

(論 文)

剪斷 效果를 고려한 새로운 曲線보 要素

崔 鍾 根* · 林 莊 根**

(1990년 10월 15일 접수)

New Curved Beam Elements Including Shear Effects

Jong Keun Choi and Jang Keun Lim

Key Words : Timoshenko's Beam Theory (티모센코 보 이론), Curved Beam Element (곡선보 요소), Strain Element (변형률 요소), Shear Correction Factor (전단 수정 계수)

Abstract

For analyzing curved beam structures more effectively and accurately, two curved beam elements, CSLC (constant strain and linear curvature) and CSCC (constant strain and constant curvature), have been developed on the basis of Timoshenko's beam theory and curvilinear coordinate. These curved beam elements, being modified from the conventional strain element which has been applied only to Euler beam analysis, have no spurious constraints and any locking characteristics, and so show the rapid and stable convergence on the wide range of beam length to height ratio. Especially, the accuracy of CSLC element is very excellent and these elements, having two nodes, are very convenient to use.

1. 서 론

아치 (arch) 와 같은 곡선보 (curved beam) 문제 를 직선보 요소로 해석할 때는 그의 기하학적인 특성 때문에 매우 큰 오차를 유발하게 되므로^(1,2) 곡선 보를 효과적으로 해석하기 위하여 곡선보 요소에 관한 연구⁽³⁻⁷⁾가 활발히 수행되어 왔다.

1971년 Ashwell⁽⁷⁾의 해석은 얇은 셀에 성립하고 변형률과 곡률 및 변위관계의 미분방정식해를 곡선 보 요소의 형상함수로 도입하는 변형률 요소 (strain element)를 개발하여 지금까지 연구되어 온 여러가지 결과보다 매우 우수한 결과를 얻을 수 있었다.

1982년 Belytschko & Stolarski⁽⁸⁾와 Prathap & Bhashyam⁽⁹⁾이 각각 막강성 과잉 (membrane lock-

ing) 개념과 막 강성 과잉에 의한 해의 부정확성을 지적하고 이의 해결을 위하여 감차적분법 (reduced integration)을 제시하였다.

1989년 Cook⁽¹⁰⁾은 Maguerre의 셀 이론에 의한 법선 방향 처짐이 접선 방향 변형에 미치는 영향을 고려하여 막 강성 과잉을 피할 수 있는 간단하고도 비교적 정확한 곡선보 요소를 제시하였다.

그러나 이들 연구는 곡률이 비교적 작은 얇은 굽힘보에서 비교적 좋은 결과를 얻을 수 있었으나 전 단 효과를 무시하였기때문에 두꺼운 굽힘보에서는 동일한 결과를 기대할 수 없다.

전단을 고려한 Timoshenko 보에 대해서는 Prathap, Bhashyam^(11,12)이 막 강성 및 전단 강성 과잉 (membrane and shear locking)의 개념을 정량 적으로 설명하고 요소의 형상함수에서 가상 에너지 (spurious energy)를 유발하는 가상 구속 (spurious constraint)을 제거하므로써 곡선보에 대한 이의 결과 가 엄밀해서 수렴하는 매우 좋은 결과를 보였다.

* 한양대학교 대학원

** 정회원, 한양대학교 공학대학 기계공학과

본 연구에서는 Ashwell이 제시한 변형률요소⁽⁷⁾를 전단효과를 고려한 두꺼운 곡선보 요소에 적용하였다. 막 변형률, 곡률, 전단변형률 각각에 독립된 변형률 함수를 가정하여 미분 방정식의 일반해를 구하면 정확한 강체변위의 표현은 물론, 강성과 잉현상을 피할 수 있고 얇은 곡선보에서 두꺼운 곡선보에 이르기까지 보의 해석에 있어서, 2절점으로 구성되는 적은 자유도수에서 높은 정확도를 보여주는 간편하고도 효율적인 요소를 개발하고자 하였다.

