  $\lambda$ 의 값이 1일 때는 정확히 등방성재료의 상으로 변화하는 점근성을 확인할 수 있었다. 의사등방성재료가 존재할 수 있는 재료인 것은 이론적으로 증명되어 있으나 실제에서 이와같은 재료를 구하는 데는 어려움이 있어 Fig. 3의 코스틱상을 실험으로 입증하는

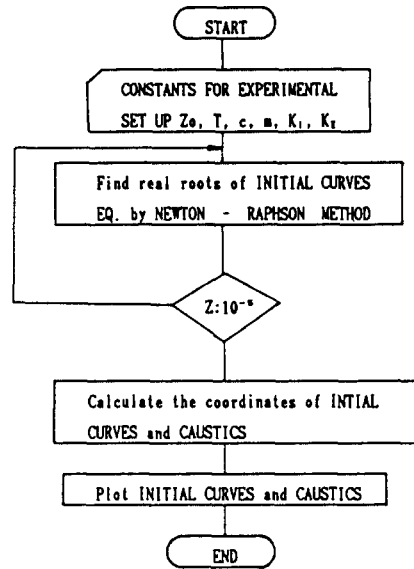


Fig. 2 The flow chart to plot Initial Curve and Caustics

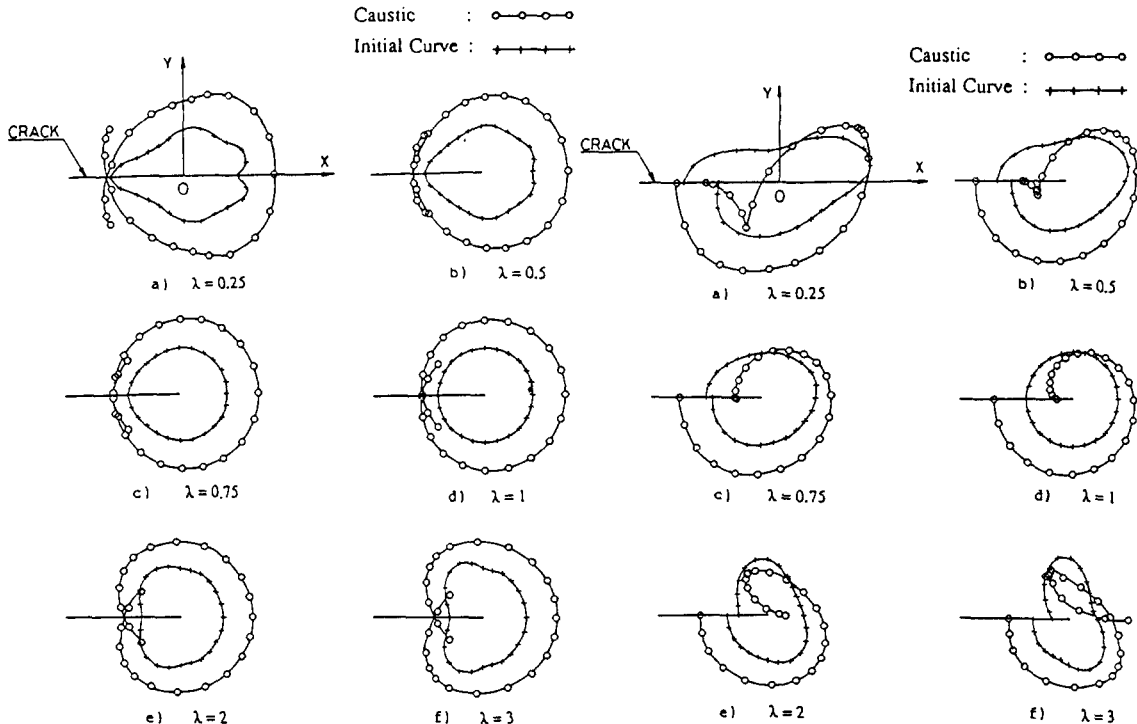


Fig. 3(a) Changing shapes of Caustics under various conditions in Pseudo-Isotropic materials(mode I)

