

# 가속도 집합이론과 매니플레이터 설계에의 응용

김 용 일

한국과학기술연구원 선임연구원



● 1959년생  
● 로봇 공학을 전공하였으며, 동력학적 성능해석에 의한 로봇의 구조설계 및 저급 제어 기능의 부착을 통한 기본 로봇체계의 제작에 관심을 가지고 있다.

## 1. 머리말

본 글에서는 세계의 자유도를 가진 일반적인 공간 매니플레이터 (spatial manipulator) 를 대상으로 하여 그 가속능력 (acceleration capability) 을 결정하는 방법, 즉 가속도 집합이론을 설명한다. 가속도 집합은 매니플레이터가 다양한 조건하에서 가지는 모든 가속능력을 총괄하는 개념으로, 매니플레이터의 설계에서 가지는 그 유용성이 최근 크게 인식되고 있다 (1,2,3,4). 여기에서는 가속도집합이론의 여러 가지 응용에 가운데 정해진 가속능력을 낼 수 있는 최소한의 액츄에이터의 크기를 결정하는 방법을 제시한다.

그림 1은 세계의 자유도를 가진 일반적인 회전관절 (revolute-joint) 매니플레이터의 구조도이다. 우리의 연구대상은 셋째 링크상에 표시된 작동기 (end-effector) 의 관절축에 위치한 기준점  $P$  의 가속도이다. 다양한 조건하에서 기준점  $P$  가 가지는 가속능력은 가속도집합 (acceleration set) 으로 설명할 수 있는 데, 일반적으로 가속도 집합은 두가지 양으로 특징지어진다. 첫째는 기준점  $P$  가 갖는 가속도의 최대 기능치로, 이를 기준점  $P$  의 최대가속도 (maximum acceleration) 라고 한다. 둘째는 기준점  $P$  가 각 방향으로 갖는 가속도의 최대 공약치로 이를 기준점  $P$  의 등방가속도 (isotropic

acceleration) 라고 부른다. 기준점  $P$  의 가속도와 액츄에이터 토크 및 관절변수 변화율 (joint variable rate) 간에는 함수관계가 나타난다. 이 함수관계를 액츄에이터 토크공간 (actuator torque space) 과 가속공간 (acceleration space) 간의 선형매핑과 관절변수 변화율 공간 (joint variable rate space) 과 가속공간과의 이차매핑으로 분해하면 가속도 집합은 결국 두가지 매핑의 조합에 의하여 생성되는 치역 (image) 이다. 즉, 이 두가지 매핑의 성질을 이용하여 가속도집합을 결정할 수 있다.

본 연구는 가속도의 특성을 입력변수와 매니플레이터의 질량변수 (mass properties) 의 해석함수 (analytical function) 로 표시하고 등방 가속도의 존재를 위한 필요충분조건을 해석적으로 결정함으로써 매니플레이터의 설계에 가속도이론을 쉽게 응용할 수 있도록 하였다는데 그 의의가 있다.

## 2. 가속도 집합의 정의

가속도 집합은 매니플레이터가 다양한 조건하에서 가지는 모든 가속능력을 총괄하는 개념이다. 이하에서는 매니플레이터 설계에 유용한 세계의 기본 가속도 집합을 두개의 기본매핑, 즉 선형매핑과 이차매핑을 이용하여 정의한다.

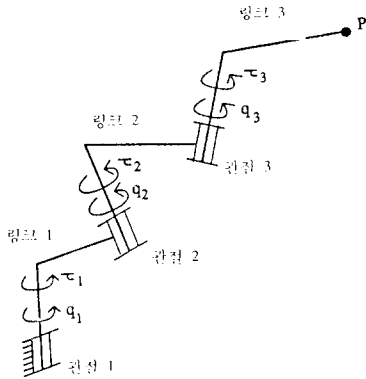


그림 1 세개의 자유도를 가진 일반적인 공간 매니플레이터의 구조도

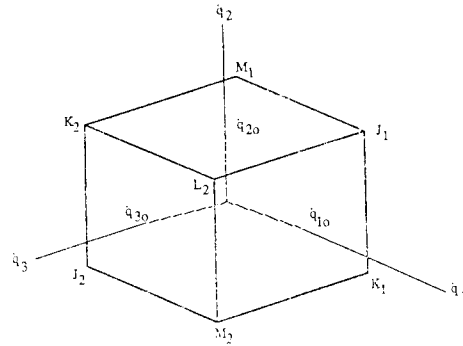


그림 2 세개의 자유도를 가진 일반적인 공간 매니플레이터의 관절변수 변화율집합

### 2.1 매니플레이터의 변수와 그 집합

세개의 회전관절을 가진 일반적인 공간 매니플레이터를 생각해 보자(그림 1). 매니플레이터의 변수와 그에 대한 제한조건(input constraint)으로 이들 변수의 집합을 다음과 같이 정의하기로 한다.

$q_1, q_2, q_3$ 를 관절 1, 2, 3의 관절변수(joint variable)라고 하면 이들은 매니플레이터의 일반좌표계를 구성한다.

$$\mathbf{q} \equiv \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

를 관절변수벡터로 정의하고 매니플레이터의 형태  $\mathbf{q}$ 라 부른다\*. 관절변수의 제한 조건을

$$q_{iL} \leq q_i \leq q_{iU}, \quad i=1, 2, 3 \quad (2)$$

로 표시하면, 매니플레이터의 작업공간(workspace)  $W$ 는

$$W = \{ \mathbf{q} \mid q_{iL} \leq q_i \leq q_{iU}, \quad i=1, 2, 3 \} \quad (3)$$

으로 정의된다.

