

研究論文

大韓熔接學會誌
第9卷第2號 1991年 6月
Journal of the Korean
Welding Society
Vol. 9, No. 2, Jun., 1991

有限要素法에 의한 厚板熔接時의 3次元 非定常熱傳導解析

방 한 서* · 김 유 철**

Analysis on The Three-Dimensional Unstationary Heat Conduciton on The Welding of Thick Plate by F. E. M.

H.S. Bang*, Y.C. Kim**

Key Words : Elasto-plastic Behavior(탄소성 거동), Heat Source(열원), Natural Coordinate(자연좌표계), Jacobian Operator(야코비안 작용소), Interpolation(shape) Function(형상함수), Sampling Point(표본점(標本点)), Heat Radiation(열방사), Heat Conduction(열전도), Heat Transfer(열전달), Temperature History(온도이력)

Abstract

In order to analyze the mechanical phenomena of three dimensional elasto-plastic behavior caused by welding of thick plate, it is necessary to solve exactly the three dimensional unstationary heat conduction problem considering the moving effect of heat source and the temperature-dependence of material properties.

In this paper, the three-dimensional unstationary heat conduction problem is formulated by using an isoparametric finite element method. Thereafter, the transient temperature distributions, according to time, of thick plate during welding are defined from the results calculated by the developed computer program.

1. 서 론

厚板의 용접 또는 열처리를 할때 반드시 발생되어지는 용접변형 및 용접응력은 근본적으로 이동(移動)

하는 열원(熱源)을 고려한 열원주위를 기점으로 하는 3次元的인 온도분포에 기인(起因)하는 것이다. 따라서 용접체(熔接體)의 용접잔류응력 및 용접변형을 정확하게 규명하기 위해서는 반드시 3차원 비정상열전

* 정회원, 조선대학교 공과대학 조선공학과

** 정회원, 일본오사카대학 용접연구소

도 해석을 하여야 할 필요가 있다. 종래에는 용접체 형상(形狀)의 단순화(예, 무한원판등), 또는 용접열원의 이상화^{1),2)}(예, 점열원(點熱源), 또는 선열원(線熱源)) 및 온도의존성에 의한 재료정수의 일정화(一定化)에 의한 해석해나 차분법³⁾ 등을 사용하여 왔으나, 최근 전산기의 대형화 및 고속화에 힘입어 유한요소법이 열전도 분야^{4),5)}에서도 널리 사용되어지고 있다.

본 論文에서는, 8절점 아이소파라메트릭 유한요소법을 이용한 3차원 비정상열전도 문제의 수치해석을 가능하도록하여, 厚板뿐만 아니라 각종 형상의 용접 구조물의 용접시 온도분포 해석을 가능할 수 있도록 하였다. 특히 용접열원의 이동효과를 고려하였을 뿐만 아니라 지금까지 난문제로 남아있는 재료정수 즉 열전도율(α), 비열(c) 및 밀도(ρ) 등의 온도 의존성을 충분히 고려하였다. 그리고 아이소파라메트릭 유한요소법의 사용으로 절점이외의 임의의 점(즉, 적분점)에서의 온도도 추출 가능하도록 하였다. 또한 본 연구에서는 厚板용접시의 온도분포 및 그 특성을 규명하고자 하였다.

2. 有限要素法에 의한 3차원 비정상 열전도 해석

2. 1. Galerkin 법에 의한 유한요소법의 정식화⁶⁾

3차원 비정상열전도 문제의 기본 미분 방정식은

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T + Q \quad (1)$$

여기서, T: 온도(°C), ρ : 밀도(g/cm³), c: 비열(cal/g/°C), λ : x, y 및 z방향의 열전도율(cal/cm/sec/°C), t: 시간(sec), Q: 단위시간당 입열량(cal/sec)이다.

物體의 周邊에 있어서의 熱的境界條件은 아래식으로 表現된다.

$$q = -\alpha \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2)$$

여기서, q: 열유속(Heat flow)(cal/sec/cm²)

n: 物體表面의 外法線方向이다.