Fig. 3(b) Changing shapes of Caustics under various conditions in Pseudo-Isotropic materials(mode II)

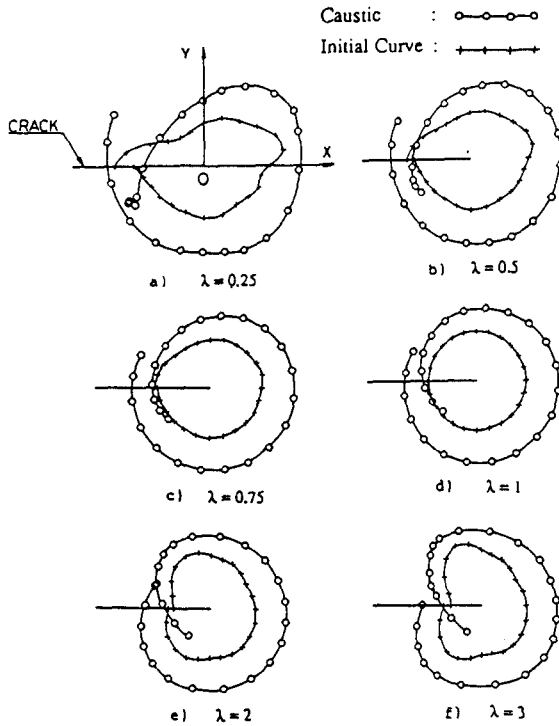


Fig. 3(c) Changing shapes of Caustics under various conditions in Pseudo-Isotropic materials (mixed mode,  $\mu=0.5$ ,  $\mu = K_{II}/K_I$ )

것은 현재로서는 곤란하다. 그러나 실험이 가능한 일반적인 직교이방성재료(특성근이 서로 다른 두 허근의 경우)에서 서로다른 두 특성근을 점차로서로 같게 접근시켜 의사등방성재료에 근사시켰을 때의 코스틱상을 관찰함으로써 Fig. 3의 상에 대한 타당성을 증명할 수 있을 것으로 사료된다. 이 과정은 다음 제2보에서 다룰 예정이다.

Fig. 3은 하중 및 기타의 실험조건(시편두께, 시편과 스크린과의 거리, 광학정수)을 동일하게 하고, 직교이방성의 정도를 표시하는  $\lambda$ 만 순차적으로 변화시킨 것이다.  $\lambda$ 의 증가에 따라서 모드 I 상태의 코스틱상 및 초기곡선의 크기가 뚜렷이 감소하고 있음을 알 수 있다. 이는 재료의 강성이 약한방향과 하중방향이 일치 했을 때는 균열선단 부근의 변형이 크고, 반대일 때는 변형이 작아지는 현상을 나타내는 것으로 재료의 일반적인 성질과 부합된다.

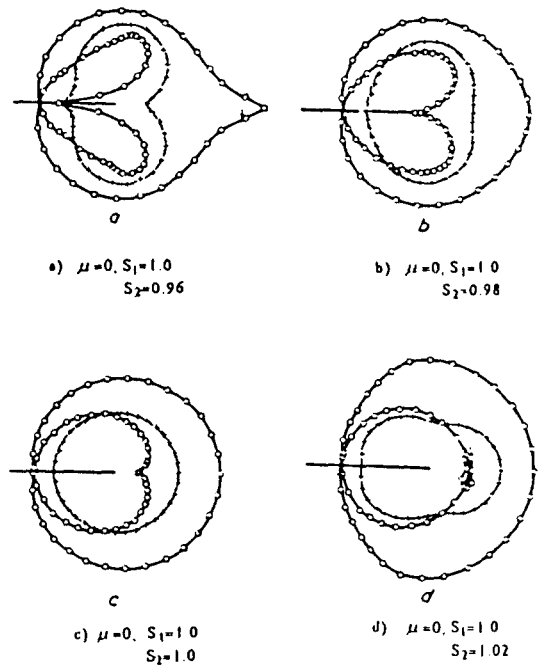


Fig. 4 Changing shapes of Caustics under various conditions in orthotropic materials ( $1 < \rho < \infty$ )<sup>(4)</sup> (mode I)