또한  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$ 를 각각 관절 1, 2, 3의 관절변수 변화율(joint variable rate)이라 하고

$$\dot{\mathbf{q}} \equiv \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

을 관절변수 변화율 벡터로 정의한다. 관절변수

\* 관절변수벡터, 관절변수 변화율 벡터, 액츄에이터 토크 벡터는 실제 벡터가 아니라 행렬이다.

변화율의 제한조건을

$$|\dot{q}_i| \leq \dot{q}_{i0}, \quad i=1, 2, 3 \quad (5)$$

으로 표시하면, 가능한 모든 관절변수 변화율의 집합은

$$F = \{ \dot{\mathbf{q}} \mid \dot{q}_i \leq \dot{q}_{i0}, \quad i=1, 2, 3 \} \quad (6)$$

으로 정의되고 그림 2의 직육면체  $J_1 K_1 L_1 M_1 J_2 K_2 L_2 M_2$ 가 된다.

관절 1, 2, 3에 작용하는 액츄에이터 토크를 각각  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ 로 표시하고

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

으로 액츄에이터 벡터를 표시한다.

$$|\tau_i| \leq \tau_{i0}, \quad i=1, 2, 3 \quad (8)$$

으로 액츄에이터 제한조건을 표시하면, 허용 액츄에이터 토크 집합

$$T = \{ \boldsymbol{\tau} \mid |\tau_i| \leq \tau_{i0}, \quad i=1, 2, 3 \} \quad (9)$$

은 그림 3의 직육면체  $A B C D E F G H$ 로 나타낸다\*\*.

$(x_1, x_2, x_3)$ 를 바닥에 고정된 기준좌표계(reference frame)에서 본 기준점  $P$ 의 자표라 하고

$$\mathbf{x}^P = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (10)$$

\*\* 실제 액츄에이터의 토크 제한치  $\tau_{i0}, i=1, 2, 3$ 는 관절변수 변화율이 증가함에 따라 10%까지 감소한다.

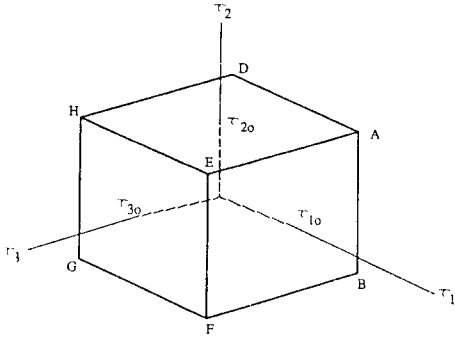


그림 3 세개의 자유도를 가진 일반적인 공간 매니플레이터의 액츄에이터 토크 집합

를 작업좌표벡터 (vector of task coordinates) 라고 정의한다. 기준점  $P$ 의 속도  $\dot{x}^P$ 와 가속도  $\ddot{x}^P$ 는 각각

$$\dot{x}^P = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}, \quad \ddot{x}^P = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} \quad (11)$$

으로 표시하고, 가능한 모든  $\ddot{x}^P$ 의 벡터공간은  $A = \{\ddot{x} \mid \ddot{x}^P \in \mathbb{R}^3\}$  (12)으로 표시한다.

### 2.2 입력변수 $\dot{q}, \tau$ 와 가속도 $\ddot{x}^P$ 간의 함수 관계

세개의 자유도를 가진 일반적인 공간 매니플레이터의 한 형태  $q$ 에서 입력변수  $\dot{q}, \tau$ 와 가속도  $\ddot{x}^P$ 의 관계는

$$\ddot{x}^P = A\tau + B \langle \dot{q} \rangle^2 + N[\dot{q}]^2 + s \quad (13)$$

으로 표시된다.  $A, B, N, s$ 는 매니플레이터 형태  $q$ 의 함수이며,  $a_{ij}, b_{ij}, n_{ij}, s_i (i, j=1, 2, 3)$ 의 원소를 갖는다.

식 (13)은 공간 매니플레이터의 동력학 방정식<sup>(5)</sup>

$$D\ddot{q} + V(q, \dot{q}) + p = \tau \quad (14)$$

( $D$ 는 질량행렬 (mass matrix),  $V(q, \dot{q})$ 은 관절변수의 곱으로 된 모든 비선형항을 나타내고  $p$ 는 중력에 관한 항이다)과, 기준점  $P$ 의 속도  $\dot{x}^P$ 와 관절변수변화율 벡터의 관계

$$\dot{x}^P = J\dot{q} \quad (15)$$

( $J$ 는 매니플레이터 자코비안이라고 부른다)를 조합하여 얻어진다.

