

Pochhammer 방정식의 분산곡선구성에서 본 비혼합해의 활용 방안

김 윤 영

서울대학교 기계설계학과 교수



● 1959년생
● 탄성학 및 평판과 셀 이론을 전공 하였으며, 구조물의 정, 동적해석에 대한 해석적 방법 연구에 관심을 가지고 있다.

1. 머리 말

경계치 문제를 풀기 위해서는 지배 미분(또는 편미분) 방정식을 만족하는 가능한 모든 해들 중에서 주어진 경계조건 그리고(또는) 초기조건을 만족시키는 것을 찾아야 한다. 비선형 문제는 말 할것도 없이 선형문제의 해를 찾는 것도 그리 용이하지는 않다. 특히 해석해(analytic solution)를 고려해 볼 때, “정해”(closed-form solutions)가 알려져 있는 공학문제는 매우 제한되어 있다.

정해(closed-form solution)를 찾기 어려운 이유는 문제의 경계형상의 복잡성이나 혹은 경계조건의 성질 때문일 것이다. 예를 들면, 일반적인 다각형 형상의 경계를 갖는 공학적 문제의 해는 그 형상 때문에 정해로서 표현되기 어려운 것이다. 한편, 네변이 고정된 매우 간단한 형상의 직사각형 평판이 네변이 횡방향의 하중을 받는다면, 이 경우 역시 정해가 존재하지 않는다. 그러나 상기의 평판의 네변이 단순 지지되었을때는 해가 단순한 Fourier 시리즈로 쉽게 표현이 된다. 다시말해, 간단한 형상을 가진 평판의 경계변이 특수한 경계조건을(예를 들어 단순지지) 가질때만 정해가 존재하는 것이다.

1960년대초 유한요소법이 소개된 이후로, 유

한요소법 또는 경계요소법 같은 수치해법이 모든 공학분야에서 사용되어 왔다고 해도 과언이 아닐 것이다. 현재 상업화된 유한요소, 경계요소 패키지 매우 많으며, 이것들은 대다수의 설계자나 연구자들에게 없어서는 안될 중요한 도구가 되었다. 이러한 수치해석법의 충격은 과히 엄청나다고 할 수 있다. 하지만, 아직도 해석해(analytic solutions)의 중요성이 인식되고 있으며, 또한 이를 바탕으로한 더욱 능률적인(정확하고, 훨씬 적은 계산 시간을 요구하는) 해석법의 개발도 매우 중요하다. 이러한 노력은 학문적 발전에 기여함은 물론 그 해석법의 능률성 때문에 실제 설계과정의 단축을 생산성의 향상을 가져올 수 있다. 이러한 해석법이 실제 산업에서의 적용이된 프로그램들의 예로는 steele의 FAST 1, 2, 3를 들 수 있다.

해석해에 입각한 방법으로는 접근해법(perturbation method), 시리즈 해법(series solution method), 트랜스폼법(transformation method)등을 열거할 수 있다. 이 가운데 시리즈해법은 시도함수(trial function)로 직교성 등의 성질을 가지는 시리즈를 사용하는 것으로, 시리즈의 선택에 따라 비교적 용이하게 해석절차를 개발 할 수 있다. 특히 시도함수로 사용된 시리즈해가 풀고자하는 지배방정식의 일반해인 경우에는 단지 경계면에서의 경계조건만 만족시키면 된다. 예를 들어, 직교성을

가지고 있는 체비셰프 다항식(tschebyscheff polynomials)이나 Fourier 시리즈 등은 수학적으로 완전한 집합(complete set)임이 증명되어 있는바, 평판의 휨문제를 풀기 위한 시도함수로 사용될 수 있다. 하지만 Fourier 시리즈는 체비셰프 다항식과는 달리 평판의 고전적 미분방정식인 복조화방정식(bi-harmonic equation)을 엄밀하게 만족하기 때문에, 이 해법에서는 경계조건만을 만족시키는 방법만을 연구하면 된다. (여기서, 이 해석법은 상용되는 경계요소법과 일맥상통하고 있다는 것을 알 수 있다.) 그러므로, 문제를 이러한 방법으로 접근해 나가기 위해서는, 평판에서의 Fourier 시리즈와 같이 주어진 문제의 지배방정식을 엄밀히 만족시키는 시리즈해를 우선 찾는 것이 중요하다. 상술되었던 것처럼, 특별한 경계조건을 가지는 경우에만 엄밀해가 정해로 표현될 수 있으므로 어떠한 경계조건에 대해 정해가 존재하는지에 대한 규명이 급선무라고 하겠다.