Fig. 4는 직교이방성재료중, 특성근이 서로다른 두 허근인 일반적인 직교 이방성재료에 대해서 Theocaris가 구한 코스틱상이다. 의사등방성재료의 경우인 Fig. 3(a)의 상은 이들과는 다른 독특한 형태가 되나 두 상 모드 직이방성이 변함에 따라 최대직경이 수평방향에서 수직방향으로 변하는 공통점이 있음을 알 수 있다.

#### 4. 응력확대계수의 산출

코스틱상에서 응력확대계수를 구하기 위해서는, "사상(寫像) 방정식(mapping eq.) (13)의 자코비안 행렬식이 0이 되어야 한다"는 조건에서 초기곡선을 구하고, 이 초기곡선의 식에 포함된 역학적 매개변수를 코스틱상과 결부시키면 된다<sup>(2)</sup>.

등방성 재료의 경우, 특이항 까지만 응력성분을 취할때는, 초기곡선은 원으로, 또한 코스틱상은 에 피사이크로이드로 표현되며, 하중방식에 따라 응력 확대계수를 구하는 식은 이미 확립되어 있으며, 고차항 및 광학적이방성을 고려하면 이들의 상에 약간

의 변형이 일어나는 것으로 알려져 있다<sup>(10)</sup>.

직교 이방성 재료의 경우에는, 초기곡선은 원인 아닌 특이한 곡선이 되며, 코스틱상도 에피사이크로이드가 아닌 독특한 형태를 이루기 때문에 응력 확대계수를 구할 때 등방성 재료와 같은 방법은 사용할 수 없다.

본 논문에서 다루고 있는 의사등방성 재료의 경우에는, 식 (15)와 Fig. 3에서,  $\lambda$ 의 값에 따라 각각 특이한 형상을 나타냄을 알 수 있다. 또 혼합모드의 경우에는,  $\mu(\mu=K_{II}/K_I)$ 에 따라 균열선단을 중심으로 하여 코스틱상이 회전을 하게 된다. 상의 변화거동을 명확히 하기 위하여 초기곡선식 (18)을 다시 정리하면 아래와 같다.

$$m^2(Xr)^2 - mC(1-\lambda^{-1/2})F_{11}(Xr) - F_{12} = 0$$

단,  $Xr = (r')^{5/2}$  (20)

식 (20)의 근  $Xr$ 은 아래와 같이 정리된다.

$$Xr = (C K_I (2m)^{-1} [(1-\lambda^{-1/2}) F_a \pm [(1-\lambda^{-1/2}) F_a^2 + 4\lambda^{-1/2} \{ \frac{9}{4} (A_{11})^2 + \mu^2 A_{22}^2 \} + 3/2 (1-\lambda^{-1/2}) \phi_a (J_1 + S_1) - \mu (J_2 - S_2) + \phi_b (M_1 - L_1) - \mu (M_2 - L_2) + (1-\lambda^{-1/2})^2 \phi_d \}^{1/2}]])$$

(21)

여기에서,

$$C = (Z_0 t c) \{ (2(2\pi)^{1/2})^{-1} \}$$

$$F_a = 1.5\phi_a + J_1 - \mu J_2 - \lambda^{-1/2} (S_1 + \mu S_2)$$

$$\phi_a = A_{11} \cos \frac{5}{2} \theta' + \mu A_{22} \sin \frac{5}{2} \theta'$$

$$\phi_b = -A_{11} \sin \frac{5}{2} \theta' + \mu A_{22} \cos \frac{5}{2} \theta'$$

$$\phi_d = (J_1 S_1 - L_1 M_1) - \mu (J_2 S_1 - J_1 S_2 - L_1 M_2 - M_1 L_2) - \mu^2 (J_2 S_2 + M_2 L_2)$$

이다.