2. Timoshenko보의 곡선요소

2.1 곡선 변형률 요소

Fig. 1과 같은 곡선보 요소에서 변형률-변위의 관계식은 Timoshenko보 이론을 적용하면 다음과 같이 표시된다⁽¹²⁾.

$$\epsilon = -\frac{du}{dx} + \frac{w}{R} = f_\epsilon(x) \quad (1)$$

$$\kappa = \frac{d\theta}{dx} = f_\kappa(x) \quad (2)$$

$$\gamma = \theta - \frac{dw}{dx} + \frac{u}{R} = f_\gamma(x) \quad (3)$$

이들 식에서 ϵ 는 축방향 변형률(axial strain)이며 κ 는 곡률(curvature), γ 는 전단 변형률(shear strain)이고, u, w 는 원주 방향 및 반경 방향의 변위, θ 는 보의 회전각(rotational angle)을 나타낸다.

$\epsilon = \kappa = \gamma = 0$ 이 되는 강체 변위(rigid body displacements)에서 식 (1), (2), (3)은 $\phi = x/R$ 로 할 때

$$u = -a_1 \sin\phi + a_2 \cos\phi + a_3 \quad (4)$$

$$w = a_1 \cos\phi + a_2 \sin\phi \quad (5)$$

$$\theta = -a_3 \frac{1}{R} \quad (6)$$

와 같이 적분되어 이들 식을 요소의 형상함수에 도입한 변형률 요소(strain element)는 곡선보 해석

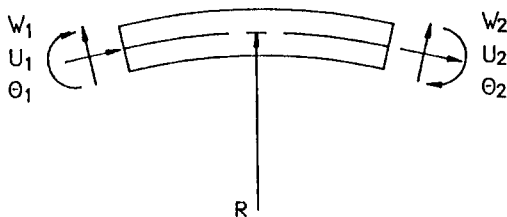


Fig. 1 Curved beam element

에 중요한⁽¹⁴⁾ 강체 변위를 ϕ 의 함수로 정확하게 표시할 수 있다.

변형률 모드에서 식 (1), (2), (3)의 $f_\epsilon(x), f_\kappa(x), f_\gamma(x)$ 를 적절히 가정하여 변위 성분의 특이해를 구하므로써 곡선보 요소의 변형 특성을 정확하게 표현할 수 있다.

본 논문에서는 두가지 경우에 대하여 고려해 본다.

(1) f_ϵ, f_γ 를 상수, f_κ 를 선형 변화로 가정한 경우 $C_1 \sim C_4$ 를 미지 상수라고 할 때

$$\begin{aligned} f_\epsilon &= C_1 \\ f_\kappa &= C_2 + C_3\phi \\ f_\gamma &= C_4 \end{aligned} \quad (7)$$

로 가정하고 식 (1), (2), (3)에 대입하여 적분한 다음 식 (4), (5), (6)의 강체 변위와 결합하면 변위 함수(displacement function)는

$$u = -C_2\phi - \frac{1}{2}RC_3\phi^2 + C_5 - C_6\sin\phi + C_7\cos\phi \quad (8)$$

$$w = C_1 + C_2 + RC_3\phi + C_6\cos\phi + C_7\sin\phi \quad (9)$$

$$\theta = \frac{1}{R}C_2\phi + \left(1 + \frac{1}{2}\phi^2\right)C_3 + C_4 - \frac{1}{R}C_5 \quad (10)$$

로 정리할 수 있다. 여기서 식 (4), (5), (6)의 미정계수 a_1, a_2, a_3 는 편의상 C_6, C_7, C_5 로 대체하였다.

식 (8), (9), (10)은 요소내의 변형률이 일정하고 곡률만이 선형으로 변화하는 변형 특성을 표시하고 있으며 7개의 미정계수($C_1 \sim C_7$)로 표시되어 절점 자유도보다 1개가 많기 때문에 이들 식을 요소의 형상함수에 도입할 때에는 특별한 배려가 필요하다.