본 글에서는 속이 찬 실린더(solid cylinder)에서의 비대칭 탄성파전파 문제를 풀기 위한 해석적 방법의 일부를 소개하고자 한다. 속이 찬 실린더에 있어서는 측면벽의 경계조건에 상관없이 평판에서의 Fourier 시리즈와 유사한 단순해가 존재하지 않는다고 밝혀져 왔다⁽¹⁾. 그러나 최근 발표된 본인의 논문⁽²⁾에서 지적된 것처럼, 매우 특별한 측면 경계조건을 갖는 경우에만 정해가 존재한다. 특히 탄성파전파에 관한 한, 이러한 정해는 물리적으로 볼 때 팽창파(dilatational wave)와 전단파(shear wave)가 서로 얽히지 않는 상태에 해당되기 때문에, 소위 “비혼합해(uncoupled solution)”라 불린다. 이 “비혼합해(uncoupled solution)”의 실제 사용 예를 들면, 상술된 바와 같이 일반적인 측면 경계조건을 갖는 속이 찬 실린더 문제를 풀기 위한 시도함수(trial function)로 사용될 수 있을 것이다.

주지하는 바와 같이 자유측면벽(traction-free cylindrical wall)을 갖는 속이 찬 실린더는 공학적으로 매우 중요한 구조요소이다. 이 경우

에는 측면벽의 경계조건으로 말미암아, 해가 정해의 형태로 존재하지 않는다. 특히 이 구조물에서의 탄성파전파 문제를 다루고자 할때, 먼저 분산관계식(dispersion relation)을 구한 다음, 이를 이용해 경계문제를 푸는 것이 상용적으로 사용되는 방법이다. 이 분산 관계식은 파장과 주파수와의 관계를 나타내는 것으로, 그 복잡성으로 말미암아 이 식을 사용하는 수치해법으로 정확하게 구하는 것은 거의 불가능하다. 따라서, 본 글에서는 특별한 측면벽을 갖는 속이 찬 실린더의 비혼합해를 활용하여 자유측면벽을 갖는 속이 찬 실린더의 분산관계식(pochhammer의 분산관계식이라 불린다)을 구하는 법을 설명하고자 한다. 이를 위해 비혼합해가 존재하는 측면경계조건에 대해 먼저 살펴보고자 한다. 지금부터 기술할 내용은 필자의 논문⁽²⁾을 바탕으로 한 것임을 밝혀둔다.

2. 속이 찬 등방성실린더에서의 일반해

속이 찬 실린더가 등방성 재료로 만들어진 경우, 그 실린더 내에서의 탄성파 전파에 대한 일반해는 다음과 같이 표시될 수 있을 것이다^(3,4).

$$u_i(r, \theta, z, t) = \tilde{u}_i(r) \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{Bmatrix} \exp[i(\lambda z - \Omega t)]$$

$$\sigma_{ij}(r, \theta, z, t) = \tilde{\sigma}_{ij}(r) \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{Bmatrix} \exp[i(\lambda z - \Omega t)] \quad (1)$$

여기서

$$\tilde{u}_r(r) = A \frac{dJ_n(hr)}{dr} + B(i\lambda) \frac{dJ_n(kr)}{dr} - C \frac{n}{r} J_n(kr) \quad (2a)$$

$$\tilde{u}_\theta(r) = -A \frac{n}{r} J_n(hr) - B(i\lambda) \frac{n}{r} J_n(kr) + C \frac{dJ_n(kr)}{dr} \quad (2b)$$

$$\tilde{u}_z(r) = A(i\lambda)J_n(hr) + Bk^2J_n(kr) \quad (2c)$$

그리고

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{rr}(r) = A \left\{ -\frac{1}{r} \frac{dJ_n(hr)}{dr} + \left[\frac{n^2}{r^2} - \left(\frac{\Omega^2}{2} - \lambda^2 \right) \right] J_n(hr) \right\} + B(i\lambda) \left\{ -\frac{1}{r} \frac{dJ_n(kr)}{dr} + \left(\frac{n^2}{r^2} - k^2 \right) J_n(kr) \right\} - C_n \frac{d}{dr} \left[\frac{J_n(kr)}{r} \right] \quad (3a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\theta\theta}(r) = A \left\{ -\left[\frac{n^2}{r^2} + \left(\frac{1}{2} - \alpha^2 \right) \Omega^2 \right] J_n(hr) + \frac{1}{r} \frac{dJ_n(hr)}{dr} \right\} + B(i\lambda) \left\{ -\frac{n^2}{r^2} J_n(kr) + \frac{1}{r} \frac{dJ_n(kr)}{dr} \right\} + C_n \frac{d}{dr} \left[\frac{J_n(kr)}{r} \right] \quad (3b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{zz}(r) = A \left(h^2 - \frac{\Omega^2}{2} \right) J_n(hr) + B(i\lambda) k^2 J_n(kr) \quad (3c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{r\theta}(r) = A \left[-\frac{n}{r} \frac{dJ_n(kr)}{dr} + \frac{n}{r^2} J_n(kr) \right] + B(i\lambda) \left[-\frac{n}{r} \frac{dJ_n(kr)}{dr} + \frac{n}{r^2} J_n(kr) \right] + C \left[-\frac{1}{r} \frac{dJ_n(kr)}{dr} + \left(\frac{n^2}{r^2} - \frac{k^2}{2} \right) J_n(kr) \right] \quad (3d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{rz}(r) = A(i\lambda) \frac{dJ_n(hr)}{dr} + B \left(\frac{\Omega^2}{2} - \lambda^2 \right) \frac{dJ_n(kr)}{dr} - C \left(\frac{i\lambda}{2} \right) \frac{n}{r} J_n(kr) \quad (3e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\theta z}(r) = -A(i\lambda) \frac{n}{r} J_n(hr) - B \left(\frac{\Omega^2}{2} - \lambda^2 \right) \frac{n}{r} J_n(kr) + C \left(\frac{i\lambda}{2} \right) \frac{dJ_n(kr)}{dr} \quad (3f) \end{aligned}$$

있다.