즉, 각도  $\theta'$ 의 변화에 따라 코스틱상의 형상을 결정하는 인자(因子)는  $\lambda$  및  $\mu$ 이고, 기타의 실험적 조건(시편의 두께  $t$ , 광학정수  $c$ , 시편과 스크린사이의 거리  $Z_0$ , 등)은 코스틱상의 형상에는 관계없이 그 크기만을 변화 시키는 인자라고 볼 수 있다. 또  $\theta'$ 를 알면  $\theta$ 는 식 (11)의 관계에서 구할 수 있다.

따라서 Fig. 5에서 코스틱상은, 특정한  $\lambda, \mu$ 에 대해서는  $K_I, K_{II}, Z_0, t, c$ 에 관계없이 항상 동일한 각도에서 균열의 연장선( $X$ 축)과 교차( $Y=0$ )하게 되며, (이때의 각도를  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ , 교차점을  $X_1 X_2 X_3$

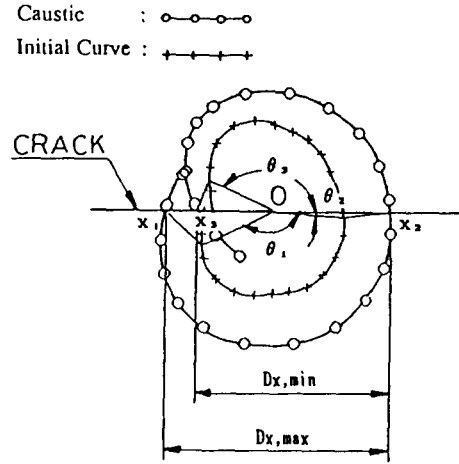


Fig. 5 Definition of  $D_x, max, D_x, min, \theta_1, \theta_2$  and  $\theta_3$  in a caustics ( $\mu=0.5, \lambda=2, \mu=K_{II}/K_I, \lambda=E_{22}/E_{11}$ )

라고 함), 교차점 사이의 거리비  $Xr, [Xr = (X_3 - X_1)/(X_2 - X_1) = (D_x, max - D_x, min)/D_x, max]$ 도 일정하게 된다. 따라서, 재료의 물성치에 의하여  $\lambda$ 가 정해지면,  $\mu$ 와  $Xr$ , 또는  $\mu$ 와  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 는 각 1 : 1의 대응을 이루며, 그 관계는 Fig. 6~9에서 알 수 있다.

응력 확대계수를 구하기 위하여 식 (15)에  $\mu(\mu=K_{II}/K_I)$ 를 대입하고,  $Y=0$ 인 경우를 취하면 아래와 같은 열립방정식을 얻는다.

$$X = mr' \cos \theta' + C (r')^{-3/2} K_I (XX_1 + \mu XX_2)$$

(22. a)

$$0 = mr' \sin \theta' \lambda^{1/4} + \lambda^{-1/4} C (r')^{-3/2} K_I (YY_1 - \mu YY_2)$$

(22. b)

( $-\pi \leq \theta' \leq \pi$ )

여기에서,

$$XX_1 = A_{11} \cos \frac{3}{2} \theta' + (1-\lambda^{-1/2}) B_1 D_1$$

$$XX_2 = A_{22} \sin \frac{3}{2} \theta' - (1-\lambda^{-1/2}) B_2 D_2$$

$$YY_1 = A_{11} \sin \frac{3}{2} \theta' - (1-\lambda^{-1/2}) B_1 E_1$$

$$YY_2 = A_{22} \cos \frac{3}{2} \theta' - (1-\lambda^{-1/2}) B_2 E_2$$

이다.

식 (22 a,b)에서,  $X, \theta', \mu$ 는 각각 실험(코스틱상의 사진) 및 Fig. 6~9에서 결정되고,  $r', K_I$ 는 아래와 같이 얻을 수 있다.