(2) $f_\epsilon, f_\gamma, f_\kappa$ 를 모두 상수로 가정한 경우

C_1, C_2, C_3 를 미지 상수라고 할 때

$$\begin{aligned} f_\epsilon &= C_1 \\ f_\kappa &= C_2 \\ f_\gamma &= C_3 \end{aligned} \quad (11)$$

로 가정하여 식 (1), (2), (3)에 대입하고 일반해를 구하면

$$u = -R^2C_2\phi + RC_3 - RC_4 - C_5\sin\phi + C_6\cos\phi \quad (12)$$

$$w = RC_1 + R^2C_2 + C_5\cos\phi + C_6\sin\phi \quad (13)$$

$$\theta = RC_2\phi + C_4 \quad (14)$$

로 정리할 수 있다. 여기서 식 (4), (5), (6)의 미정계수 a_1, a_2, a_3 는 C_5, C_6, C_4 로 대체하였다. 이들 식은 곡선보 요소내의 변형률 및 곡률이 모두 일정한 경우의 변형 특성을 보이며 미정계수($C_1 \sim C_6$)의

개수가 절점 자유도의 개수와 일치하므로 이들 식을 이용한 요소 강성행렬은 쉽게 구할 수 있다.

$$U^e = \frac{1}{2} \{C\}^T [K_{2c}]^e \{C\} \quad (21)$$

$$[K]_2^e = [A_2^{-1}]^T [K_{2c}]^e [A_2^{-1}] \quad (22)$$

2.2 곡선보 요소의 강성행렬

본 요소의 강성행렬을 유도하기 위하여 일반화된 좌표계 (generalized coordinates)⁽¹⁵⁾를 이용하였다.

(1) 일정 변형률 및 선형 곡률 변화인 경우 (CSLC 요소)

식 (8), (9), (10)으로 표시된 변위 성분을 요소의 강성행렬유도에 도입하기 위하여 미정계수 $C_1 \sim C_7$ 을 절점 자유도로 표시하여야 한다. 그런데 절점 자유도는 Fig. 1과 같이 6개 뿐이므로 요소 중앙에 가상 절점을 취하여 이점에서의 원주 방향 변위를 u_3 로 정의하면 이들 미정계수와 절점 변위사이에는 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$\{\delta_i\} = [A_1] \{C\} \quad (15)$$

식 (15)에서 $\{C\}$ 는 미정계수 $C_1 \sim C_7$ 을 포함하는 벡터이고 $\{\delta_i\} = [u_1 \ w_1 \ \theta_1 \ u_2 \ w_2 \ \theta_2 \ u_3]^T$ 로 표시되는 절점 변위 벡터이다. 한편, Timoshenko보의 변형률 에너지는

$$U^e = \frac{1}{2} EA \int_{x_1}^{x_2} \epsilon^2 dx + \frac{1}{2} EI \int_{x_1}^{x_2} \kappa^2 dx + \frac{1}{2} \beta^2 GA \int_{x_1}^{x_2} \gamma^2 dx \quad (16)$$

로 표시되며⁽¹²⁾, 식 (16)에 식 (7)을 대입하면 다음과 같은 변형률 에너지의 미정계수 벡터로의 표현이 가능하다.

$$U^e = \frac{1}{2} \{C\}^T [K_{1c}]^e \{C\} \quad (17)$$

식 (15)를 식 (17)에 대입하면 아래와 같이 변형률 에너지의 변위 벡터로의 표현과 함께 곡선보 요소의 강성행렬을 구할 수 있다.

$$U^e = \frac{1}{2} \{\delta_i\}^T [A_1^{-1}]^T [K_{1c}]^e [A_1^{-1}] \{\delta_i\} \quad (18)$$

$$[K]_1^e = [A_1^{-1}]^T [K_{1c}]^e [A_1^{-1}] \quad (19)$$

단, 식 (16)에서 EA, EI, GA 는 인장, 굽힘 및 전단 강성이며 β^2 은 전단 수정계수이다 식 (19)에서 가상 절점 변위 u_3 에 상당하는 행과 열을 정적 응축하면 6×6 의 요소행렬을 얻을 수 있다.