#### • 증명

식 (14)의 비선형항  $V(q, \dot{q})$ 은 행렬과 벡터의 곱으로 표시될 수 있다. 이를 도시하기 위하여  $V(q, \dot{q})$ 을

$$\begin{bmatrix} u_{11}\dot{q}_1^2 + u_{12}\dot{q}_2^2 + u_{13}\dot{q}_3^2 + 2w_{11}\dot{q}_1\dot{q}_2 \\ + 2w_{12}\dot{q}_2\dot{q}_3 + 2w_{13}\dot{q}_3\dot{q}_1 \\ u_{21}\dot{q}_1^2 + u_{22}\dot{q}_2^2 + u_{23}\dot{q}_3^2 + 2w_{21}\dot{q}_1\dot{q}_2 \\ + 2w_{22}\dot{q}_2\dot{q}_3 + 2w_{23}\dot{q}_3\dot{q}_1 \\ u_{31}\dot{q}_1^2 + u_{32}\dot{q}_2^2 + u_{33}\dot{q}_3^2 + 2w_{31}\dot{q}_1\dot{q}_2 \\ + 2w_{32}\dot{q}_2\dot{q}_3 + 2w_{33}\dot{q}_3\dot{q}_1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

으로 풀어 쓴다. 두 행렬연산자

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix} \quad (17)$$

와 두 벡터연산자

$$\langle \dot{q} \rangle^2 = \begin{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_2^2 \\ \dot{q}_3^2 \end{bmatrix}, \quad [\dot{q}]^2 = \begin{bmatrix} 2\dot{q}_1\dot{q}_2 \\ 2\dot{q}_2\dot{q}_3 \\ 2\dot{q}_3\dot{q}_1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

를 정의하여 비선형항  $V(q, \dot{q})$ 를

$$\begin{aligned} V(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_2^2 \\ \dot{q}_3^2 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\dot{q}_1\dot{q}_2 \\ 2\dot{q}_2\dot{q}_3 \\ 2\dot{q}_3\dot{q}_1 \end{bmatrix} \\ &= U \langle \dot{q} \rangle^2 + W[\dot{q}]^2 \end{aligned} \quad (19)$$

으로 분해할 수 있다. 식 (19)를 식 (14)에 대입하여 다음과 같은 공간 매니플레이터의 일반적인 동력학 방정식을 얻는다.

$$D\ddot{q} + U \langle \dot{q} \rangle^2 + W[\dot{q}]^2 + p = \tau \quad (20)$$

또한, 식 (15)를 미분하면

$$\ddot{x}^P = J\ddot{q} + \dot{J}\dot{q} \quad (21)$$

이 되며, 식 (21)의 둘째항은

$$\dot{J}\dot{q} = -F \langle \dot{q} \rangle^2 - G[\dot{q}]^2 \quad (22)$$

으로 나타낼 수 있다.<sup>(6)</sup> 식 (22)를 식 (21)에 대입하면

$$\ddot{x}^P = J\ddot{q} - F \langle \dot{q} \rangle^2 - G[\dot{q}]^2 \quad (23)$$

이 된다. 또한,

$$A = JD^{-1}$$

$$\begin{aligned} B &= -AU - F \\ N &= -AW - G \\ s &= -Ap \end{aligned} \quad (24)$$

를 정의하고 식 (20) 과 식 (23), (24)를 조합하면 기준점  $P$ 의 가속도  $\ddot{x}^p$ 가 식 (13)으로 얻어진다. 행렬연산자  $U, W, F, G$ 와 벡터연산자  $\langle \dot{q} \rangle^2, [\dot{q}]^2$ 를 정의함으로써 가속도  $\ddot{x}^p$ 를 간단히 서술할 수 있다는 점에 유의한다.

### 2.3 매핑

식 (13)을 매니플레이터의 한 형태  $q$ 에서 입력변수  $\dot{q}, \tau$ 와 출력변수  $\ddot{x}^p$  간의 매핑으로 생각할 수 있다. 가속도연구에 기본적인 두 개의 매핑

$$\ddot{x}^p = \begin{bmatrix} a_{1\tau} \\ a_{2\tau} \\ a_{3\tau} \end{bmatrix} = A\tau \quad (25)$$

$$\ddot{x}^p = \begin{bmatrix} a_{1\dot{q}} \\ a_{2\dot{q}} \\ a_{3\dot{q}} \end{bmatrix} = B\langle \dot{q} \rangle + N[\dot{q}] + s \quad (26)$$

를 정의하여 식 (13)을

$$\ddot{x}^p = \ddot{x}^p + \ddot{x}^q$$

으로 쓴다. 벡터  $\ddot{x}^p$ 는 가속도에 대한 토크의 영향치,  $\ddot{x}^q$ 는 가속도에 대한 관절변수 변화율과 중력의 영향치로 생각할 수 있다. 또한, 식 (25)는 토크벡터  $\tau$ 와 점  $P$ 의 가속도에 대한 영향치  $\ddot{x}^p$ 간의 선형형태중속매핑(configuration-dependent linear mapping)으로 간주할 수 있다. 마찬가지로 식 (26)은 관절변수 변화율벡터  $\dot{q}$ 과 점  $P$ 의 가속도에 대한 영향치  $\ddot{x}^q$ 간의 이차형태 중속매핑(configuration-dependent quadratic mapping)으로 간주할 수 있다.

### 2.4 가속도 집합의 정의

매니플레이터가 다양한 상황에서 갖는 가속도능력을 위에서 정의된 두 매핑 식 (25), (26)에서의 입력집합  $T, F$ 의 치역(image set)으로 정의한다.