식 (1)에서 u_θ , $\sigma_{r\theta}$, 그리고 $\sigma_{\theta z}$ 는 $\sin n\theta$ 를 취하고 나머지는 $\cos n\theta$ 를 취한다. 또한 식 (1)의 양들은 모두 무차원 변수화 되었다. 변위 ui 는 실린더의 반경 a 에, 응력 σ_{ij} 는 전단계수

의 2배인 2μ 에 대해 각각 무차원화 되었다. 반경 및 축좌표들은 각각 r 과 z 로 표시되었으며, 이 역시 실린더의 반경 a 에 대해 무차원화된 양이다. 그러므로 측면벽은 $r=1$ 로 표시될 수 있다. 시간 t 는 a/c_s 로 무차원화 하였는데, 여기서 c_s 는 무한 등방성 물질 속에서 전단파 전파 속도이다. c_s/a 로 무차원화 된 주파수는 Ω 로 표시하였으며, 원주방향 θ 에서의 Fourier수 (fourier number)는 n 으로 표시하였다. 편의상 다음과 같이 정의된 파라미터 h 와 k 를 도입하였다.

$$h^2 = \alpha^2 \Omega^2 - \lambda^2; \quad k^2 = \Omega^2 - \lambda^2 \quad (4)$$

여기서 λ 는 무차원 파동수 (wave number)를 표시하며 $1/a$ 에 대해 무차원화 하였다. 재료의 물성치로 볼 수 있는 α 의 정의는 다음과 같다.

$$\alpha^2 = \left(\frac{c_s}{c_d} \right)^2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \quad (5)$$

여기서 ν 는 poisson 비율 (poisson's ratio)이다 J_n 은 차수가 n 인 1종 Bessel 함수이며, A, B, C 는 미지수로서 경계조건으로부터 구한다. 여기서 주목해야 할 것 중의 하나는 h 와 k 는 각각 팽창파와 전단파에 관련되었다는 것이다. 이상으로 일반해에 대한 기술을 마치고, 비혼합해가 존재할 수 있는 가능성을 다음에서 살펴보기로 한다.

3. 비혼합파시스템 (Uncoupled Wave System)

이 절에서는 실린더벽의 가능한 모든 경계조건을 고려해서, 속이 찬 실린더가 비혼합해를 가지는 가능성을 조사해 본다. 이를 위해, 가능한 모든 실린더벽의 경계조건을 수식으로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} + e_1 u_r &= 0 \\ \sigma_{rz} + e_2 u_z &= 0 \quad (6) \end{aligned}$$

$$\sigma_{r\theta} + e_3 u_\theta = 0$$

여기서 e_i 는 임의의 수이다.

가능한 모든 e_i 가운데, 다음과 같이 특별한 2 경우에는 비혼합해가 존재하는 것을 밝힐 수 있다. 그 첫번째 경우는 다음과 같다.

$$u_r = 0 \quad (7a)$$

$$\sigma_{rz} = 0 \quad (7b)$$

$$\sigma_{r\theta} + u_\theta = 0 \quad (7c)$$

식 (7a, b)는 물리적으로 실린더 측면벽의 반경방향운동은 구속되어 있고 축방향으로의 운동이 자유롭다는 것을 나타낸다. 그리고 식 (7c)는 원주 방향으로의 운동은 탄성스프링으로 구속되었음을 표현한다.

식 (1~3)을 식 (7)에 대입하면 다음의 주파수 방정식을 얻는다.

$$J_n'(h) J_n(k) J_n(k) = 0 \quad (8)$$

식 (8)의 해는

$$J_n'(h) = 0, A \neq 0 (B = C = 0), \\ h = \xi_j, \lambda^2 = (\alpha^2 \Omega^2 - \xi_j^2) \equiv \lambda_{\alpha j}^2 \quad (9a)$$

$$J_n(k) = 0, B \neq 0 (A = C = 0), \\ k = \xi_l, \lambda^2 = (\Omega^2 - \xi_l^2) \equiv \lambda_{\Omega l}^2 \quad (9b)$$

$$J_n(k) = 0, C \neq 0 (A = B = 0), \\ k = \rho_m, \lambda^2 = (\Omega^2 - \rho_m^2) \equiv \lambda_{\Omega m}^2 \quad (9c)$$

있다.

