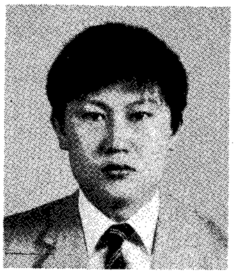
광학개론(8)

〈자이델수차의 계산〉



삼양광학공업주식회사
부설연구소 정해빈

13. 자이델수차의 계산과 그 이용방법

13.1 자이델수차 계수의 계산

자이델수차는 앞장에서 이미 언급한 바와 같이 입사고, 시계각 등에 대해 비례 관계가 성립하므로 어느 한 조건에서의 수차계수만 구하면 임의의 입사고, 시계각에서의 수차계수를 비례관계를 이용해서 구할 수 있다. 따라서 통상적으로 최대 입사고와 최대 시계각에서의 수차계수를 계산에 의해 구해주게 된다.

자이델수차를 계산에 의해서 구하려면 먼저 가우스 광선추적을 통해 각면에서의 입사고와 각 매질내에서 광선과 광축이 이루는 각도를 구해야 된다. 이러한 광선과 연관된 데이터를 바탕으로 하여 한 파장에 대한 표준광선과 임의의 광선 사이의 광로정차를 표시하는 구면수차(S_{I}), 코마(S_{II}), 비점수차(S_{III}), 상면만곡(S_{IV}), 왜곡수차(S_{V})의 5개항과 서로 다른 두파장 사이의 굴절률의 차이 때문에 발생하는 종색수차(C_L), 횡색수차(C_T)의 2개항을 합쳐서 도합 7개의 수차항을 계산해주게 된다. 이러한 자이델수차들은 다음과 같은 식에 의해서 계산된다.

구면수차 : $S_{I}=\sum A^2h\Delta(\frac{u}{n})$ (13-1)

코　　마 : $S_{II}=\sum ABh\Delta(\frac{u}{n})$ (13-2)

비점수차 : $S_{III}=\sum AB^2h\Delta(\frac{u}{n})$ (13-3)

상면만곡 : $S_{IV}=\sum H^2\underline{P}$ (13-4)

왜곡수차 : $S_{V}=\sum(\frac{B}{A})\{H^2\underline{P}+B^2h\Delta(\frac{u}{n})\}$ (13-5)

종색수차 : $C_L\sum Ah\Delta(\frac{\delta n}{n})$ (13-6)

횡색수차 : $C_T\sum Bh\Delta(\frac{\delta n}{n})$ (13-7)

이때, "$\sum$" 기호는 각 수차항의 각 면에서의 기여분을 독립적으로 계산하여 모든 광학면에서의 기여분들을 더해준다는 것을 의미한다. 한편, A와 B는 각 광선이 광학면에서 굴절을 일으킬 때 만족시키는 스넬의 법칙으로부터 유도되는 양이다. 즉, 광축상에 있는 물점(物点)에서 나온 빛이 어떤면에서의 입사각과 굴절각과 각각 i와 i'이고, 굴절 전후(前後)의 매질에서의 굴절률이 각각 n과 n′이라면 스넬의 법칙은

$$n \cdot \sin i = n' \sin i' \qquad (13-8)$$

으로 나타내어진다. i와 i'이 충분히 작다고 할 때, (13－8)식의 1차근사는

$$n \cdot i = n' \cdot i' \qquad (13-9)$$

이 된다. 이때 이 양을 A로 정의한다. 즉,

$$A \equiv n \cdot i = n' \cdot i' \qquad (13-10)$$

이다. 이때 이 입사각 i는 (11－5)식에서 $i=\alpha-u$이므로, $\alpha=h/r$에서

$$A=n(\frac{h}{r}-u)=n(ch-u) \qquad (13-11)$$

이 된다. 마찬가지 방법으로 i′으로부터 A의 값을 구해보면,

$$A=n'(\frac{h}{r}-u')=n'(ch-u') \qquad (13-12)$$

이 된다. 가우스 광선추적이 제대로 수행되었는가를 확인하려면 (13－11)식에 의해 구해진 A값과 (13－12)식에 의해 구해진 A값이 같은지를 확인하면 된다. h는 각 면에서의 광선의 입사고이므로 가우스 광선추적에서 바로 구해지며, "Δ"기호는 수차계수가 계산되는 면을 기준하여 굴절후의 양에서 굴절전의 양을 빼준다는 것을 의미한다. 즉,

