□ 論 文 □

극대화 효율적 해법

엔트로피 極大化 통행배분모형의 效率的 解法 개발

Development of an Efficient Solution Method for the Wilson's Trip Distribution Model

노 정 현

魯 正 鉉

(漢陽大學校 工科大學 都市工學科 敎授)

目 次

Ⅰ. 서 론

Ⅱ. Wilson의 엔트로피 극대화 통행배분모형

Ⅲ. Wilson의 반복평형기법

Ⅳ. 효율적 해법개발

Ⅴ. 실례를 통한 두 방법의 비교

Ⅵ. 결 론

ABSTRACT

Wilson made an importent contribution to develop a trip distribution model with the general form of gravity model, which is an entropy maximization program. Also, Wilson suggested a technique, which is called the "iterative balancing method", for soving the model. This technique, however, is not stable to find solution because it is a heuristic method, and sometimes does not converge to the correct solution.

In this paper, a new solution method using a numerical method for solving the non-linear simultaneous equation system is developed and evaluated in both computers VAX 8700 and PC/AT 286. The result of this method and Wilson's method are compared with each other. Wilson's method resulted in inferior solutions measured by the final norm of residuals.

Ⅰ. 서 론

교통계획과정에 있어 교통수요의 정확한 추정은 교통시설투자계획, 교통관리 정책수립에 있어 필수 불가결한 요소이다. 교통수요를 정확히 추정하기 위해서는 합리적인 모형의 개발과 응용이 필요하며 특히 모형의 효율적인 해법은 모형이용의 성패를 좌우한다 할 것이다.

Wilson(1970)은 통행량의 공간적 분산도 (degree of spatial dispersion)를 엔트로피(enteopy)로 정의하여 이를 극대화시키는 엔트로피 극대화 통행수요모형을 개발하였다. 이 모형은 비선형 최적화 모형(non-linear optimization model)으로 각종 제약조건(constraints)을 도입함으로써 다양한 형태의 통행수요모형을 도출해 낼 수 있는 매우 융통성 높은 모형으로 최근 가장 널리 사용되는 수학적(numerical) 모형이다. Wilson(1970)은 이 모형의 해법으로 반복적 평형기법(iterative balancing technique)이라는 직관적 방법(heuristic method)을 제시하였다.

Wilson의 반복적 평형기법은 통행배분모형의 정립 및 통행배분량 예측에 널리 응용되어 왔다(Chon, 1982). 그러나 이러한 직관적 방법은 모형의 활용성은 물론이고 최근 널리 사용되고 있는 각종 단계별 통행수요모형의 통합에 많은 제약이 되고 있다.

Wilson의 해법에 대해 최적해를 찾는 속도를 빠르게 하고자 하는 부분적 노력은 있었으나(Lee, 1985) 이에 대한 평가나 새로운 시도는 없었다. Rho(1989)는 엔트로피 극대화 통행수요모형과 유사한 구조를 가지고 있는 Wilson의 화물유통모형에 반복평형기법을 응용한 결과 해를 찾지 못하는 등 불안정성을 갖고 있음을 발견하였다. 따라서 본 논문은 Wilson의 모형 중 가장 대표적인 엔트로피 극대화 통행배분모형의 새로운 수치해석적 해법을 개발하여 모형의 효율성을 높이고자 하는 것이다.

Ⅱ. Wilson의 엔트로피 극대화 통행배분모형

본 논문에서 다루고자 하는 모형은 가장 대표적인 모형으로 존별 통행발생량과 존별 통행도착량을 제약조건으로 갖는 이중제약조건 엔트로피 극대화 통행배분모형으로 그 수학적 구조는 다음과 같다.

$$\text{(P1)Maximize} \quad S = -\sum_i \sum_j Tij \cdot \ln Tij \tag{1}$$

$$\text{subject to } \sum_j Tij = Oi \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{2}$$

$$\sum_i Tij = Dj \quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{3}$$

$$\sum_i \sum_j Cij \cdot Tij \leq c \tag{4}$$

$$Tij > 0 \tag{5}$$

여기서 Tij는 존i에서 존j의 통행량
Oi는 존i의 발생량
Dj는 존j의 도착량
Cij는 존i에서 j로의 통행 비용
C는 총 통행 비용을 나타낸다.