α : 열전달 계수.

또한 열전달 및 열放射에 관하여서는 문헌 1)을 참

고바람.

3차원 비정상열전도문제를 Galerkin法에 기본하여 유한요소법으로의 정식화를 하였다. 우선, 여기서 해석대상 모델을 유한개로 分割하여, 한 要素內的 溫度 分布를 아래식으로 표현한다.

$$T(x, y, z, t) = [N(x, y, z)]\{\theta(t)\} \quad (3)$$

여기서, [N]: 절점온도와 요소내의 온도를 연결짓는 형상함수 Matrix,

$\{\theta\}$: 시간 t에 대한 요소의 절점온도

Vector,

T: 要素溫度이다.

식(1)에다 형상함수 [N]을 Weighting 함수로하여 Galerkin법을 적용하면 아래식과 같이 된다.

$$\int_v [N]^T \left\{ \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + Q - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \right\} \cdot dV = 0 \quad (4)$$

식(4)을 Green-Gauss 정리에 의하여 展開하고 그 결과식이다 식(3)의 형상함수 및 Fourier법칙인 식(2)의 경계조건식을 代入하면 아래의 결과식을 도출하게 된다.

$$\begin{aligned} & - \int_v \lambda \left(\frac{\partial [N]^T}{\partial x} \cdot \frac{\partial [N]}{\partial x} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \cdot \frac{\partial [N]}{\partial y} + \frac{\partial [N]^T}{\partial z} \cdot \frac{\partial [N]}{\partial z} \right) \cdot dV \{\theta(t)\} \\ & - \int_s \alpha_c [N]^T [N] dS \{\theta(t)\} \\ & + \int_s \alpha_c T_c [N]^T dS + \int_v [N]^T Q dV \\ & - \int_v \rho c [N]^T [N] dV \frac{\partial \{\theta(t)\}}{\partial t} = 0 \quad (5) \end{aligned}$$

여기서, α_c : 열전달계수(cal/cm²/sec/°C)

T_c : 외부온도(°C)

上記의 3차원비정상 열전도식을 Matrix化하면 다음식과 같다.

$$[K]\{\theta\} + [C]\left\{\frac{\partial \theta}{\partial t}\right\} = \{F\} \quad (6)$$

또한 식(6)에서 $\left\{\frac{\partial \theta}{\partial t}\right\}$ 의 非定常問題를 差分離散化⁴⁾하면 최종적으로 아래식으로 유도되어진다.

$$\begin{aligned} & \left([K] + \frac{2}{\Delta t} [C] \right) \{\theta^A\} \\ & = \{F\} + [C] \left(\frac{2}{\Delta t} \{\theta^B\} + \left\{ \frac{\partial \theta^B}{\partial t} \right\} \right) \quad (7) \end{aligned}$$

여기서, Δt : 시간增分,

θ^B : 증분前의 절점溫度,

θ^A : 증분後의 절점온도,

[K] : 열전도 Matrix,

[C] : 熱容量 Matrix,

{F} : 熱流束 Matrix

2.2. 8節點 아이소파라메트릭 유한요소법에 의한 離散化

아이소파라메트릭 요소에서는, -1부터 +1까지 변화하는 파라메트에 의한 自然座標系(r, s, t)를 이용하여 요소좌표와 요소변수를 동일형상함수에 의하여 표현한다. 즉, 이 자연좌표계는 요소의 변형에 부응하여 변형하는 物質座標이다. Fig. 1은 8절점 아이소파라메트릭 6面體를 基本으로 하는 3차원 要素이다. 좌표 및 온도의 보간식은 아래와 같다.