(1) 선형매핑에 의한 액츄에이터 토크집합  $T$

의 치역

액츄에이터공간에서 직육면체인 액츄에이터 토크집합  $T$ (그림 3, 식 (9) 참조)가 선형매핑 하에서 갖는 치역  $S_\tau$ 를

$$S_\tau = \{\ddot{x}^p \mid \ddot{x}^p = A\tau, \tau \in T\} \quad (28)$$

으로 정의한다( $S_\tau$ 는 가속공간  $A$ 에 위치함을 주목한다).  $S_\tau$ 는 매니플레이터가 작업공간내의 형태  $q$ 에 정지하고 있다가 움직이기 시작할 때 가능한 모든 가속도의 집합이다.

(2) 이차매핑에 의한 관절변수 변화율집합  $F$ 의 치역

관절변수변화율에서 직육면체인 관절변수변화율집합  $F$ (그림 2, 식 (6) 참조)가 이차매핑 하에서 갖는 치역  $S_q$ 를

$$S_q = \{\ddot{x}^p \mid \ddot{x}^p = B\langle \dot{q} \rangle^2 + N[\dot{q}] + s, \dot{q} \in F\} \quad (29)$$

으로 정의한다( $S_q$ 는 가속공간  $A$ 에 위치함을 주목한다).  $S_q$ 는 매니플레이터가 작업공간내에서 형태  $q$ 에서 액츄에이터를 꺾을 때 가능한 모든 가속도의 집합이다.

(3) 상태가속도집합(state acceleration set)

매니플레이터가 움직이고 있을 때 동력학적 상태는 관절변수  $(q_1, q_2)$ 와 관절변수변화율  $(\dot{q}_1, \dot{q}_2)$ 으로 정해진다. 매니플레이터의 동력학적 상태  $u$ 를

$$u = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} \quad (30)$$

으로 정의한다. 매니플레이터의 동력학적 상태  $u$ 에 대하여 식 (13)에서 첫째항을 제외한 나머지 항들은 상수가 되는데 이를  $k(u)$ 로 표시하고

$$k(u) = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}\dot{q}_1^2 + b_{12}\dot{q}_2^2 + b_{13}\dot{q}_3^2 + 2n_{11}\dot{q}_1\dot{q}_2 \\ + 2n_{12}\dot{q}_2\dot{q}_3 + 2n_{13}\dot{q}_3\dot{q}_2 + S_1 \\ b_{21}\dot{q}_1^2 + b_{22}\dot{q}_2^2 + b_{23}\dot{q}_3^2 + 2n_{21}\dot{q}_1\dot{q}_2 \\ + 2n_{22}\dot{q}_2\dot{q}_3 + 2n_{23}\dot{q}_3\dot{q}_2 + S_2 \\ b_{31}\dot{q}_1^2 + b_{32}\dot{q}_2^2 + b_{33}\dot{q}_3^2 + 2n_{31}\dot{q}_1\dot{q}_2 \\ + 2n_{32}\dot{q}_2\dot{q}_3 + 2n_{33}\dot{q}_3\dot{q}_2 + S_3 \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{B} \langle \mathbf{q} \rangle^2 + \mathbf{N} [\dot{\mathbf{q}}]^2 + \mathbf{s} \quad (31)$$

으로 정의하면, 식 (31)은

$$\dot{\mathbf{x}}^p = \mathbf{A}\boldsymbol{\tau} + \mathbf{k} \quad (32)$$

으로 쓸 수 있다. 동력학적 상태  $\mathbf{u}$ 에 대해 선형매핑 식 (25)의 집합  $T$ 의 치역으로 상태가속도 집합(state acceleration set)  $S_u$ 를

$$S_u = \{ \dot{\mathbf{x}}^p \mid \dot{\mathbf{x}}^p = \mathbf{A}\boldsymbol{\tau} + \mathbf{k}, \boldsymbol{\tau} \in T \} \quad (33)$$

정의한다. 따라서,  $S_u$ 는 동력학적 상태  $\mathbf{u}$ 에서 가능한 모든 가속도의 집합이다. 동력학적 상태  $\mathbf{u}$ 가 형태  $\mathbf{q}$ 에서 속도  $\dot{\mathbf{x}}^p$ 를 정하므로 상태가속도 집합  $S_u$ 는 매니플레이터가 속도  $\dot{\mathbf{x}}^p$ 로 움직일 때의 가속능력을 나타낸다.

### 2.5 가속도 집합의 성질

가속도공간  $A$ 에서 가속도  $a$ 를 원소로 갖는 가속도집합  $S$ 와 두개의 구  $C_1, C_2$ 를 생각해 보자.  $C_1$ 은 원점을 중심으로하여 가속도집합  $S$ 를 감싸는 최소의 구이고  $C_2$ 는 원점을 중심으로 하는 가속도집합 내의 가장 작은 구이다. 구  $C_1$ 의 반경  $r_1$ 은  $S$  내의 최대가능가속도이고, 구  $C_2$ 의 반경  $r_2$ 는 각 방향으로 가능한 가속도의 최대공약치를 나타낸다. 이 두개의 반경, 즉  $S$ 의 최대가속도  $a_{\max}(S) = r_1$ 와  $S$ 의 등방가속도  $a_{\text{iso}}(S) = r_2$ 로 집합  $S$ 를 특징지을 수 있다.

## 3. 가속도 집합의 결정

앞에서 정의한 세 개의 가속도집합 가운데 치역  $S_r$ 만 결정한다. 나머지 가속도 집합에 대해서는 관련자료를 참조하기 바란다<sup>(6,7)</sup>.