(P1)은 대표적인 비선형 최적화 문제(non-liear optimization problem)로 이를 풀기 위해 라그랑지 방법(Lagrange method)을 사용하면,

(P1)의 Lagrangian은

$$\begin{aligned} \alpha = & -\sum_i \sum_j Tij \cdot \ln Tij \\ & + \sum_i \gamma i(Oi - \sum_j Tij) \\ & + \sum_j \gamma j(Dj - \sum_i Tij) \\ & + \beta(C - \sum_i \sum_j Cij \cdot Tij) \end{aligned}$$ 이 된다. (6)

여기서 γi, γj, β는 각 제약조건의 Lagrange 승수를 나타낸다.

결국 식(5)의 1차 최적조건(lst-order optimization conditions)은

$$-\ln Tij^* - \gamma i - \gamma j - \beta^* Cij - 1 = 0 \quad i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{7}$$

$$\sum_j Tij^* - Oi = 0 \quad i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{8}$$

$$\sum_i Tij^* - Dj = 0 \quad i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{9}$$

$$\beta^*(C - \sum_i \sum_j Cij \cdot Tij^*) = 0 \tag{10}$$

$$C - \sum_i \sum_j Cij \cdot Tij^* \geq 0 \tag{11}$$

$$\beta^* \geq 0 \tag{12}$$

이 된다. 단 여기서 Tij*는 위 조건을 만족하는 해를 말하며, n는 존의 수를 나타낸다.

또한 이 Lagrangian 함수는 완전히 오목한(strictly concave) 함수이므로 이들 1차조건을 만족하는 Tij*는 구하고자 하는 유일한 최적해(unique optimal solution)가 된다.

식(7)으로 부터 식(13)이 얻어지며

$$Tij^* = \exp(-\gamma i - \gamma j - \beta Cij - 1)$$
$$= \exp(-\gamma i) \cdot \exp(-\gamma j - 1) \cdot \exp(-|\beta| Cij)$$
$$i, j = 1, 2, \cdots, n \quad (13)$$

여기서 $Ai = \exp(-\gamma i)/Oi$

$Bj = \exp(-\gamma j - 1)/Dj$ 라 정의하면

식(13)은 $Tij^* = Ai \cdot Oi \cdot Bj \cdot Dj \cdot \exp(-\beta^* Cij)$

$$i, j = 1, 2, \cdots, n \quad (14)$$

이 된다.

결국 (P1)의 조건은 다음과 같게 된다.

$$Tij^* = Ai \cdot Oi \cdot Bj \cdot Dj \cdot \exp(-\beta^* Cij) \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n \quad (14)$$

$$\sum_j Tij^* = Oi \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n \quad (8)$$

$$\sum_i Tij^* = Dj \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n \quad (9)$$

$$\beta^*(C - \sum_i \sum_j Cij \cdot Tij^*) = 0 \quad (10)$$

$$\sum_i \sum_j Cij \cdot Tij^* < C \quad (11)$$

$$\beta^* \geq 0 \quad (12)$$

여기서 만약 $\beta^* = 0$ 이면, 최적해 Tij^*는 식 (8), (9), (14)를 풀어 구할 수 있으며, $\beta^* > 0$ 이면 최적해 Tij^*는

(P2)

$$Tij^* = Ai \cdot Oi \cdot Bj \cdot Dj \cdot \exp(-\beta^* Cij) \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n \quad (14)$$

$$\sum_j Tij^* = Oi \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n \quad (8)$$

$$\sum_j Tij^* = Oi \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n \quad (9)$$

$$C - \sum_i \sum_j Cij \cdot Tij^* = 0 \quad (15)$$

를 풀어 구할 수 있다.