(2) 변형률 및 곡률이 일정한 경우 (CSCC 요소)

Fig. 1의 절점 자유도를 고려하여 식 (12), (13), (14)에서 미정계수 $C_1 \sim C_6$ 와 절점 변위 벡터의 관계를 구한 다음, 식 (11)를 식 (18)의 변형률 에너지 식에 대입하면 다음과 같이 요소 강성행렬을 구할 수 있다.

$$\{\delta_2\} = [A_2] \{C\} \quad (20)$$

3. 수치계산

3.1 해석모델

Fig. 2와 같은 롤러 힌지 (roller hinge)의 아치형 곡선보를 계산 모델로 택하였으며 곡선보의 탄성계수 $E=10^8 \text{kg/cm}^2$, 프와송비 $\nu=0.3$, 전단 수정계수 $\beta^2=0.85$ 이고 하중 $P=10 \text{kg}$ 을 작용시켰다.

본 논문에서 제시한 곡선보 요소의 광범위한 적용 특성을 보이기 위하여 Fig. 2에서 보 단면의 높이 $H=1 \text{cm}$, 폭 $B=1 \text{cm}$ 로 하고 길이를 늘려 길이의 높이에 대한 비 (L/H)를 1, 5, 10, 20, 40, 60, 80,

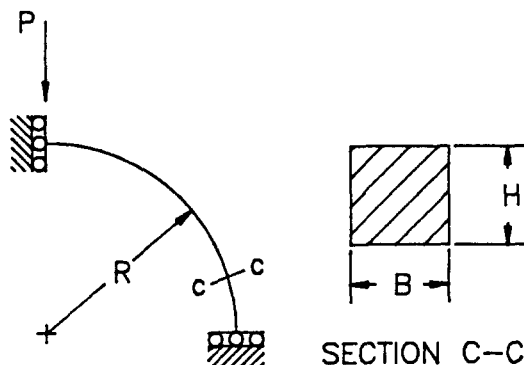


Fig. 2 Roller hinge model

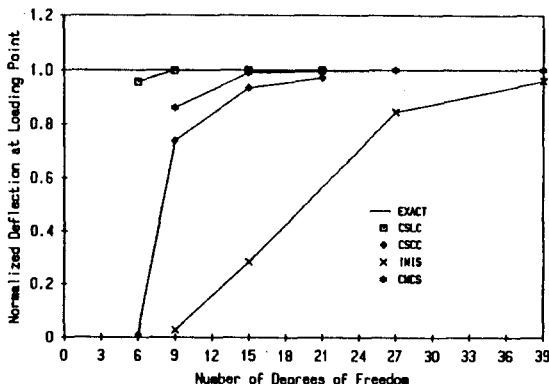


Fig. 3 Convergence characteristics of various curved beam elements

100과 같이 변화시켜 요소의 안정특성을 검토하였다.

3.2 해의 정확도

본 논문에서 제시한 두가지 곡선보 요소 CSLC, CSCC의 정확도를 확인하기 위하여 전단과 막변형에서 가성구속이 모두 존재하는 기존의 3절점 2차 요소(IMIS)^(12,13)와 Prathap⁽¹²⁾이 제시한 전단과 막변형에서 가성구속이 모두 제거된 3절점 2차 곡선보 요소(CMCS)로써 동일한 모델을 해석하고 그 결과를 비교하였다. 계산 방법은 요소 분할 개수를 1, 2, 4, 6으로 변환시키면서 각 요소에 대하여 Castigliano정리에 의한 엄밀해⁽¹⁵⁾의 수렴 특성을 조사하였다.

Fig. 3은 분할 요소의 개수를 증가시키기에 따라서 Fig. 2에 보인 하중점의 처짐이 엄밀해에 수렴하는 특성을 도시한 것이다.

각 요소로써 계산한 처짐은 엄밀해의 값으로 무차원화 시킨 것이며 2차 요소로써 아치와 같은 곡선보를 해석할 때에는 분할 요소의 개수를 6개 이상하여야 오차를 5%이하로 줄일 수 있음을 알 수 있다. 본 논문에서 제시한 선형 곡률 요소(CSLC)의 수렴 특성은 동일한 자유도에서 특히 분할 요소의 개수가 적은 경우에 Prathap이 제시한 CMCS 요소보다 수렴 속도가 매우 빠르며 2절점 1요소로도 충분히 엄밀해에 수렴함을 보인다. CSCC 요소의 수렴속도가 다소 떨어지는 이유는 요소내에서 곡률을 일정하게 가정하여 실제의 곡선보 거동과는 불합리한 양상을 보여주는 것으로 사료되지만 요소수가 많아지면 매우 안정된 결과로 엄밀해에 수렴하게 된다.