### 3.1 치역 $S_r$ 의 결정

집합  $S_r$ 는 선형매핑 식 (28)의 액튜에이터 토크집합  $T$ 의 치역이므로, 선형매핑의 성질을 이용하여 치역  $S_r$ 를 결정하고 가속도공간에서 평면인 그 경계를 결정한다.

선형매핑 식 (33)의 액튜에이터 토크집합  $T$ 의 치역  $S_r$ 는 가속도공간에서 중심이 원점에 있는 평행육면체  $A'B'C'D'E'F'G'H'$ 이고 그 꼭

지점  $A', B', C', D', E', F', G', H'$ 는

$$A' : (a_{11}\tau_{10} + a_{12}\tau_{20} + a_{13}\tau_{30}, a_{21}\tau_{10} + a_{22}\tau_{20} + a_{23}\tau_{30}, a_{31}\tau_{10} + a_{32}\tau_{20} + a_{33}\tau_{30})$$

$$B' : (a_{11}\tau_{10} - a_{12}\tau_{20} + a_{13}\tau_{30}, a_{21}\tau_{10} - a_{22}\tau_{20} + a_{23}\tau_{30}, a_{31}\tau_{10} - a_{32}\tau_{20} + a_{33}\tau_{30})$$

$$C' : (-a_{11}\tau_{10} - a_{12}\tau_{20} + a_{13}\tau_{30}, -a_{21}\tau_{10} - a_{22}\tau_{20} + a_{23}\tau_{30}, -a_{31}\tau_{10} - a_{32}\tau_{20} + a_{33}\tau_{30})$$

$$D' : (-a_{11}\tau_{10} + a_{12}\tau_{20} + a_{13}\tau_{30}, -a_{21}\tau_{10} + a_{22}\tau_{20} + a_{23}\tau_{30}, -a_{31}\tau_{10} + a_{32}\tau_{20} + a_{33}\tau_{30})$$

$$E' : (a_{11}\tau_{10} + a_{12}\tau_{20} - a_{13}\tau_{30}, a_{21}\tau_{10} + a_{22}\tau_{20} - a_{23}\tau_{30}, a_{31}\tau_{10} + a_{32}\tau_{20} - a_{33}\tau_{30})$$

$$F' : (a_{11}\tau_{10} - a_{12}\tau_{20} - a_{13}\tau_{30}, a_{21}\tau_{10} - a_{22}\tau_{20} - a_{23}\tau_{30}, a_{31}\tau_{10} - a_{32}\tau_{20} - a_{33}\tau_{30})$$

$$G' : (-a_{11}\tau_{10} - a_{12}\tau_{20} - a_{13}\tau_{30}, a_{21}\tau_{10} - a_{22}\tau_{20} - a_{23}\tau_{30}, -a_{31}\tau_{10} - a_{32}\tau_{20} - a_{33}\tau_{30})$$

$$H' : (-a_{11}\tau_{10} + a_{12}\tau_{20} - a_{13}\tau_{30}, -a_{21}\tau_{10} + a_{22}\tau_{20} - a_{23}\tau_{30}, -a_{31}\tau_{10} + a_{32}\tau_{20} - a_{33}\tau_{30}) \quad (34)$$

이다(그림 4).

평행육면체  $S_r$ 의 면은

$$A'B'F'E' : (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) \ddot{x}_1 - (a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) \ddot{x}_2 + (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \ddot{x}_3 = \tau_{10} \det(A)$$

$$D'C'G'H' : (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \ddot{x}_1 - (a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) \ddot{x}_2 + (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \ddot{x}_3 = -\tau_{10} \det(A)$$

$$A'D'H'E' : -(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \ddot{x}_1 - (a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) \ddot{x}_2 - (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) \ddot{x}_3 = \tau_{20} \det(A)$$