$$\Delta(\frac{u}{n})=\frac{u'}{n'}-\frac{u}{n} \qquad (13-13)$$

의 의미를 갖는다. $\Delta(\frac{u}{n})$ 역시 가우스 광선추적의 결과로부터 쉽게 구할 수 있다.

비축수차(구면수차를 제외한 나머지 4개의 단색수차들은 물체가 광축상에 있지 않을 때만 발생하므로 비축수차(非軸收差)라 한다)를 계산하는 데는 물점에서 나와 조리개의 중심을 자나가는 이른바 주광선(主光線 : principal ray)을 그 기준으로 사용하게 된다. 이러한 주광선이 각 면에서 굴절을 일으킬 때에도 스넬의 법칙을 만족시키게 된다. 이때, B는 이 주광선에 대한 스넬의 법칙으로부터

$$B=n \cdot i_{ref} = n' \cdot i'_{ref} \qquad (13-14)$$

로 정의된다. 이러한 B의 값은 주광선을 광선추적하여 계산할 수도 있으나 통상적으로는 축상의 물점에서 나온 빛에 대하여 광선을 추적한 후, 그 값들로부터 다음과 같은 식을 써서 B의 값을 구해주게 된다.

$$B=\frac{H}{h}(1+AhE) \qquad (13-15)$$

이때, H는 라그랑쥬(Lagrange)의 불변량으로서

$$H=nu\eta \ (=nh\beta) \qquad (13-16)$$

로 주어진다. 이 값은 각 면에서 불변량으로 주어지므로 어느 한 면에서만 구해주면 어느 면에서 그 값이 동일하므로 통상적으로는 맨 처음 면에서만 그 값을 구해주면 된다.

또한, E는 점화식으로 주어지는 값으로 다음의 식에 의해서 구해진다.

$$E' = E + \frac{d}{hh'n} \qquad (13-17)$$

이 E의 값은 조리개가 놓이는 면에서 0의 값을 가지며 다른 면에서의 값은 (13－17)식을 이용하여 구하게 된다.

P는 페쯔발의 합(petzval sum)으로

$$P=\sum(-\frac{1}{r})\ \Delta(\frac{1}{n}) = \sum(-C)\ \Delta(\frac{1}{n}) \qquad (13-18)$$

로 주어진다. 이때 $\Delta(\frac{1}{n})$은

$$\Delta(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n'} - \frac{1}{n} \qquad (13-19)$$

로 주어진다.

색수차를 계산할 때 사용되는 $\Delta(\frac{\delta n}{n})$에서

δ는 수차를 보정해주고자 하는 두 파장에서의 굴절률간의 차이이다. 통상적인 광학계는 C-선과 F-선에 대해서 보정해주게 되는 데, 이때에는

$$\delta n = n_F - nC \qquad (13-20)$$

가 된다. 또 굴절률 n은 주파장(主波長)에 대한 굴절률로, 통상적으로는 d-선이 상요되므로

$$n = nd \qquad (13-21)$$

를 의미하게 된다. 하지만 사람의 눈으로 관찰하게 되는 망원경이나 현미경 등에서는 사람눈의 감도를 감안하여 d-선 대신에 e-선이 주파장으로 사용되며, 이때에는 F-선과 C-선 대신에 F′-선과 C′-선에서 색수차를 보정해주게된다. 즉, 이때의 δn과 n은 각각

$$\delta n = n_{F'} - n_{C'} \qquad (13-22)$$

$$n = ne \qquad (13-23)$$

이 된다.