Ⅲ. Wilson의 반복 평형 기법

Wilson(1970)은 Kuhn-Tucker 최적조건 (P2)를 풀기 위한 직관적방법(heuristic method)으로 반복적 방법(iterative method)을 개발하였다.

즉, Wilson은 식(14)를 식(8)과 식(9)에 대입 정리함으로써

각각 $Ai = 1/[\sum_j Bj \cdot Dj \cdot \exp(-\beta Cij)]$

$$i = 1, 2, \cdots, n \quad (16)$$

$$Bj = 1/[\sum_i Ai \cdot Oi \cdot \exp(-\beta Cij)]$$

$$j = 1, 2, \cdots, n \quad (17)$$

를 얻고 반복적 과정을 통해 안정된 파라메타(parametars)값을 찾아 이들을 식(14)에 대입함으로서 Tij^*의 값을 찾는 것이다. Wilson은 이러한 방법이 주어진 β값에 대하여 식 (8)과 (9)를 만족시키기 위해 Ai와 Bj가 반복적 과정을 거쳐 평형을 이룬다하여 이들 파라메타를 "평형계수(balancing factors)"라 하였다. 여기서 또한 식(15)를 만족시키는 β값은 통행비용(Cij)에 대한 저항계수(deterrence factor)라 한다.

결국 Wilson의 반복평형기법(iterative balancing method)은 주어진 β값에 대하여 식(16)와 식(17)을 반복적 방법으로 안정된 Ai 와 Bj 를 찾는 내부반복과정과 식(15)를 만족시키는 β값을 체계적(systematic)으로 찾아가는 시행착오 외부반복과정(예 : 이중분할 접근법(bi-section method))으로 나누어진다. 이 방법을 정리하면 다음과 같다.

Step 0 : β값의 범위를 정한다.

Step 1 : 이중분할법(bi-section method)에 의해 β값을 결정한다.

Step 2 : 반복평형기법(내부반복과정)

Step 2-0 : 반복회수를 나타내는 변수 k의 값을 0으로 설정하고 모든 i에 대하여 Ai의 초기값 Ai(k)을 정한다.

Step 2-1 : 모든 j에 대하여

$$Bj = 1/[\sum_i Ai(k) \cdot Oi \cdot \exp(-\beta Cij)]$$

를 구한다.

Step 2-2 : 모든 i에 대하여

$$Ai(k+1) = 1/[\sum_j Bj \cdot Dj \cdot \exp(-\beta Cij)]$$

를 구한다.

Step 2−3 : 모든 i에 대하여 $Ai(k)$과 $Ai(k+1)$이 근접한지를 검정한다. 만약 근접하지 않았으면 반복회수를 $(k+1)$으로 증가시키고 Step 2−1로 가서 각 과정을 반복한다.

Step 2−4 : $Tij=Ai(k)\cdot Oi\cdot Bj\cdot Dj\cdot \exp(-\beta Cij)$를 구한다.

Step 3 : $\sum_i\sum_j Cij\cdot Tij$가 C에 근접한가를 검정한다. 만약 근접하지 않았으면 Step 1로 가서 β값을 수정한 뒤 각 과정을 반복한다.

Step 4 : 최적해 $Tij^*=Ai(k)\cdot Oi\cdot Bj\cdot Dj\cdot \exp(-\beta^* Cij)$를 구한다.

Ⅳ. 효율적 해법개발

앞에서 기술한 Wilson의 반복평형기법(iterative balancing method)은 직관적 방법으로 유사한 모형의 경우에서 보여준 바와 같이 해를 찾는데 많은 시간을 요하며, 그 결과 또한 부정확하고 때에 따라 안정된 값으로 접근하지 못하는 경우도 있다(Rho, 1989).