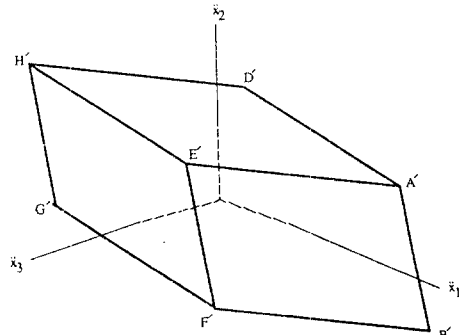


그림 4 세개의 자유도를 가진 매니플레이터의 치역  $S_r$

$$\begin{aligned}
 B'C'G'F' : (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \ddot{x}_1 - (a_{11}a_{33} & \text{으로 주어진다. } \det(\mathbf{A}) \text{는 행렬 } \mathbf{A} \text{의 행렬적이} \\
 - a_{31}a_{13}) \ddot{x}_2 + (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) \ddot{x}_3 = \tau_{20}\det(\mathbf{A}) & \text{다.} \\
 A'B'C'D' : (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \ddot{x}_1 - (a_{11}a_{32} & \\
 - a_{31}a_{12}) \ddot{x}_2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \ddot{x}_3 = \tau_{30}\det(\mathbf{A}) & \quad \mathbf{3.2} \text{ 지역 } S_r \text{의 성질결정} \\
 E'F'G'H' : (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \ddot{x}_1 - (a_{11}a_{32} & \text{가속도 집합 } S_r \text{의 최대가속도는 } a_{\max}(S_r) \text{로} \\
 - a_{31}a_{12}) \ddot{x}_2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \ddot{x}_3 = -\tau_{30}\det(\mathbf{A}) & \text{표시하고}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{\max}(S_r) &= \max[d(OA'), d(OB'), d(OC'), d(OD')] \\
 d(OA') &= \sqrt{(a_{11}\tau_{10} + a_{12}\tau_{20} + a_{13}\tau_{30})^2 + (a_{21}\tau_{10} + a_{22}\tau_{20} + a_{23}\tau_{30})^2 + (a_{31}\tau_{10} + a_{32}\tau_{20} + a_{33}\tau_{30})^2} \\
 d(OB') &= \sqrt{(a_{11}\tau_{10} - a_{12}\tau_{20} + a_{13}\tau_{30})^2 + (a_{21}\tau_{10} - a_{22}\tau_{20} + a_{23}\tau_{30})^2 + (a_{31}\tau_{10} - a_{32}\tau_{20} + a_{33}\tau_{30})^2} \\
 d(OC') &= \sqrt{(-a_{11}\tau_{10} - a_{12}\tau_{20} + a_{13}\tau_{30})^2 + (-a_{21}\tau_{10} - a_{22}\tau_{20} + a_{23}\tau_{30})^2 + (-a_{31}\tau_{10} - a_{32}\tau_{20} + a_{33}\tau_{30})^2} \\
 d(OD') &= \sqrt{(-a_{11}\tau_{10} + a_{12}\tau_{20} + a_{13}\tau_{30})^2 + (-a_{21}\tau_{10} + a_{22}\tau_{20} + a_{23}\tau_{30})^2 + (-a_{31}\tau_{10} + a_{32}\tau_{20} + a_{33}\tau_{30})^2}
 \end{aligned} \tag{36}$$

으로 주어진다.

가속도집합  $S_r$ 의 등방가속도는  $a_{150}(S_r)$ 로 표시하고

$$\begin{aligned}
 a_{150} &= [\rho(A'B'F'E'), \rho(A'D'H'E'), \rho(A'B'C'D')] \\
 \rho(A'B'F'E') &= \frac{|\det(\mathbf{A})| \tau_{10}}{\sqrt{(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})^2 + (a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32})^2 + (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})^2}} \\
 \rho(A'D'H'E') &= \frac{|\det(\mathbf{A})| \tau_{20}}{\sqrt{(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})^2 + (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})^2 + (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})^2}} \\
 \rho(A'B'C'D') &= \frac{|\det(\mathbf{A})| \tau_{30}}{\sqrt{(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})^2 + (a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2}}
 \end{aligned} \tag{37}$$

로 주어진다.

하는 최소의 액츄에이터의 크기를 결정하는 방법을 서술하기로 한다.

#### 4. 가속도집합이론의 응용과 매니플레이터의 설계

가속도집합이론은 다음과 같은 매니플레이터 문제에 응용될 수 있다<sup>(8)</sup>.

- (1) 여러 형태의 매니플레이터의 가속능력을 비교할 때
- (2) 매니플레이터가 특정한 가속능력을 가지도록 설계할 때
- (3) 가속능력을 향상시키기 위하여 매니플레이터를 재설계할 때
- (4) 가속능력이 좋도록 매니플레이터 링크의 형태를 설계할 때

이하에서는 두 번째 문제를 예로 들어 매니플레이터가 특정한 가속능력을 가질 수 있도록

##### 4.1 가속능력의 정의

매니플레이터의 가속능력을, 가속도집합으로 나타내고 그 성질인 최대가속도와 등방가속도를 이용하여 측정한다. 여기에서는 다음의 두 가지 상황에 대하여 매니플레이터의 가속능력을 정의한다.

##### (1) 기동가속능력(start-up acceleration capability)

작업공간내의 한 형태  $\mathbf{q}$ 에 있는 매니플레이터의 기동가속능력은 매니플레이터가 정지상태에 있을 때 토크  $\boldsymbol{\tau}$ 가 관절에 가해짐으로써 일어날 수 있는 모든 가속도의 집합이다. 따라서 기동가속능력은 지역  $S_r$ 이다.

##### (2) 운동가속능력(in-motion acceleration)

capability)

매니플레이터의 운동가속능력은 기준점  $P$ 가 작업공간내의 한 위치  $q$ 에서 속도  $\dot{x}^p$ 로 움직이고 있을 때, 즉, 매니플레이터가 동력학적 상태  $(q, \dot{q})$ 에 있을 때 일어날 수 있는 가능한 모든 가속도의 집합이다. 따라서, 운동가속능력은 단순히 상태가속도집합  $S_u$ 이다.

4.2 가속능력지표의 정의

특정한 가속능력을 지닌 매니플레이터를 설계하기 위하여는 적절한 가속능력지표가 필요하다. 여기에서는 매니플레이터의 기동가속능력을 측정하는 가장 단순한 가속능력지표를 정의한다. 물론, 이외에 보다 정교한 가속능력지표를 정의하여 사용할 수도 있다<sup>(9)</sup>.

- (1) 최대기동가속도 (maximum start-up acceleration)

· 정의

최대기동가속도  $a_{\max, su}$ 는 매니플레이터가 정지한 상태에서 토크  $\tau$ 가 각 관절에 가해질 때 일어날 수 있는 최대가속도이다.