이러한 S_{I}, S_{II}, S_{III}, S_{IV}, S_{V}등의 수차계수들은 앞의 장에서 말한 파면수차함수 W와 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$W = \frac{1}{8} S_{I} + \frac{1}{2} S_{II}\cos\phi + \frac{1}{2} S_{III} \cos^2 + \frac{1}{4} (S_{IV} + S_{III})$$

$$= \frac{1}{8} S_{I} + \frac{1}{2} S_{II}\cos\phi + \frac{1}{4} (3S_{III} + S_{IV}) \cos^2\phi + \frac{1}{4} (S_{III} + S_{IV})\sin^2\phi \qquad (13-24)$$

※(13-24)식의 유도 방법에 대해 자세한 내용을 알고 싶으신 분은 李相洙박사님이 지으신 "機何光學, 教學研究社刊"에 있는 내용을 참고하시기 바랍니다.※

13.2 자이델수차 계수의 계산예

이제 앞에서 발한 수차계수의 계산방법을 좀 더 잘 이해할 수 있도록 하기 위하여 그림 13-1과 같은 렌즈에 대하여 가우스 광선추적

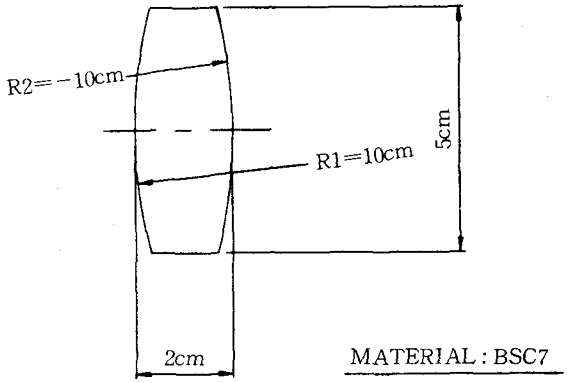


그림 13-1 가우스 광선 추적및 자이델수차 계수 계산예에 사용된 렌즈.

및 자이델수차 계수의 계산예를 보이도록 하겠다.

렌즈로서는 그 형태가 가장 간단한 양볼록의 대칭적인 단렌즈를 택하였고, 재질로서는 가장 대표적인 광학유리인 BSC7(BK7과 동등한 재질이며, 일본 호야사의 분류명칭이다)을 택하였다. 반시계각은 5도로 하였으며, 조리개는 별도로 설치하지 않았으므로 렌즈의 첫번째면이 조리개의 역할을 하게 된다. 이 반시계각은 계산시 라디안값으로 환산되어 계산된다.

이 렌즈계에 대한 가우스 광선추적 결과는 표13-1과 같으며, 이에 따라 계산한 자이델수차계수는 표 13-2와 같다.

13.3 자이델수차의 이용

최근에 이르러 컴퓨터의 사용이 보편화되고, 좋은 렌즈설계 프로그램들이 많이 개발됨에 따라 렌즈설계에서 자이델수차의 비중은 점차 줄어들고 있다. 하지만 자이델수차는 비교적 쉽게 계산할 수 있고, 각 면에서의 기여분을 독립적으로 계산해 낼 수 있다는 장점 때문에 렌즈설계의 초기 단계에서 광학계의 대략적인 형태를 구성하거나 각 면에서의 수차보정의 원리를 이해하기 위한 수단으로서 지금도 많이 사용되고 있다.

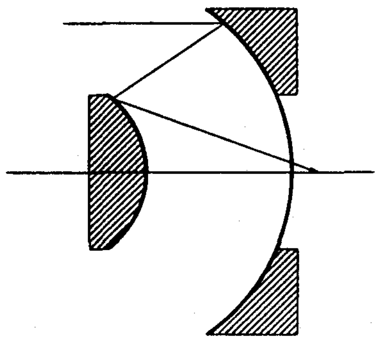
표 13-1. 가우스 광선추적의 계산예.