여기서 ξ 와 ρ 는 $J_n'(r) = 0$ 와 $J_n(r) = 0$ 의 근을 표시하며 j, l, m 은 정수이다. 첨자 d 는 팽창파(dilational wave)를, 첨자 s 와 t 는 두 종류의 전단파(shear wave)를 강조하기 위해 쓰여졌다. 식 (9)를 살펴보면, 역시 이 경우에도 비혼합해가 존재하는 것을 알 수 있다. 즉, 식 (9a)는 팽창파만 관련된 식이며 식 (9b,c)는 전단파만 관련된 식이다.

두번째 경우로, 다음의 측면벽을 가지는 실린더를 고찰하자.

$$\sigma_{rr} + u_r = 0 \quad (10a)$$

$$u_z = 0 \quad (10b)$$

$$u_\theta = 0 \quad (10c)$$

식 (10a)는 반경방향의 운동이 탄성 스프링에 의해 구속된 것을 나타내며, 식 (10b, c)는 축방향 및 원주 방향의 운동이 제한되어 있음을 표현한다.

식 (1)에서부터 식 (3)을 식 (10)에 대입하면 식 (8)과 유사한 결과를 얻게 된다.

$$J_n(h) J_n(k) J_n'(k) = 0 \quad (11)$$

식 (11)에 해당하는 파시스템(wave system)도 역시 비혼합파시스템으로 구체적으로 표시하면 다음의 식이 될 것이다.

$$J_n(h) = 0, A \neq 0 (B = C = 0), \\ h = \rho_p, \lambda^2 = (\alpha^2 \Omega^2 - \rho_p^2) \equiv \mu_{\alpha p}^2 \quad (12a)$$

$$J_n(k) = 0, B \neq 0 (A = C = 0), \\ k = \rho_q, \lambda^2 = (\Omega^2 - \rho_q^2) \equiv \mu_{\Omega q}^2 \quad (12b)$$

$$J_n'(k) = 0, C \neq 0 (A = B = 0), \\ k = \xi_r, \lambda^2 = (\Omega^2 - \xi_r^2) \equiv \mu_{\Omega r}^2 \quad (12c)$$

여기서 p, q, r 은 정수이다.

원주방향의 Fourier수가 0인 경우, 즉 축대칭 문제인 경우, 식 (7)과 (10)은 각각 다음의 세 경우로 나누어진다.

$$\begin{cases} u_r = 0 \\ \sigma_{rz} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} + u_r = 0 \\ u_z = 0 \end{cases} \quad (14)$$

$$\sigma_{r\theta} + u_\theta = 0 \quad (15)$$

식 (13)과 (14)는 축대칭세로파(axisymmetric longitudinal wave propagation)에 대한 비혼합해를 얻기 위한 실린더의 측면벽 경계 조건이며, 식 (15)는 비틀림운동에 관련된 조건이다. 식 (13)에 해당되는 비혼합해의 형태는 다

음과 같다.

$$\begin{aligned} J_1(h) &= 0; h = \xi_j \\ \lambda^2 &= \alpha^2 \Omega^2 - \xi_j^2 \end{aligned} \quad (16a)$$

$$\begin{aligned} J_1(k) &= 0; k = \xi_l \\ \lambda^2 &= \Omega^2 - \xi_l^2 \end{aligned} \quad (16b)$$

여기서 ξ 는 $J_1(r)=0$ 의 해이다. 식 (14)에 해당되는 비혼합해의 형태는 이와 유사하게 아래와 같이 표시되며,

$$\begin{aligned} J_0(h) &= 0; h = \rho_p \\ \lambda^2 &= \alpha^2 \Omega^2 - \rho_p^2 \end{aligned} \quad (17a)$$

$$\begin{aligned} J_0(k) &= 0; k = \rho_q \\ \lambda^2 &= \Omega^2 - \rho_q^2 \end{aligned} \quad (17b)$$

여기서 ρ 는 $J_0(r)=0$ 의 해이다.

식(13)에 관련된 파동시스템을 제외하고는, 여기서 논의된 비접합해의 파동시스템은 최초로 밝혀진 파동시스템이다. 1960년 Pao와 Mindlin⁽¹⁾의 논문에서도 비접합해를 찾기 위해 노력을 하였으나, 속이 찬 실린더의 축비대칭 파동 문제에 관한 한 비접합해가 불가능하다고 결론지었다.

본 글에서 편의상 식 (9a)와 식 (12a)에 대응하는 시스템을 P 와 PP 라 부르기로 한다. 그리고 식 (9b) 또는 식 (12c)로 나타내어지는 시스템은 S 라 부르고, 식 (9c) 또는 (12b)로 표현되는 시스템을 T 라 부르기로 한다.

4. 결합파시스템

자유축면벽 (traction-free cylindrical wall) 을 속이 찬 실린더는 공학에서 매우 많이 사용되는 중요한 구조요소이다. 그러나 앞절에서 다루었던 파시스템과는 달리 자유축면벽이라는 경계조건 때문에 분산관계식은 매우 복잡한 형태로 나타난다. 이러한 현상의 물리적 이유는 실린더 내의 입자는 전단(shear)과 팽창

(dilatation)으로 얽혀져 있다는 것이다.