또한 이러한 직관적 방법(heuristic method)은 최근 널리 시도되고 있는 각단계별 통행수요모형의 통합모형 및 해법 개발에 제약이 되고 있다. 따라서 여기서는 보다 효과적인 수치해석적 방법(numerical method)을 개발한다.

즉 최적화 조건(P2)에서 식(14)를 식(8), (9), (15)에 대입하여 정리하면

(P3) $$Ai=1/[\sum_j Bj\cdot Dj\cdot \exp(-\beta^* Cij)]=0 \quad i=1,2,\cdots,n \qquad (18)$$

$$Bj=1/[\sum_i Bj\cdot Dj\cdot \exp(-\beta Cij)]=0 \quad j=1,2,\cdots,n \qquad (19)$$

$$C-\sum_i\sum_j Cij\cdot Ai\cdot Oi\cdot Bj\cdot Dj\cdot \exp(-\beta^* Cij)=0 \qquad (20)$$

이 된다. 결국 (P3)는 미지수가 Ai, Bj, β^*로 $(2n+1)$개이며, 방정식 또한 $(2n+1)$개인 비선형 연립방정식(non-linear simultaneous equations)체계가 된다. 따라서 이 (P3)를 이미 개발된 비선형 연립방정식의 해법을 사용하여 푸는 수치해석적 방법이 가능하다.

Powell(1970)은 전통적인 비선형 연립방정식의 해법인 Newton−Raphson 반복법을 각 결정 변수의 초기치가 적절하지 못하면 반복과정이 해에 접근하지 못한다는 사실을 발견하고 수정된 방법인 Hybrid 방법을 제시하였다. Powell의 Hybrid 방법은 다음과 같다.

즉, 연립방정식 체계가

$$fi(\bar{z})=fi(z_1, z_2\cdots, z_n) \quad i=1,2,3,\cdots,n \qquad (21)$$

라고 하면 결정변수의 벡타 $\bar{z}$는 다음 식(22)와 같이 수학적 반복과정을 거쳐 해로 접근하게 된다.

$$\bar{z}(k+1)=\bar{z}(k)-\frac{1}{2}[\frac{\partial}{\partial z}f(z)]_{z=\bar{z}(k)}/(k) \qquad (22)$$

여기서 $F(\bar{z})=\sum[fi(\bar{z})]^2$로 잔차의 자승합(sum of squares of residuals)이며, $\mu(k)$는 k번째 반복과정에서 해로의 접근을 가장 빨리 유도하는, $F(\bar{z}(k+1)) < F(\bar{z}(k))$를 만족시키는 비음 파라메타(non−negative parametar)이다.

결국 이와 같은 수학적 반복과정은 다음 두가지 근접성 평가기준(convergence criteria)을 만족시킬 경우 중단되게 된다.

$$\|\bar{z}(k+1)-\bar{z}(k)\|\le\varepsilon_1\|\bar{z}(k)\| \qquad (23)$$

$$\|f(\bar{z}(k+1))\|\le\varepsilon_2 \qquad (24)$$

여기서 $\|\ \|$는 euclidean norm을 나타내며 ε_1과 ε_2는 정확도의 허용오차를 말한다.

V. 실례를 통한 두 방법의 비교

앞의 두 방법은 프로그램으로 작성되어 VAX 8700과 PC/AT 286에서 검정되었다. 검정을 위해 청주시의 25개 존간 통행비용과 통행량 자료를 사용하여 각기 다른 총통행 비용(C), 존별 발생량(Oi), 존별 도착량(Dj)의 A, B, C, D 4가지 자료를 생성하였다. 여기서 A는 원래 조사된 자료를 나타내며, B, C, D는 존별 통행발생량 및 도착량을 임의로 변경하여 생성된 자료이다.