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^8 N_i y_i, \quad z = \sum_{i=1}^8 N_i z_i, \quad (8)$$

요소온도의 형상함수는 아래와 같다.

$$\{T\} = \sum_{i=1}^8 N_i \theta_i = [N]\{\theta\}$$

$$T' = \left\{ \frac{\partial T}{\partial r} \right\} = \left\{ \frac{\partial [N]}{\partial r} \right\} \{\theta\} = [B]\{\theta\} \quad (9)$$

여기서, $i=1, \dots, 8$, i : 절점수, x, y 및 z 는 국부좌표이다.

또한 8절점의 형상함수는

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ N_7 \\ N_8 \end{Bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{Bmatrix} (1+r) & (1+s) & (1+t) \\ (1-r) & (1+s) & (1+t) \\ (1-r) & (1-s) & (1+t) \\ (1+r) & (1-s) & (1+t) \\ (1+r) & (1+s) & (1-t) \\ (1-r) & (1+s) & (1-t) \\ (1-r) & (1-s) & (1-t) \\ (1+r) & (1-s) & (1-t) \end{Bmatrix} \quad (10)$$

전체좌표계와 자연좌표계와의 關係는 아래와 같다.

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(r, s, t), & r &= f_4(x, y, z) \\ y &= f_2(r, s, t), & s &= f_5(x, y, z) \\ z &= f_3(r, s, t), & t &= f_6(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

여기서 식(11)의 도함수를 구하면

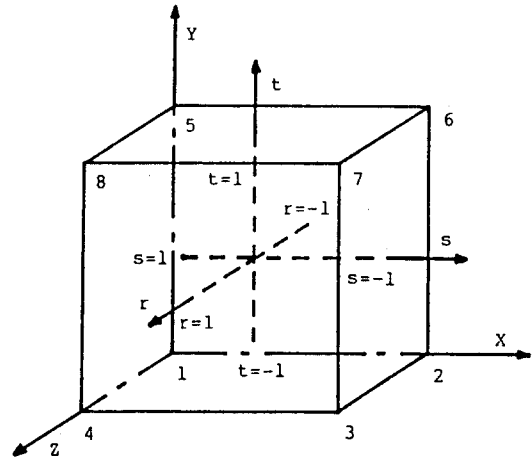


Fig. 1 8-node three-dimensional isoparametric element

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

식(12)을 간단화 하면

$$\frac{\partial}{\partial r} = \mathbf{J} \frac{\partial}{\partial x}, \quad \text{또는} \quad \frac{\partial}{\partial x} = \mathbf{J}^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \quad (13)$$

여기서, \mathbf{J} : Jacobi의 작용소 (Jacobian operator)이다.

또한 좌표는

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \frac{1}{8} \{ (1+s)(1+t)x_1 - (1+s)(1+t)x_2 \\ &\quad - (1-s)(1+t)x_3 + (1-s)(1+t)x_4 \\ &\quad + (1+s)(1-t)x_5 - (1+s)(1-t)x_6 \\ &\quad - (1-s)(1-t)x_7 + (1-s)(1-t)x_8 \} \\ \frac{\partial x}{\partial s} &= \frac{1}{8} \{ (1+r)(1+t)x_2 + (1-r)(1+t)x_3 \\ &\quad - (1-r)(1+t)x_4 - (1+r)(1+t)x_5 \\ &\quad + (1+r)(1-t)x_6 + (1-r)(1-t)x_7 \\ &\quad - (1-r)(1-t)x_8 - (1+r)(1-t)x_9 \} \\ \frac{\partial x}{\partial t} &= \frac{1}{8} \{ (1+r)(1+s)x_1 + (1-r)(1+s)x_2 \\ &\quad + (1-r)(1-s)x_3 + (1+r)(1-s)x_4 \\ &\quad - (1+r)(1+s)x_5 - (1-r)(1+s)x_6 \\ &\quad - (1-r)(1-s)x_7 - (1+r)(1-s)x_8 \} \end{aligned} \quad (14)$$