위의 정의로부터 최대기동가속도 ( $a_{\max, su}$ )는

$$a_{\max, su} = a_{\max}(S_\tau) \tag{38}$$

이며 식 (36)으로 주어진다.

- (2) 등방기동가속도 (isotropic start-up acceleration)

· 정의

등방기동가속도  $a_{iso, su}$ 는 매니플레이터가 정지한 상태에서 토크  $\tau$ 가 각 관절에 가해질 때 각 방향으로 일어날 수 있는 가속도의 최대공

약치이다.

위의 정의로부터 등방기동가속도는

$$a_{iso, su} = a_{iso}(S_\tau) \tag{39}$$

이고 식 (37)로 주어진다.

4.3 액츄에이터 크기의 결정

- (1) 문제

$F = \{\dot{q} \mid \dot{q}_i \leq \dot{q}_{io}, i = 1, 2, 3\}$ 를 가진 매니플레이터가 형태  $q$ 를 취하고 있을 때 등방기동가속도  $a_{iso, su}$ 를 얻을 수 있는 액츄에이터 토크 집합

$$T = \{\tau \mid |\tau_i| \leq \tau_{io}, i = 1, 2, 3\}$$

을 정한다.

- (2) 결과

매니플레이터의 링크변수가 액츄에이터의 무게에 따라 변하는 경우와 매니플레이터의 링크변수가 액츄에이터의 무게에 영향을 받지 않는 경우의 두 가지에 대하여 정해진 등방기동가속도를 낼 수 있는 최소한의 액츄에이터의 크기를 정한다.

· 경우 1 : 매니플레이터의 링크변수가 액츄에이터의 크기  $\tau_{1o}, \tau_{2o}, \tau_{3o}$ 에 무관할 때

매니플레이터가 작업공간내에서 형태  $q$ 를 취할 때 등방기동가속도  $a'_{iso, su}$ 를 발휘하도록 액츄에이터의 크기  $\tau_{1o}, \tau_{2o}, \tau_{3o}$ 를 정한다. 즉,  $\tau_{1o}, \tau_{2o}, \tau_{3o}$ 를

$$a_{iso, su} \geq a'_{iso, su} \tag{40}$$

가 성립하도록 정한다.

식 (38)을 만족시키는 최소의 액츄에이터 토크  $\tau_{1o, \min}, \tau_{2o, \min}, \tau_{3o, \min}$ 은 식 (37)로부터

$$\tau_{1o, \min} = \frac{a'_{iso, su} \sqrt{(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})^2 + (a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32})^2 + (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})^2}}{|\det(A)|} \tag{41}$$

$$\tau_{2o, \min} = \frac{a'_{iso, su} \sqrt{(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})^2 + (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})^2 + (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})^2}}{|\det(A)|} \tag{42}$$

$$\tau_{3o, \min} = \frac{a'_{iso, su} \sqrt{(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})^2 + (a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2}}{|\det(A)|} \tag{43}$$

으로 주어진다.

· 경우 2 : 매니플레이터의 링크변수가 액츄에이터의 크기  $\tau_{1o}, \tau_{2o}, \tau_{3o}$ 에 영향을 미칠 때

액츄에이터의 크기를 계산하는 방법이 그림 5에 나타나 있다. 이는 매니플레이터 링크변수가  $\tau_{1o}, \tau_{2o}, \tau_{3o}$ 에 영향을 받는다는 것을 고려하

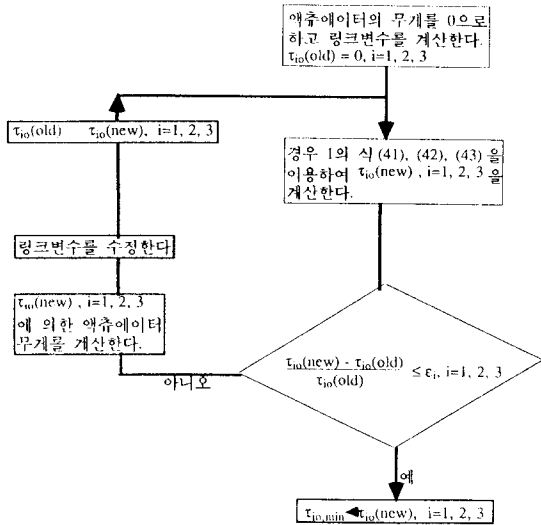


그림 5 정해진 가속능력을 낼 수 있는 액츄에이터 크기의 계산 링크변수가 액츄에이터 크기의 함수인 경우

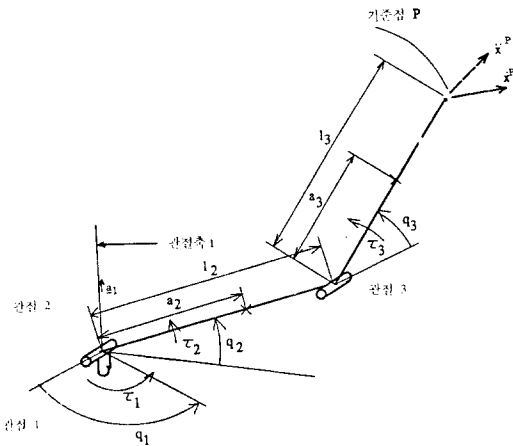


그림 6 세개의 자유도를 가진 매니퓰레이터의 구조도

여 폐쇄회로(closedloop)에 식 (41), (42), (43)을 삽입한 것이다. 계산방법은 다음과 같다:

(가) 액츄에이터의 무게를 0으로 하여 링크변수를 계산한다. 액츄에이터 토크의 크기를  $\tau_{io}(old)$ ,  $\tau_{2o}(old)$ ,  $\tau_{3o}(old)$ 로 표시하고 그 값을 0으로 한다.