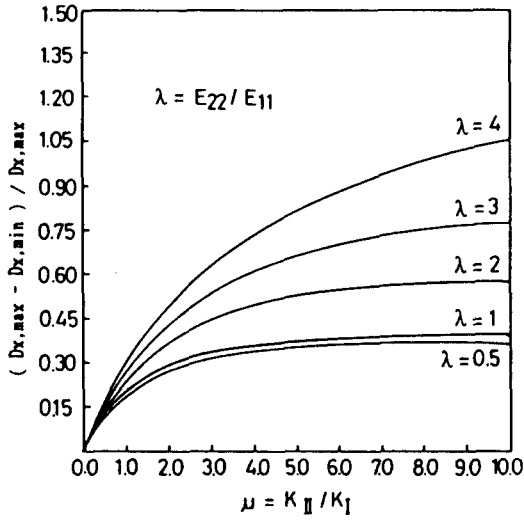


Fig. 6 Variation of the ratio  $(D_{x, max} - D_{x, min}) / D_{x, max}$  with respect to  $\mu = K_{II} / K_I$

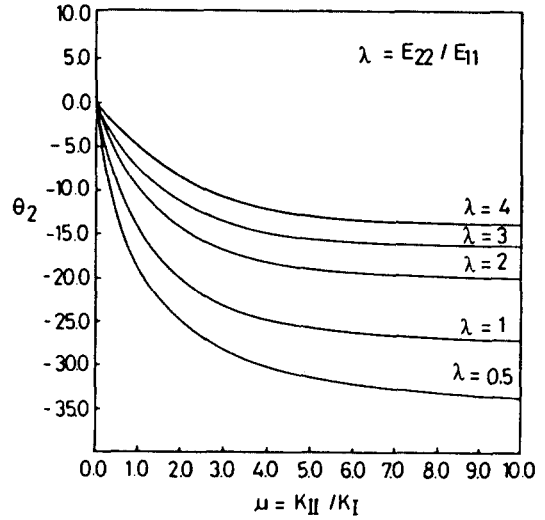


Fig. 8 Variation of  $\theta_2$  with respect to  $\mu = K_{II} / K_I$

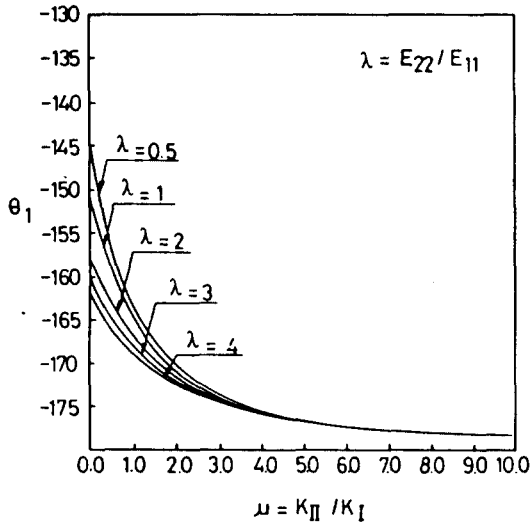


Fig. 7 Variation of  $\theta_1$  with respect to  $\mu = K_{II} / K_I$

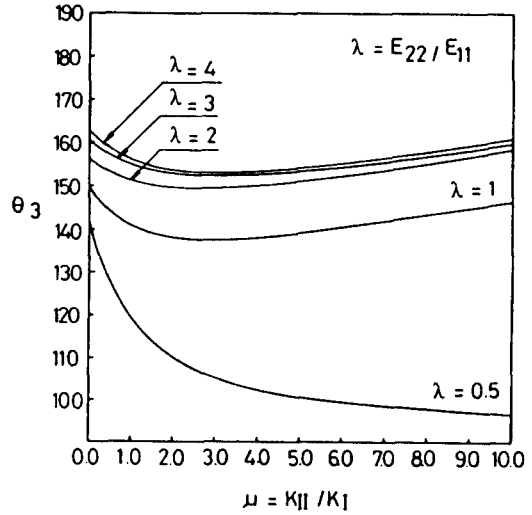


Fig. 9 Variation of  $\theta_3$  with respect to  $\mu = K_{II} / K_I$

$$r' = \{X(Y Y_1 - \mu Y Y_2)\} [m(\cos \theta' (Y Y_1 - \mu Y Y_2) - \lambda^{1/2} \sin \theta' (X X_1 + \mu X X_2))]^{-1} \quad (23)$$