온도는

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial r} &= \frac{1}{8} \{ (1+s)(1+t)\theta_1 - (1+s)(1+t)\theta_2 \\ &\quad - (1-s)(1+t)\theta_3 + (1-s)(1+t)\theta_4 \\ &\quad + (1+s)(1-t)\theta_5 - (1+s)(1-t)\theta_6 \\ &\quad - (1-s)(1-t)\theta_7 + (1-s)(1-t)\theta_8 \} \\ \frac{\partial T}{\partial s} &= \frac{1}{8} \{ (1+r)(1+t)\theta_1 + (1-r)(1+t)\theta_2 \\ &\quad - (1-r)(1+t)\theta_3 - (1+r)(1+t)\theta_4 \\ &\quad + (1+r)(1-t)\theta_5 + (1-r)(1-t)\theta_6 \\ &\quad - (1-r)(1-t)\theta_7 - (1+r)(1-t)\theta_8 \} \quad (15) \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{1}{8} \{ (1+r)(1+s)\theta_1 + (1-r)(1+s)\theta_2 \\ &\quad + (1-r)(1-s)\theta_3 + (1+r)(1-s)\theta_4 \\ &\quad - (1+r)(1+s)\theta_5 - (1-r)(1+s)\theta_6 \\ &\quad - (1-r)(1-s)\theta_7 - (1+r)(1-s)\theta_8 \}\end{aligned}$$

식(9), (13), (14) 및 식(15)로부터 온도구배 보간 Matrix $\left\{ \frac{\partial T}{\partial r} \right\} = 1$ 係數 Matrix $[B]$ 는 아래와 같이 유도되어 진다.

$$\begin{aligned}[B]_{ijk} &= \frac{1}{8} \times J_{ijk}^{-1} \\ &\left(\begin{array}{l} (1+s_j)(1+t_k) - (1+s_j)(1-t_k) \\ (1+r_i)(1+t_k) + (1-r_i)(1-t_k) \\ (1+r_i)(1+s_j) + (1-r_i)(1+s_j) \\ - (1-s_j)(1+t_k) + (1-s)(1+t) \\ - (1-r_i)(1+t_k) - (1+r)(1-t) \\ + (1-r_i)(1-s_j) + (1+r)(1-s) \\ + (1+s)(1-t) - (1+s)(1-t) \\ + (1+r)(1-t) + (1-r)(1-t) \\ - (1+r)(1+s) - (1-r)(1+s) \\ - (1-s)(1-t) + (1-s)(1-t) \\ - (1-r)(1-t) - (1+r)(1-t) \\ - (1-r)(1-s) - (1+r)(1-s) \end{array} \right) \quad (16)\end{aligned}$$

여기서, i, j 및 k 는 Gauss 수치적분의 표본점(標本點)의 數이다. 또한 열전도율 α 를 포함한 재료의 特性 Matrix $[D]$ 는 等方性일 경우 다음과 같이 표시된다.

$$[D] = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad (17)$$

3次元 要素의 微小體積(dV) 및 面積(dS)를 자연 좌표계로 표현하면, 미소체적은

$$\begin{aligned}dV &= dx dy dz = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} dr ds dt \\ &= \det \mathbf{J} dr ds dt \quad (18)\end{aligned}$$

$$dV = \sum_{ijk} \det \mathbf{J}_{ijk} dr_i ds_j dt_k \quad (19)$$

微小面積은

$$dS_x = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} ds dt = \det \mathbf{J}_x^s dr dt \quad (20)$$

$$dS_y = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} dt dr = \det \mathbf{J}_y^s dt dr \quad (21)$$

$$dS_z = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \end{pmatrix} dr ds = \det \mathbf{J}_z^s dr ds \quad (22)$$

$$\text{즉, } dS = \sum_{ij} \det \mathbf{J}^s dr_i ds_j \quad (23)$$

로 표현되고, 따라서 식(16), (17), (19) 및 식(23)을 식(5) 및 식(7)에 代入하면 한요소 열전도 Matrix, 열용량 Matrix 및 열유속 Vector는 아래와 같이 유도된다.