(단위:cm)

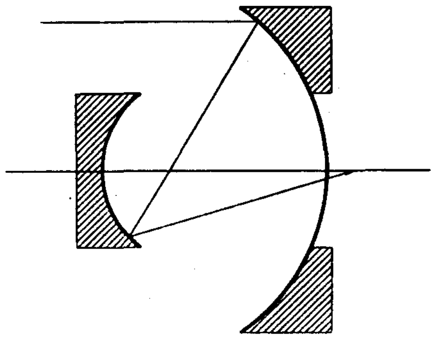
번호 가우스광학량	0	1	2
d	–	2	–
n	1	1.516800	1
c	–	0.1	−0.1
k	–	0.051680	0.051680
u_{-1}	–	0	0.085179
h	2.5	2.5	2.329641
$n_{-1} \cdot u_{-1}$	–	0	0.129200
kh	–	0.129200	0.120396
nu	–	0.129200	0.249596
u	–	0.085179	0.249596
ch	–	0.25	−0.232964
$ch-u_{-1}$	–	0.25	−0.318143
ch−u	–	0.164821	−0.482560
$A=n_{-1}(ch-u_{-1})$	–	0.25	−0.482559
$A'=n(ch-u)$	–	0.25	−0.482559

표 13-2. 자이델수차 계수의 계산예.

번호 가우스광학량	1	2
A	0.25	−0.482559
E	0	0.226398
H	0.218166	0.218166
h	2.5	2.329641
B	0.087266	0.069813
$\Delta(u/n)$	0.056157	0.193439
p	0.034072	0.034072
δn	0.008050	0
$\Delta(\delta n/n)$	0.005307	−0.005307
SⅠ	0.008775	0.104938
SⅡ	0.003063	−0.015182
SⅢ	0.001069	0.002196
SⅣ	0.001622	0.001622
SⅤ	0.000939	−0.000552
C_L	0.003317	0.005966
C_T	0.001158	−0.000863



(a) Cassegrain system



(b) Gregory system

그림 13-2 대표적인 2-구면경계.

자이델수차가 갖는 또 하나의 장점은 비교적 간단한 광학계를 해석적으로 분석하고자 할 때, 그 수학적 표현이 비교적 단순하여 매우 유용하다는 것이다.

이러한 해석적 분석의 예로서 2개의 구면경으로 이루워진 광학계에서 구면수차가 보정되는지 여부를 살펴보도록 하자. 2-구면경계(球面鏡系)로서 통상적으로 많이 쓰이는 것으로는 그림 13-2와 같이 카세그레인계

(Cassegrain system) 와 그레고리계 (Gregorian system)가 있다.

이러한 2-구면경계의 자이델 구면수차계수 S_I을 해석적으로 나타내보면,

$$S_I = A_1^2\ h_1\ \Delta\left(\frac{u_1}{n_1}\right) + A_2^2\ h_2 \Delta\left(\frac{u_2}{n_2}\right)$$
$$= \{n_1\ (C_1\ h_1 - u_1)\}^2 \cdot h_1 \cdot \left(\frac{u_1}{n_1} - \frac{u_0}{n_0}\right)$$
$$\{n_2\ (c_2 h_2 - u_2)\}^2 \cdot h_2 \cdot \left(\frac{u_2}{n_2} - \frac{u_1}{n_1}\right) \qquad (13-25)$$

이 된다. 한편, 반사경계에서 각 면의 곡률이나 면과 면사이의 거리 등을 결정해주기 위해서는 (13-25)식과 같이 곡률이나 면과 면 사이의 거리 등으로 나타내 준 식보다는 광선의 입사고나 각도를 가지고 광학계의 구성을 완료한 후 이러한 값들로부터 곡률이나 면과 면 사이의 거리를 구해내는 것이 편리하다. 따라서 이들간의 변화식을 써보면,

$$C = \frac{nu - n_{-1}u_{-1}}{(n - n_{-1})h} \qquad (13-26)$$

$$d = \frac{h - h_{+1}}{u} \qquad (13-27)$$

이 되므로, 이 식들은 (13-25)식에 대입해주고, $n_0=1$, $n_1=-1$, $n_2=1$ 을 대입해주면,

$$S_I = -\frac{h_1}{4}(u_1-u_0)^2\ (u_1+u_0) + \frac{h_2}{4}(u_2-u_1)^2\ (u_2+u_1) \qquad (13-28)$$

이 된다. 이때, 무한거리에 있는 물체에 대해서는 $u_0=0$이므로,

$$S_I = -\frac{h_1}{4}u_1^3\ \frac{h_2}{4}(u_2-u_1)^2\ (u_2+u_1) \qquad (13-29)$$

이 된다.