초기곡선  $r$ 은,

$$r = r' (\cos^2 \theta' + \sin^2 \theta' \lambda^{1/2})^{1/2} \quad (24)$$

이며,

$K_I$ 은 식 (22. a)로부터,

$$K_I = (X - m r' \cos \theta') (r')^{1.5} [C(X X_1 + \mu X X_2)]^{-1} \quad (25)$$

혹은, 식 (22. b)로부터,

$$K_I = [-m \lambda^{1/2} (r')^{2.5} \sin \theta'] [C(Y Y_1 - \mu Y Y_2)]^{-1} \quad (26)$$

가 된다.

혼합모드의 경우  $X$ 축과의 교차점이 세 곳(개구



형은 두 곳)이므로 식 (23), (24), (25)의  $X, \theta'$ 에는 어느점에 대한 값을 대입하여도 동일한 결과가 된다.

등방성 재료의 경우( $\lambda=1$ )는, 식 (11)에서  $r'=r$ ,  $\theta'=\theta$ 가 되고, 식 (23), (24), (25)에서 초기곡선 및  $K_I$ 을 구하면 아래와 같다. 즉

$$r = \left[ X \left( \sin \frac{3}{2} \theta + \mu \cos \frac{3}{2} \theta \right) \right] \left[ m \left( \sin \frac{1}{2} \theta + \mu \cos \frac{1}{2} \theta \right) \right]^{-1} \quad (27)$$

$$K_I = (X - m r \cos \theta) r^{1.5} \left[ 2 C \left( \cos \frac{3}{2} \theta - \mu \sin \frac{3}{2} \theta \right) \right]^{-1} \quad (28)$$

혹은,

$$K_I = (-m r^{2.5} \sin \theta) \left[ 2 C \left( \sin \frac{3}{2} \theta + \mu \cos \frac{3}{2} \theta \right) \right]^{-1} \quad (29)$$

이다.

식 (27)~(29)의 타당성을 검증하기 위하여 모드 I의 경우에 대하여, 문헌의 결과<sup>2)</sup>와 비교하면 아래와 같다.

모드 I의 경우는 Fig. 5에서  $X_1, X_3$ 는 겹쳐지며 코스틱상은 대칭이 된다.  $X_1, X_2, X_3$ 에 대한 각도는 Fig. 7~9로부터, 각각  $-151.038^\circ$ ,  $0^\circ$ ,  $151.038^\circ$ 로 고정되므로 이들 값을 식 (28) 혹은 (29)에 대입하여  $X_1, X_2, X_3$ 에 대한 각각의 초기곡선  $r_1, r_2, r_3$ 를 구하면 아래와 같다.

$$r_1 = r_2 = r_3 = (3CK_I/m)^{1/5} = [3C'K_I/\{8(2\pi)^{1/2}\}]^{2/5} \quad (30)$$

이다. 여기서,

$$C' = (4Z_o t c)/m \quad (31)$$

이다.

식 (30)은 참고문헌 (2)의 식 (3.50)과 일치한다.

일반적으로 등방성재료에서 응력확대계수를 구할 때는, 코스틱상의 수평, 수직방향의 최대직경,  $D_t, \max, D_l, \max$ 을 사용하나, 식 (27)~(29)에 의하여  $X$ 축과의 어느 한 교점을 측정하여도 구할 수 있음을 알 수 있다.