$$\begin{aligned}[K] &= \sum_{ijk} \beta_{ijk} [B]_{ijk}^T [D] [B]_{ijk} \det \mathbf{J}_{ijk} dr_i ds_j dt_k \\ &\quad + \sum_{ij} \beta_{ij} \alpha_c [N]_{ij}^T [N]_{ij} \det \mathbf{J}_{ij} dr_i ds_j \quad (24)\end{aligned}$$

$$[C] = \sum_{ijk}^8 \beta_{ijk} \rho c [N]^T_{ijk} [N]_{ijk} \det J_{ijk} dr_i ds_j dt_k \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \{F\}^e &= \sum_{ijk}^8 \beta_{ijk} (Q[N]^T \det J dr ds dt) \\ &+ \rho c [N]^T [N] \det J dr ds dt \\ &+ \sum_{ij}^8 \beta_{ij} \alpha_c [N]^T [N] \det J dr ds \end{aligned} \quad (26)$$

여기서, β_{ijk} : Gauss 수치적분의 Weight이다.
따라서, 최종적으로 요소전체에 대한 열전도식은 아래와 같이

$$\begin{aligned} \Sigma [K] \{\theta\} &+ \frac{2}{\Delta t} \Sigma [C] \{\theta^A\} \\ &= \Sigma \{F\} + \Sigma [C] \left(\frac{2}{\Delta t} \{\theta^B\} + \left\{ \frac{\partial \theta^B}{\partial t} \right\} \right) \end{aligned} \quad (27)$$

으로 표현된다.

3. 厚板熔接時의 溫度分布特性

3.1. 해석 Model의 설정

본 연구에서 사용한 厚板熔接의 熱分布特性 Model 및 요소분할은 각각 Fig.2 및 Fig.3에 나타난 바와 같다. 熔接의 특성은 물체의 일부분에서 극히 국부적으로 行하여지므로, 板周邊의 境界面에서는 熱放射의 影響을 받지않는것으로 하였다. 또한 해석 Model의 크기는 길이(L) 600mm, 폭(B) 300mm 및 두께(t) 90mm의 長方型體로 하였으며, 좌표계는 Fig.2에서 보인것 처럼 용접선방향을 x, 용접선 직각방향은 y, 판두께 방향은 z로 하였다. 또한 시험체의 뒷면 板幅 중앙에 1層 1 pass 용접을 수행하는 것으로 하였으며, 일반적으로는 多層熔接이 통상 行하여지지만 온도의 勾配가 가장 큰폭으로 변화하는 단층용접이 熱的으로 가장 혹독한 조건을 가지므로, Fig.2에서 표시된것 처럼 길이 5mm 폭 8mm의 斷面形狀의 용착(溶着) 금속에 일층용접을 수행하였다. 또한 용접조건으로서 入熱量은, $Q = 16433 \text{ Joule/cm}$, 용접속도는 $V = 18 \text{ cm/sec}$, 열효율은 $\eta = 0.9$ 로 하였다. 재료는 연강(軟鋼)으로 하였으며 열전도해석에 사용한 재료의 물리적 정수의 온도의존성을 Fig.4에 나타내었으며 본해석은 y방향의 대칭성을 고려하여 Fig.3에 나타난 바와 같이 1/2 모델만을 사용하였다.

개발프로그램은 검증을 위하여 열전달 및 열전도에

L=600
B=300
h=90
t=100 (1n mm)
b=8
d=5

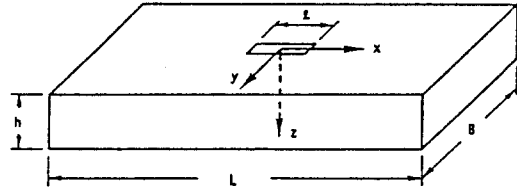
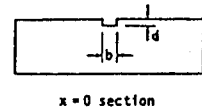