실례를 통한 검정 결과는 〈표 1〉과 같이 해의 정확도는 새로운 방법이 Wilson의 방법보다 훨씬 높은 것으로 나타났으며, 컴퓨터 CPU 시간은 자료에 따라 시간의 차이는 있으나 해의 정확도 면에서 볼 때 새로운 수치해석적 방법이 대체로 적게 걸리는 것으로 나타났다. 특히 같은 정확도의 해를 찾는 경우는 새로운 방법이 Wilson의 방법보다 빠를 것이다.

해법의 우월성은 해의 안정성과 정확성 그리고 응용성으로 판단할 수 있는 바, 본 연구의 결과로는 안정성에 대한 평가를 할 수 있는 방법을 찾지 못하였다. 그러나 유사한 모형과 해법에 관한 연구에서 보듯 Wilson의 해법은 안정성이 부족하다 할 수 있다(Rho, 1989). 잔차의 자승합(norm of residuals)으로 표현되는 정확성은 새로운 해법이 Wilson의 해법보다 월등하게 우월함을 보여주고 있다. 또한 응용성에 있어서는 일반적으로 수치해석적 방법이 직관적 방법보다 과학적이며 체계적이라는 점 이외에도 현재 연구되고 있는 통합교통수요모형의 개발에도 큰 도움이 되리라 판단된다.

Ⅵ. 결 론

본 논문은 가장 널리 이용되고 있는, 그리고 가장 일반적으로 융통성이 높은 통행배분모형인 Wilson의 엔트로피 극대화 통행배분모형의 효율적 해법을 개발하였다. 이 해법은 직관적 방법인 Wilson의 반복평형법과는 달리 Kuhn-Tucker최적조건을 변형하여 비선형 연립방정식 체계를 만들고 이를 Powell의 Hybrid 방법을 이용하여 해를 구하는 것으로 자료를 통한 분석 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 새로 개발된 해법은 수치해석적 방법(numerical method)을 사용하므로 직관적인 방법(heuristic method)을 사용하는 Wilson의 해법보다 안정적이고 신뢰성이 높다.

둘째, 새로 개발된 해법은 해의 정확도 면에서 Wilson의 해법보다 훨씬 월등하다.

〈표 1〉 실례를 통한 검정 결과의 비교

해 법	자 료	CPU시간 (sec)	잔차의 자승합 (norm of residuals)	사용컴퓨터
Wilson의 반복평형기법	A	95.1	0.23842×10^{-6}	VAX 8700
	B	138.3	0.62629×10^{-4}	
	C	62.7	0.43272×10^{-4}	
	A	218.2	0.23842×10^{-6}	PC/AT 286
	D	204.5	0.11921×10^{-6}	
수치해석적 방법 (Powell의 Hybrid법 사용)	A	164.4	0.15047×10^{-9}	VAX 8700
	B	65.0	0.51203×10^{-7}	
	C	45.9	0.25427×10^{-7}	
	A	445.2	0.15047×10^{-9}	PC/AT 286
	D	573.6	0.50932×10^{-9}	

셋째, 새로 개발된 해법은 수치해석적 방법을 사용하므로 통합수요모형(combined travel demand method) 개발 및 해법개발에 기여할 수 있다.

參考文獻

Chon K,S., Testing of Combined Urban Location and Travel Choice Models, Ph. D. Thesis, Department of Civil Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1982.

Lee, Y. J., Methods for Implementation Network Eguilibrium Models of Uran and Travel Choice, Ph. D. Thesis, Department of Civil Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1985.

Powell, M. J. D., "A Hybrid Method for Nonlinear Equation", in Numerical method for Nonlinear Algebric Eguation, edited by P. Rabinowitz, London : Gordon and Breach, 1970.

Rh, J. H., D. E. Boyce and T. J. Kim, "Comparison of Solution Methods for Wolson's Interregional Commodity Flow Model", Geographical Analysis, vol. 21, no. 3, 1989.

Wilson, A. G., Entropy in Urban and Regional Modelling, London : Pion Ltd., 1970.