다음과 자유축면벽조건을 활용하면

$$\sigma_{rr} |_{r=1} = 0; \sigma_{r\theta} |_{r=1} = 0; \sigma_{rz} |_{r=1} = 0 \quad (18)$$

Pochhammer의 주파수 방정식(또는 분산관계식)을 얻는다.

$$\begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{33} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (19a)$$

여기서

$$\begin{aligned} M_{11} &= \left(n^2 - 1 - \frac{\Omega^2}{2} + \lambda^2 \right) J_n(h) \\ M_{21} &= -h J'_n(h) + J_n(h) \\ M_{31} &= (i\lambda) h J'_n(h) \\ M_{12} &= (i\lambda) (n^2 - 1 - k^2) J_n(k) \\ M_{22} &= (i\lambda) [-k j'_n(k) + J_n(k)] \\ M_{32} &= \left(\frac{\Omega^2}{2} - \lambda^2 \right) k J'_n(k) \\ M_{13} &= \left(-n + \frac{1}{n} \right) k J'_n(k) + \left(\frac{k^2}{2n} \right) J_n(k) \\ M_{23} &= -\frac{k}{n} J'_n(k) + \left(n - \frac{k^2}{2n} \right) J_n(k) \\ M_{33} &= -\left(\frac{i\lambda}{2} \right) J_n(k) \end{aligned} \quad (19b)$$

있다.

식(19b)에서, 첨자 '은 따라오는 변수에 관한 미분을 나타낸다. $n=0$ 인 경우에는 식 (19)는 아래의 두식으로 된다.

$$\begin{vmatrix} M_{11}^0 & M_{12}^0 \\ M_{21}^0 & M_{22}^0 \end{vmatrix} = 0 \quad (20a)$$

여기서

$$\begin{aligned} M_{11}^0 &= -h J'_0(h) + \left(\lambda^2 - \frac{\Omega^2}{2} \right) J_0(h) \\ M_{21}^0 &= (i\lambda) h J'_0(h) \\ M_{12}^0 &= (i\lambda) [-k J'_0(k) - k^2 J_0(k)] \end{aligned} \quad (20b)$$

$$M_{22} = \left(\frac{\Omega^2}{2} - \lambda^2 \right) k J_0(k)$$

그리고

$$[kJ_0(k) + \left(\frac{k^2}{2} \right) J_0(k)] C = 0 \quad (21)$$

있다.

식 (20), (21)은 각각 세로 및 비틀림파에 대한 주파수 방정식이다.

주어진 주파수 Ω 에 대해서는, 유한개의 실수 파동수(real wave number)와 무한개의 허수파동수(imaginary wave number)와 복소수 파동수(complex wave number)가 존재하며, 허수 및 복소수파동수는 물리적으로 소위 끝단 효과와 연관되어진다. 끝단효과란, 경계 끝단에서의 외부하중등이 내부에 끼치는 영향은 지수함수의 형태로 감쇠하는 현상을 말한다. 여기서 주목해야 할 사항은 팽창파와 전단파가 무한3차원 공간에서와는 달리, 실린더 내에서 같은 전파속도로 전파한다는 것이다.

이것이 바로 Pochhammer의 주파수 방정식은 팽창파 전단이 혼합된 파동계를 도출하는 이유이다.

차단주파수 ($\lambda=0$)와 정적인 경우($\Omega=0$)에 대한 파동수에 대한 결과는 극한처리를 통해 얻을 수 있다.

5. Pochhammer방정식에 대한 분산곡선 (Dispersion Curve)

일반적으로 “분산”이란 파전파속도가 주파수에 따라 변함을 뜻한다. 만약 파전파속도가 주파수에 무관하면, “비분산”이라 부른다. 분산관계를 얻기 위해서는 주파수방정식을 풀면 된다.

Pochhammer 주파수 방정식은 풀기가 매우 어려운 반면, 비혼합시스템에 해당되는 주파수 방정식인 식 (8)과 식 (11)는 풀기가 매우 쉽다. 그러므로, 본 연구에서는 풀기 힘든 Pochhammer방정식의 분산곡선을 얻기 위해,

풀기쉬운 비혼합시스템의 분산관계를 활용하여 푸는 방법을 제시하고자 한다. Pochhammer 방정식을 푸는 방법은 여러가지가 있으나(예를 들면 Pao와 Mindlin의 방법⁽¹⁾, Zemanek이 사용한 직접수치해법⁽⁵⁾, 또는 Huang과 Dong의 유한요소법과 해석해법의 결합인 반-해석적방법⁽⁶⁾), 여기서 제시하는 방법이 앞으로 설명되듯이, 가장 효과적인 것으로 판단된다.

축대칭인 경우에 대한 분산곡선은 비교적 얻기가 쉬우므로, 여기서는 축비대칭 경우에 대해서만 논의하고자 한다.