Fig. 2 Model for analysis

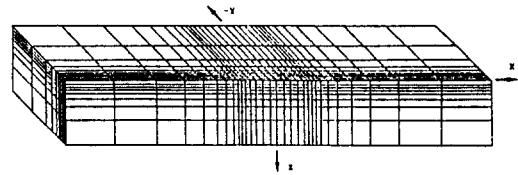


Fig. 3 Mesh division used heat conduction analysis

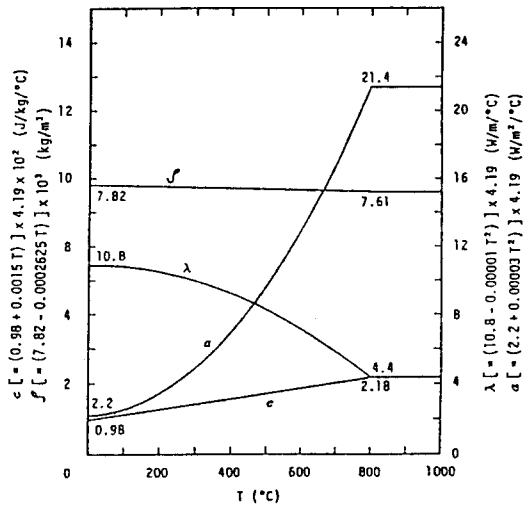


Fig. 4 Temperature dependency of physical properties used heat conduction analysis

관하여 이론해석 및 차분법등의 결과값과 비교 검토하여 상호일치함을 보여주었으며 또한 그 효율성을 증명하였다⁴⁾.

3.2. 溫度分布特性

열원의 이동효과를 고려한 3차원비정상열전도해석을 고찰하여보면 우선, 시험체 上表面에 있어서의 熔

接金屬部 ($y=z=0$)의 過渡의 溫度分布을 Fig. 5에 나타내었다. 그림중에서 各 時間에 대한 최고온도 (T_{max})가 되는 위치를 點線으로 나타내었다. 이것에 의하면 용접금속에서는 時間이 經過함에 따라 최고온도로 되어지는 位置가 試驗體線端 근처에서 中央部 쪽으로 이동하여 가는 것을 볼 수 있다. 이 현상은 厚板의 용접부 中央 근처가 제일 마지막으로 수축하고 있음을 알 수 있다.

Fig. 6에서는 용접종료후 시간 19초가 지났을 때 시험체상표면의 중앙 ($x=y=z=0$)이 力學的 용융온도 (약 $700^{\circ}C$)까지 냉각했을 때의 上表面 ($z=0, x-y$ 面) 과 $x=0mm, x=30mm$ 에 있어서의 橫斷面 ($y-z$ 面)에 대한 溫度分布을 圖示한 것이다. $x-y$ 면의 等溫度曲線은 용접체 終端에서부터 中央部 근처를 中心으로 하는 x 軸에 대칭한 타원형으로 나타내고 있음을 알 수 있다. 또한 Fig. 7에 도시한 $y-z$ 橫斷面に 있어서의 等溫度曲線은 시험체상표면으로부터의 熱傳達의 영향은 적으나, 반면 시험체 内部로의 熱傳導이 支配的 이므로 結果的으로 $y-z$ 면의 等溫度曲線은 시간과 단면에 구애받지 않고 항상 同心圓으로 나타내고 있음을 알 수 있다.

따라서, y 方向과 z 方向은 온도상승 및 냉각과정에서 동일한 溫度履歷 (Temperature history)을 경험하고 있음을 알 수 있다. 아울러, $x-z$ 면에 있어서의 等溫度曲線은 반타원분포를 하고 있음을 알 수 있다.