표 1 링크변수

$l_1=0.0$	$l_2=0.303$	$l_3=0.254$	(m)
$a_1=0.0$	$a_2=0.196$	$a_3=0.094$	(m)
$m_1=3.5$	$m_2=2.259$	$m_3=1.129$	(kg)
$I_1=1.2$	$J_1=\dots\dots$	$K_1=\dots\dots$	(kg-m <sup>2</sup> )
$I_2=.129$	$J_2=.129$	$K_2 \cong 0$	(kg-m <sup>2</sup> )
$I_3=.003$	$J_3=.003$	$K_3 \cong 0$	(kg-m <sup>2</sup> )

(나) 경우 1의 식 (41), (42), (43)을 이용하여 액츄에이터 토크의 크기  $\tau_{1o}(new)$ ,  $\tau_{2o}(new)$ ,  $\tau_{3o}(new)$ 를 계산한다.

(다)  $\tau_{1o}$ ,  $\tau_{2o}$ ,  $\tau_{3o}$ 가 수렴기준

$$\frac{\tau_{io}(new) - \tau_{io}(old)}{\tau_{io}(old)} \leq \epsilon_i, \quad i=1, 2, 3 \quad (44)$$

을 만족하는 가를 점검한다.

(라) 식 (44)가 만족되지 않으면 새로운 액츄에이터 토크의 크기

$\tau_{1o}(new)$ ,  $\tau_{2o}(new)$ ,  $\tau_{3o}(new)$ 를 고려하여 링크변수를 수정한 후 과정 (2)로 돌아간다.

(3) 예제

위의 방법을 설명하기 위하여 그림 6에 도시된 매니퓰레이터를 고려한다. 기구학적 방정식 및 동력학적 방정식이 부록에 있다. 매니퓰레이터 링크변수는 표 1에 주어진다. 형태  $q_1=0^\circ$ ,  $q_2=45^\circ$ ,  $q_3=45^\circ$ 에서 등방기동가속도  $a_{150,su}=5 \text{ m/s}^2$ 를 얻기 위하여 필요한 액츄에이터 토크의 크기는 식 (41), (42), (43)을 이용하여

$$\tau_{1o,min}=35 \text{ Nm}, \quad \tau_{2o,min}=8.2 \text{ Nm},$$

$$\tau_{3o,min}=0.6 \text{ Nm}$$

으로 계산된다.

### 5. 맺음말

본 글에서는 일반적인 공간 매니퓰레이터에 관한 가속도 이론을 서술하였다. 즉,

· 주어진 매니퓰레이터에 대하여 액츄에이터 토크집합  $T$ 에 대한 치역  $S_T$ 와 관절변수변화율집합  $F$ 에 대한 치역  $S_{\dot{q}}$ 를 정의하였다. 또한 상태공간에서의 한 점  $u$ 에서의 상태가속도 집합  $S_u$ 를 정의하였다.



· 치역  $S_r$ 를 결정하고 그 성질인 최대가속도와 등방가속도를 결정하였다.

아울러, 가속도이론의 하나의 적용예로서 정해진 등방기동가속도를 얻을 수 있는 최소한의 액츄에이터 토크의 크기를 결정하는 방법을 도시하였다. 본 결과의 다양한 응용에는 기존연구를 참조하기 바란다.

### 참 고 문 헌

- (1) Graettinger, T. and Krogh, B., 1988, "The Acceleration Radius: A Global Performance Measure for Robotic Manipulators," IEEE Journal of Robotics and Automation, Vol. 4, No. 1, pp 60~69.
- (2) Kane, T.R. and Levinson, D.A., 1983, "The Use of Kane's Dynamical Equations in Robotics," The International Journal of Robotics Research, Vol. 2, No. 3, pp. 3~21.
- (3) Khatib, O. and Burdick, J., 1987, "Optimization of Dynamics in Manipulator Design: The Operational Space Formulation," International Journal of Robotics and Automation, Vol. 2, No. 2, pp. 90~97.
- (4) Yoshikawa, T., 1985, "Dynamic Manipulability of Robot Manipulators," Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 1033~1038.
- (5) Craig, J., 1985, "Introduction to Robotics: Mechanics and Control," Addison-Wesley.
- (6) Kim, Y. and Desa, S., 1990, "The Definition, Determination, and Characterization of Acceleration Sets for Spatial Manipulators," Proceedings of 1990 ASME Design Technical Conferences, Vol. 24, pp. 199~206.
- (7) Desa, S. and Kim, Y., 1990, "The Definition, Determination, and Characterization of Acceleration sets for Planar Manipulators," Proceedings of 1990 ASME Design Technical Conferences, Vol. 24, pp. 207~216.
- (8) Desa, S. and Kim, Y., 1990, "The Application of Acceleration Theory to Manipulator Design," Proceedings of 1990 ASME Design Technical Conferences, Vol. 26, pp. 221~228.
- (9) Desa, S. and Roth, B., 1985, "Mechanics: Kinematics and Dynamics," Recent Advances in Robotics, John Wiley and Sons.