먼저 $n=2$ 인 경우를 살펴보기로 하자. 앞으로 편의상 자유측면벽을 가지는 실린더에 대한 파동시스템을 혼합시스템, 식 (7) 또는 식 (10)으로 표시되는 측면벽을 가지는 실린더에 대한 파동시스템을 비혼합시스템이라 부르기로 한다. 그림 1은 혼합시스템과 비혼합시스템에 대한 분산곡선을 보이고 있다. 여기서 Pisson를 인 ν 는 0.3317(알루미늄에 해당)이 사용되었으며, 그 결과를 Zemanek의 결과⁽⁵⁾와 비교하기 위함이다. Pochhammer 방정식의 가지(branch)들은 굵은실선으로 표시되었으며, 이것들은 Pochhammer 방정식을 수치적으로 풀어 얻은 것이다. 그리고 비혼합시스템의 P, PP, S 그리고 SS 곡선은 실선, 1점쇄선, 점선

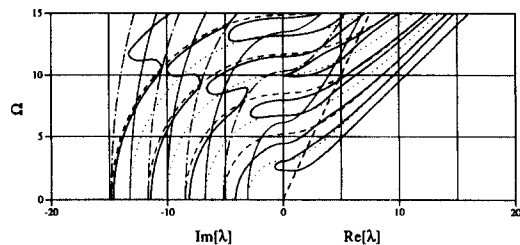


그림 1 Pochhammer 방정식의 가지들(굵은실선)과 비혼합파시스템의 분산곡선($n=2$, $\nu=0.3317$ 인 경우). $h=0$ 선은 굵은 파선으로 표시되었으며, 비혼합파시스템의 분산곡선은 각각 실선($J_n(h)=0$), 1점쇄선($J_n(h)=0$), 점선($J_n(k)=0$) 및 파선($J_n(k)=0$)으로 표시되었음.

및 파선으로 각각 표시되었다. 굵은 파선은 $h=0$ 에 해당하는데, 이 선상에서는 실린더 내의 파진파 속도가 무한탄성체에서의 팽창파의 전파속도와 동일하다. 우선 실수파동수에 대한 분산곡선을 살펴보기로 하자. 그림 1에서 보여지는 바와 같이 Pochhammer 방정식의 가지(branch)들은 P 와 S 곡선, 즉 실선과 점선의 교차점을 근사적으로 통과한다. 또한 그 가지들이 PP 와 T 곡선 즉 1점쇄선 및 파선의 교차점으로부터 매우 가까운 거리에 놓여 있음을 알 수 있다.

Pochhammer 방정식의 난해한 성질을 더욱 잘 알기 위해서는, 비교적 높은 주파수 영역에 해당되는 분산곡선을 고려해야만 한다. 그림 2는 비교적 높은 주파수 영역에서, 혼합파동시스템(pochhammer 방정식과 연관됨)과 비혼합파동시스템의 분산곡선을 보여준다. 여기서는, Pochhammer 방정식의 가지들이 P 와 S 곡선(실선과 점선)의 교차점을 근사적으로 통과한다는 것이 분명히 나타난다. 또한 이 가지들이

이 교차점 부근에 점근적으로 S 곡선(점선)에 접선인 것을 알 수 있다. 아울러 Pochhammer 방정식의 가지들이 그 교차점 근처에서 변곡점을 가진다는 것은 매우 재미있는 사실이다.

P 와 S 곡선의 교차점들이 Pochhammer 방정식의 해로서 얼마나 좋은지 조사해 보기 위해 점근적 해석을 시도해 보기로 하자. S 곡선의 지배방정식인 $J_n(n)$ 을 Pochhammer 방정식에 대입하면, 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\Theta_n(h) - n - \frac{\lambda^2 + k^2}{2(n^4 - n^2 - 2n^2k^2 + k^4)} = 0 \quad (22)$$

여기서 $\Theta_n(h) = J_{n-1}(h)/J_n(h)$. 특히 k 가 큰 값을 가질 때 식(22)의 점근적 형태는

$$\Theta_n(h) \approx n \iff J_n'(h) \approx 0 \quad (23)$$

이 점근식의 정확도는 $O(1/\lambda^2)$ 이므로 P 와 S 곡선(실선과 점선)의 교차점은 Pochhammer 방정식의 해로 $O(1/\lambda^2)$ 만큼 정확하다.

그림 2로부터 PP 와 T 곡선(1점쇄선과 파선)의 교차점 부근에 Pochhammer 방정식의 가지 2개가 매우 가까이 놓여 있고, 그것들의 기울기가 급격하게 변하는 것을 알 수 있다. 여기서 두 가지가 마치 서로 교차하는 것 처럼 보이나, 결코 교차하지 않는다는 것을 꼭 염두에 둘 필요가 있다. 상위 가지(higher branch)는 PP 와 T 곡선의 교차점 근처를 지나기 전에 T 곡선 위 부근에 머물러 있다가, 그 교차점을 지나자마자 PP 곡선에 점근적 기울기를 갖게 된다. 이어서, 그 가지는 음의 곡률을 지니는데, 이것은 마치 다음의 P, S 곡선의 교차점을 지나기 위해 준비하는 것 처럼 보인다. 이와는 대조로, 하위가지(lower branch)는 P, S 곡선의 교차점에서부터 PP, T 곡선의 교차점으로