3.3 해의 안정성

본 논문에서 제시한 곡선보 요소(CSLC, CSCC)의 적용 한계를 보기 위하여 길이와 높이의 비(L/H)를 변화시켜서 계산한 결과를 Table 1에 수록하였다.

Table 1의 수치는 Fig. 2의 계산 모델을 9, 15, 21개의 자유도로서 요소분할하여 계산한 하중점의 처짐량을 엄밀해로 무차원화한 값으로 CSLC, CSCC, CMCS 요소들은 L/H 의 넓은 범위에서 비교적 안정된 수렴 특성을 보인다. 그러나 IMIS 요소는 전단과 막변형에 대한 가성구속이 존재하여 전 범위에 걸쳐 가성구속이 제거된 다른 요소보다 오차가

Table 1 Accuracy of various curved beam elements according to the ratios of L/H

L/H	Number of D.O.F.	Normalized deflection at loading point			
		CSLC	CSCC	CMCS	IMIS
1	9	0.9584	0.9097	0.9436	0.8834
	15	0.9895	0.9770	0.9957	0.9878
	21	0.9953	0.9897	0.9991	0.9973
5	9	0.9901	0.7664	0.8754	0.3153
	15	0.9979	0.9407	0.9906	0.8249
	21	0.9991	0.9735	0.9980	0.9549
10	9	0.9952	0.7432	0.8643	0.1022
	15	0.9992	0.9348	0.9898	0.5740
	21	0.9997	0.9709	0.9979	0.8574
20	9	0.9967	0.7365	0.8611	0.0275
	15	0.9996	0.9331	0.9896	0.2831
	21	0.9999	0.9701	0.9980	0.6570
40	9	0.9971	0.7347	0.8604	0.0070
	15	0.9997	0.9326	0.9897	0.0965
	21	0.9999	0.9699	0.9984	0.3646
60	9	0.9972	0.7344	0.8603	0.0031
	15	0.9998	0.9325	0.9900	0.0461
	21	0.9999	0.9699	0.9991	0.2115
80	9	0.9972	0.7343	0.8604	0.0017
	15	0.9998	0.9325	0.9905	0.0261
	21	0.9999	0.9699	1.0000	0.1334
100	9	0.9972	0.7342	0.8605	0.0011
	15	0.9998	0.9325	0.9911	0.0172
	21	0.9999	0.9699	1.0013	0.0905

크게 나타나고 있음을 알 수 있다. 물론 이와 같은 결과는 요소를 세분하여 계의 자유도수를 증가시키면 다소 향상시킬 수 있을 것으로 사료된다.

요소의 분할 개수가 적은 경우(9개의 자유도)에 L/H 가 커짐에 따른 해의 부정확성은 Fig. 4에서 알 수 있듯이 CMCS, CSCC 요소들에서도 명확하게 나타나지만 CSLC 요소는 L/H 의 전 영역에서 매우 안정된 수렴 특성을 보인다.

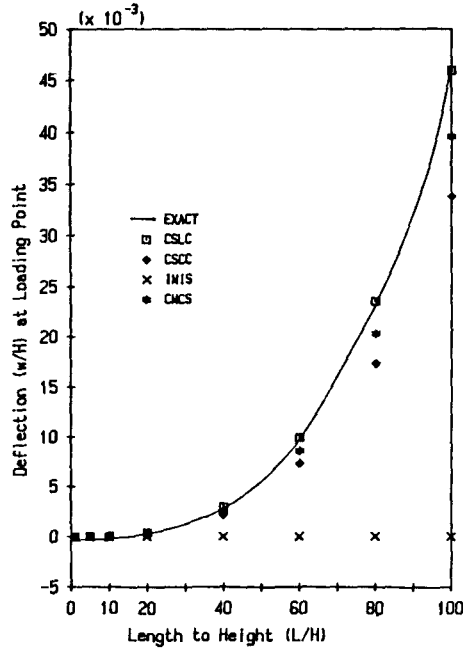


Fig. 4 Deflections (w/H) at loading point according to the ratios of L/H ($H/B=1$)