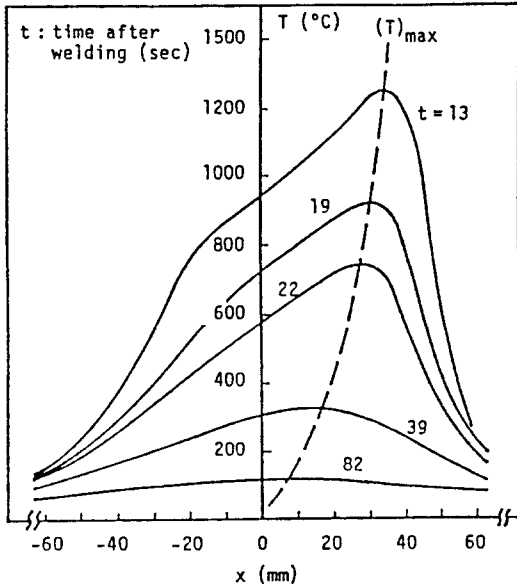


Fig. 5 Transient temperature distributions on weld metal

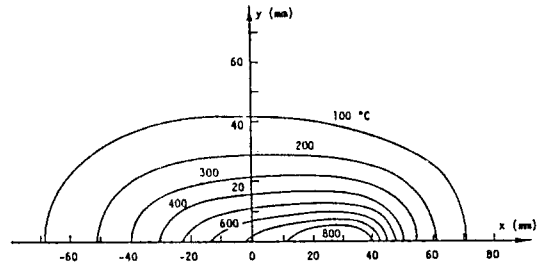


Fig. 6 Isothermal contour of $x-y$ section at time (19 sec) after welding

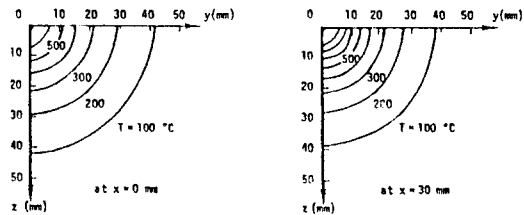


Fig. 7 Isothermal contour of $y-z$ section at time (19 sec) after welding.

4. 결 론

3차원 비정상열전도 문제를 아이소파라메트릭 유한요소법을 이용하여 수치해석이 가능하도록 하였다. 厚板熔接體를 가정한 시험체를 해석하여 해석결과와 실험치를 비교하여 그 타당성을 입증하였다. 더우기, 후판용접체에 있어서 이동하는 용접열원주위의 3차원적 온도분포 즉 용융지 (熔融池)의 입체적 형상에서 처럼 2차원적 해석으로 취급하기 곤란한 문제를 간단한 3차원해석모델에 의하여 精度 좋게 평가할 수 있도록 하였다. 또한 厚板熔接의 용접시 온도분포 특성을 究明하였을 뿐만 아니라 형상이 복잡한 각종 용접체의 온도 분포특성을 수치해석이 가능하도록 하였다. 본 연구에서는 얻어진 결과를 기초로 하여 용접잔류응력 및 용접변형의 수치해석을 금후 수행할 예정이다.

참고문헌

- 1) 安藤弘平: 静止熱源による一次元の熱傳達, 일본 용접 학회지, 제39권, 제11호(1970), pp. 12~25.

- 2) 安藤弘平: 移動点熱源による厚い母板の溫度上昇の理論式, 일본용접 학회지, 제45권, 제4호, (1976), pp. 68~73.
- 3) G.M. Dusinberre: Heat transfer calculations by finite differences, International Textbook Company, Scranton, Pa, (1961), Pr 281~299.
- 4) 방한서: 유한요소법에 의한 박판용접의 2차원 비정성 열전도해석, 대한조선학회, (1990 춘계발표), pp. 422~440.
- 5) 吉材洋: 유한요소법에 의한 이동열원 주위의 2차원 준정상 온도분포의 해석, 일본서부조선학회, 제61호, (1981), pp. 207~214.
- 6) K.J. Bathe: Finite Element Procedures in Engineerings Analysis, Prentice-Hall, (1982), pp. 194~297.
- 7) Z. Daley, P.D. Hibbert: Computation of temperature in actual weld design, Welding Journal, Vol. 54, No. 11. (1975), pp. 385~392.