또한  $K_{II}$ 는

$$K_{II} = \mu * K_I \quad (32)$$

의 관계로부터 계산할 수 있다.

본 논문에서 제시한 응력확대계수 산출법은 의사등방성재료뿐만 아니라 상의 형상이 유사하게 변하는 일반적 직교이방성재료(특성근이 서로다른 두

허근의 경우)에도 적용될 수 있다고 예상되며 이에 대한 실험 및 검증은 다음 제 2보에서 발표할 예정이다.

## 5. 결 론

(1) 직교이방성재료중 종래의 균열응력장으로는 특이성으로 인하여 코스틱스(Caustics)방법의 적용이 불가능 하였던 재료(의사등방성재료)에 대해서, 코스틱상 및 초기곡선의 식을 이론적으로 구하였으며, 이 식을 컴퓨터그래픽(computer graphic)으로 처리하여 의사등방성재료에 대한 코스틱상을 예시(豫示)하였다.

(2) 의사등방성재료에 대한 응력확대계수 산출법을 제시하였고, 또 이 방법을 이용하여, 지금까지 응력확대계수산출이 곤란했던 일반적인 직교이방성재료(특성근이 서로 다른 두 허근의 경우)의 산출도 가능함을 시사하였다.

(3) 본 논문에서 제시한 응력확대계수 산출법은 등방성재료의 경우에도 사용될 수 있음을 밝혔고, 수식정리 및 이에 의한 컴퓨터 그래픽을 통하여 등방성재료는 의사등방성 재료의 일종임을 증명하였으며 따라서 본 논문의 방법이 등방성 재료 및 의사등방성 재료내 균열의 응력확대계수를 구하는 코스틱 실험법으로 사용될 수 있는 가능성을 제시하였다.

## 참 고 문 헌

- (1) Manogg, P., 1964, "Schattenoptische Messung der Spezifischen Bruchenergie während des Bruchvorgang bei Plexiglas", Physics of Noncrystalline Solids, Proceedings, International Conference, Delft, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, pp. 481~490.
- (2) Theocaris, P.S., 1981, "Elastic Stress Intensity Factors Evaluated by Caustics", Mechanics of Fracture 7, Martinus-nijhoff Pub., pp.189~252.
- (3) Kalthoff, J.F., Beinert, J., 1981, "Experimental Determination of Dynamic Stress Intensity Factors by Shadow Patters", Mechanics of Fracture 7, Martinus-nijhoff Pub, pp.281~330.
- (4) Theocaris, P.S., 1971, "Stress Concentrations in Anisotropic Plates by the Method of Caustics", Journal of Strain Analysis, Vol. 11, No.3, pp.154~160.

- (5) Lekhnitskii, G., 1963, "Theory of Elastic on an Anisotropic Elastic Body", Holden-day, Sanfrancisco, pp.117~128.
- (6) Zhigang Suo, 1989, "Singularity, Interface and Crack in Dissimilar Anisotropic Media", Accepted to Proc. Roy. Soc.
- (7) Liebowiz, 1968, "Fracture, and Advanced Treatise", Vol. 2, Mathematical Fundamentals, Academic Press, New York, pp .125~126.
- (8) 이갑래, 조상봉, 최용식, 1989, "직교이방성 재료에 대한 경제요소법의 기본해에 관한 연구", 한국 자동차 공학회 추계학술대회.
- (9) Theocaris, P.S., 1989, "Definition of the Crack Tip as the Center of the Caustic", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 33, No.3, pp. 553~559.
- (10) Ouk-sub Lee, Min-ku Han and Sung-kyung Hong, 1989, "Effects of Non-singular Stress Terms and Birefingent Coefficient on Caustics under Various Fracture Mode Loadings", KSME Journal, Vol. 3, No. 2, pp. 159~163.
- (11) Theocaris, P.S. and Papis, D., 1981, "Some Further Properties of Caustics Useful in Mechanical Applications", Applied Optics, Vol. 10, No. 23, pp. 4009~4018.