4. 결 론

아치(arch)와 같은 곡선보를 보다 효과적이고 정확하게 해석하기 위하여 Timoshenko 보이론에 근거한 곡선보 요소를 개발하였다. 이 곡선보 요소는 강제 변위가 기하학적인 위치 함수로 표현되고 막 강성 및 전단 강성의 가상 구속이 전혀없어 매우 정확한 결과를 보여주었으며 보의 단면 특성이나 길이에 관계없이 폭 넓게 적용될 수 있음을 제시하였다. 본 논문에서 제시한 2가지 형태의 곡선보 요소중에 선형 곡률로 가정한 요소(CSLC)의 수렴 특성은 매우 우수하였으며 이들 요소는 2절점 1요소로 구성되기 때문에 일반 Euler보 해석에 적용되는 보 요소와 요소 분할에 있어서 동일하게 사용할 수 있다.

참 고 문 헌

(1) Murray, K. H., 1966, "Comments on the Convergence of Finite Element Solutions", American Institute of Aeronautics & Astronautics Journal, Vol. 4,

pp. 815~816.

(2) Walz, J. E., Fulton, R. E., Cyrus, N. J. and Eppink, R. T., 1970, "Accuracy of Finite Element Approximations to Structural Problems", NASA TN-D 5728.
 (3) Cantin, G., and Clough, R. W., 1968, "A Curved, Cylindrical Shell, Finite Element", American Institute of Aeronautics & Astronautics Journal, Vol. 6, No. 6, pp. 1057~1062.
 (4) Bogner, F. K., Fox, R. L., and Schmit, L. A., 1967, "A Cylindrical Shell Discrete Element", American Institute of Aeronautics & Astronautics Journal, Vol. 5, No. 4, pp. 745~750.
 (5) Cowper, G. R., Lindberg, G. M., and Olsen, M. D., 1970, "A Shallow Shell Finite Element of Triangular Shape", International Journal of Solids and Structures, Vol. 6, No. 8, pp. 1133~1156.
 (6) Dupuis, G., and Goel, J. J., 1970, "A Curved Finite Element for Thin Elastic Shells", International Journal of Solids and Structures, Vol. 6, No. 11, pp. 1413~1428.
 (7) Ashwell, D. G., Sabir, A.B., and Roberts, T. M., 1971, "Further Studies in the Application of Curved Finite Elements to Circular Arches", International Journal of Mechanical Science, Vol. 13, No. 6, pp. 507

- ~517.
- (8) Stolarski, H. and Belytschko, T., 1981, "Membrane Locking and Reduced Intergration for Curved Elements", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 49, pp. 172~178.
- (9) Prathap, G. and Bhashyam, G. R., 1982, "Reduced Integration and the Shear Flexible Beam Element", *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 18, pp. 195~210.
- (10) Cook, R. D., 1989, "On Membrane-bending Coupling in Simple Arch and Shell Finite Elements", *Technical Report in Engineering College, University of Wisconsin, Madison*.
- (11) Babu, C.R., and Prathap, G., 1986, "A Linear Thick Curved Beam Element", *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, pp. 1313~1328.
- (12) Prathap, G. and Babu, C. R., 1986, "An Isoparametric Quadratic Thick Curved Beam Element", *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, pp. 1583~1600.
- (13) Cook, R. D., 1989, "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", pp. 429~447, 3rd ed., John Wiley & Sons.
- (14) Heppler, G. R. and Hansen, J. S., 1987, "Timoshenko Beam Finite Elements Using Trigonometric Basis Functions", *American Institute of Aeronautics & Astronautics Journal*, Vol. 26, No. 11, pp. 1378~1386.
- (15) Yang, T. Y., 1986, "Finite Element Structural Analysis", pp. 115~116, pp. 191~192, Prentice-Hall.