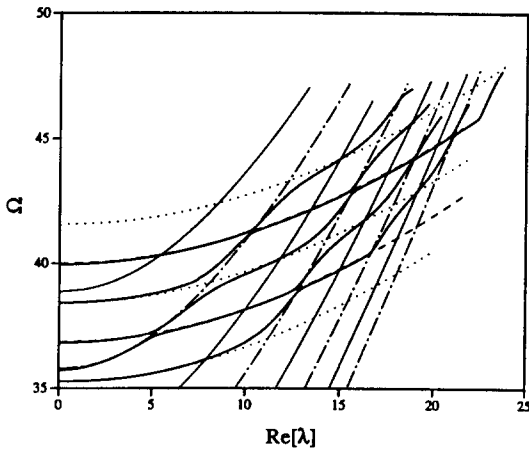


그림 2 $n=2, v=0.3317$ 인 경우에 대한 높은 주파수영역에서의 Pochhammer 방정식에 대한 분산곡선(굵은실선). 비혼합파동시스템의 분산곡선은 각각 실선 [$J_n(h)=0$], 1점쇄선 [$J_n(h)=0$], 점선 [$J_n(k)=0$] 및 파선 [$J_n(k)=0$]으로 표시됨.

향해 나간다. 그 가지는 이 두 교차점 사이에서 양의 곡률을 가지며, 그 기울기는 P - S 곡선의 교차점 근처에는 S 곡선(점선)에 점근적이며, PP - T 곡선의 교차점 근처에는 PP 곡선에 점근적이다. 하위가지가 PP 와 T 곡선(1점쇄선과 파선)의 교차점을 통과한 후에, 그 기울기는 T 곡선의 기울기에 점근적이다가, 마침내 다음번 PP - T 곡선의 교차점에 다가간다.

물론 PP 와 T 곡선의 교차점만으로도, Pochhammer의 방정식에 대한 가지들의 거동을 비교적 잘 예견할 수 있지만, 그 거동을 좀더 잘 알기 위해서 그 교차점 부근에서의 점근적 해석을 해 볼 필요가 있다. 이를 위해 $J_n(k)=0$, 즉 PP 곡선에 대한 방정식을 Pochhammer의 방정식에 대입하여 보자. 그러면 큰 k 에 대해, 다음과 같은 두개의 점근적 해를 구할 수 있다.

$$J_n(k) \approx 0 \quad (24a)$$

$$J_n(k) + [5 + (1 - \alpha^2)/\alpha^2] J_{n-1}(k)/k \approx 0 \quad (24b)$$

특히 $n=1$ 이 되는 경우에는 식 (24a)은 엄밀해가 되며, 이 방정식은 T 곡선(파선)에 대한 식이 된다. $n=2$ 이고 $v=0.3317$ 인 경우에는 식 (24a)에 대한 해는 5.136, 8.417, 11.61, ..., 33.72, 36.86, 40.01, ... 이며 그리고 식 (24b)에 대한 해는 4.225, 7.699, 11.04, ..., 33.49, 36.65, 39.81, ... 있다.

k 가 점점 커짐에 따라 식 (24a)와 식 (24b)의 해는 점점 가까워지는 것을 알 수 있다. 그러므로, 수치해석법을 사용하여 PP 와 T 곡선의 교차점 부근에서 큰 파동수에 대한 분산 관계식을 얻고자 하면, 식 (24a)와 식 (24b) 등의 근사해로 표시되는 두 집단의 해 중 단 한 집단의 해만 구하게 될 가능성이 극히 높다. 앞으로의 편의를 위해 $k_0^2 = \Omega^2 - \lambda^2$ 으로 표시되는 분산곡선을 TA 로 표시하며, 여기서 k_0 는 식 (24b)의 해이다.

그림 3은 PP 와 T 곡선(1점쇄선과 파선) 그

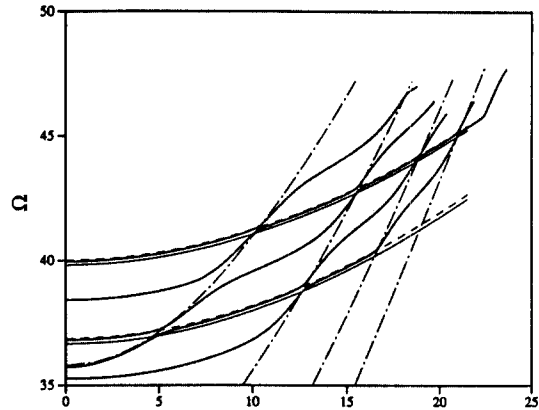


그림 3 Pochhammer의 방정식(굵은실선)에 대한 점근해(asymptotic solution). 이 방정식의 분산곡선들이 1점쇄선 [$J_n(k)=0$]과 파선 [$J_n(k)=0$]과의 교차점 및 1점쇄선 [$J_n(k)=0$]과 실선 [$J_n(k) + [5 + (1 - \alpha^2)/\alpha^2] J_{n-1}(k)/k \approx 0$]과의 교차점을 점근적으로 통과한다. ($n=2, v=0.3317$)

리고 PP 와 TA 곡선(1점쇄선과 실선)의 교차점 부근이 얼마나 Pochhammer 방정식의 가지들에 가까운지를 보여준다. 따라서 T 곡선뿐만 아니라 TA 곡선들도 Pochhammer의 방정식의 가지들을 정확하게 효율적으로 얻는데 있어 매우 유효한 도구임을 인식할 수 있다.

Ω - λ 평면상의 국부 최대, 최소 집단속도(group velocity)를 갖는 점들이, 비혼합시스템의 분산 곡선들의 교차점으로 매우 잘 예견된다는 것은 중요한 의미를 갖는다. 왜냐하면, 과도 파동전파(transient wave propagation)를 다루는데 있어서는 실린더 내부의 어떤 점에서의 응답(response)에 가장 많이 기여하는 파동모우드(wave mode)는 국부 최대, 최소 집단속도를 갖는 것들이기 때문이다. (예를 들어, 참고문헌⁽⁷⁾을 참조)

지금까지 다루어 왔던 영역은 $k=0$ 인 선에서부터 멀리 떨어진 곳이었다. 그림 4는 $k=0$ 근처에서 Pochhammer 방정식의 가지들의 거동을 예시하고 있다. 굵은 파선으로 표시된 $k=0$ 선은 (9a)와 (12a)의 해로 간주될 수 있

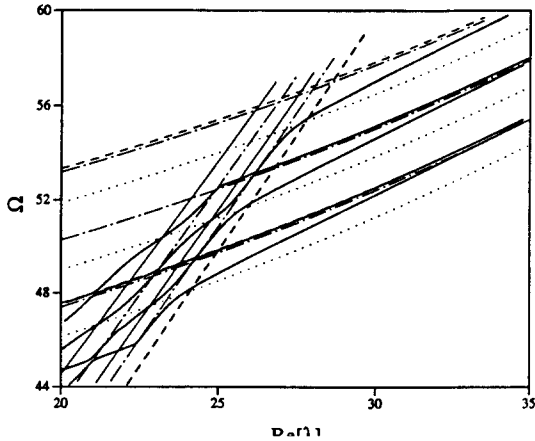


그림 4 $h=0$ 선(굵은파선)근처에서의Pochhammer 방정식들의 분산곡선 ($n=2, \nu=0.3317$). 실선 [$J_n'(h)=0$], 1점쇄선 [$J_n(h)=0$] 및 파선 [$J_n(k)=0$]은 비혼합파의 분산곡선을 나타낸다.

으며, $n=1$ 인 경우에는 $h=0$ 선이 $dJ_n(kr)/dr=0$ ($r=1$)의 해로 취급될 수 있다. 그림 4에서 알 수 있듯이 Pochhammer 방정식의 가지들이 $h=0$ 선과 교차하는 점들은 점근적으로 $h=0$ 선과 S, T곡선과의 교차점으로 접근한다. 지금 고찰하고 있는 영역에서의 가지들의 거동과 그림 2, 3등에서 본 영역에서의 가지들의 거동의 차이는 $h=0$ 와 S곡선(점선)의 교차점 주변에서 곡률의 변화가 크게 다르다는 것이다. 특히 지금의 영역에서는 가지들이 그 교차점을 통과한 후에 T곡선(파선), 더 엄밀히 말하자면 TA곡선(1점쇄선)에 점근적으로 다가간다. TA곡선의 궁극적 점근선은 $k=0$ 선이 되는데, 여기서는 상전파속도(phase velocity)가 무한 탄성체에서의 전단파속도와 동일하다.

지금까지 다루어온 해석으로, 비혼합시스템

의 해를 이용해 Pochhammer 방정식의 분산곡선을 효과적으로 얻을 수 있음을 보여주고 있다. 더군다나 이러한 기법은 분산곡선의 물리적 현상을 규명하는데 있어 매우 유용하다는 것을 알 수 있다.

참고문헌

- (1) Pao, Y.-H. and Mindlin, R.D., 1960, Dispersion of Flexural Waves in an Elastic, Circular Cylinder, J. of Applied Mechanics, Vol. 27, pp.513~520.
- (2) Kim, Y. Y., 1989, Uncoupled Wave Systems and Dispersion in an Infinite Solid Cylinder, J. of Applied Mechanics, Vol. 56, pp. 347~355.
- (3) Miklowitz, J., 1978, The Theory of Elastic Waves and Waveguides, North-Holland Publishing Co., Amsterdam.
- (4) Achenbach, J. D., 1975, Wave Propagation in Elastic Solids, North-Holland Publishing Co., Amsterdam.
- (5) Zemanek, J., 1972, An Experimental and Theoretical Investigation of Elastic Wave Propagation in a Cylinder, J. Acoust. Soc. Am., Vo. 51, pp. 265~283.
- (6) Huang, K. H. and Dong, S.B., 1984, Propagating Waves and Edge Vibrations in Anisotropic Composite Cylinders, J.Sound Vibration, Vol. 96, pp. 8~19.
- (7) Shen, S.-Q., 1988, Transient Elastic Waves in a Circular Cylinder, Ph.D. Thesis, Cornell University, Ithaca, New York.