이제 이러한 광학계중 구면수차가 보정될 가능성이 있는 광학계에 대해서 알아보자. 구면수차가 0이 되는 광학계가 존재하는지를 알아보기 위해서 $\frac{h_1}{4}$으로 양변을 나누고, 이것을 S_I'으로 놓으면,

$$S_I' = \frac{4S_I}{4} = -u_1^3 + \frac{h_2}{h_1}\ (u_2-u_1)^2\ (u_2+u_1) \qquad (13-30)$$

$$h_1 > 0 \qquad (13-31)$$

가 된다.

13.3.1 카세그레인계

카세그레인계에서는

$$0 < \left(\frac{h_2}{h_1}\right) < 1, \qquad (13-32)$$
$$u_1 < 0 \qquad (13-33)$$

가 성립하므로,

$$-u_1^3 > 0, \qquad (13-34)$$
$$\frac{h_2}{h_1}(u_2-u_1)^2 > 0 \qquad (13-35)$$

가 성립한다. 따라서 $u_2+u_1>0$ 이면 $S_I'>0$ 이므로,

<u>(i) $u_2 > -u_1$ 이면 구면수차는 양의 값을 갖는다.</u>

이제, 구간 $0 \leqq u_2 \leqq -u_1$에서 S_I'의 부호를 따져보면, 함수 S_I'은 이 구간에서 연속이며, $u_2=x$에서의 S_I'의 값을 $S_I'(x)$라고 함수 형태로 나타내주면,

$$S_I'(0) = -u_1^3 + \frac{h_2}{h_1}\ u_1^3 > 0, \qquad (13-36)$$
$$S_I'(-u_1) = -u_1^3 > 0 \qquad (13-37)$$

가 되므로, $S_I'(u_2)$를 u_2에 대해서 편미분해주면,

$$\frac{\partial S_I'}{\partial u_2} = \frac{h_2}{h_1}(3u_2 - u_1) \qquad (13-38)$$

이 된다. 이 값이 0이 되는 점은

$$u_2 = -\frac{u_1}{3}\ \text{과} \qquad (13-39)$$
$$u_2 = u_1 \qquad (13-40)$$

일 때이다. 이 두 해(解)를 놓고 따져보면, 구간 $0 \leqq u_2 \leqq -u_1$에 속하는 해는 $u_2=-u_1/3$이다. 이제 이 점을 경계로 하여 이 점 부근에서 $\frac{\partial S_I'}{\partial u_2}$의 부호를 따져주면,

구간 $0 \leqq u_2 \leqq -\frac{u_1}{3}$ 에서 $\frac{\partial S_I'}{\partial u_2} \leqq 0$ (13-41)

구간 $-\frac{u_1}{3} < u_2 \leqq -u_1$에서 $\frac{\partial S_I'}{\partial u_2} > 0$ (13-42)

이 된다. 즉, S_I'은 구간 $0 \leqq u_2 \leqq -\frac{u_1}{3}$에서 감소하다가 구간 $-u_1/3 < u_2 \leqq -u_1$ 에서는 증가하는 함수임을 알 수 있다. 또한 $u_2 = -u_1/3$인 점에서

$$S_I'\left(-\frac{u_1}{3}\right) = -u_1^3 + \frac{32}{27}\frac{h_2}{h_1}u_1^3 \quad (13-43)$$

을 최소값으로 갖는다. 따라서

$$-u_1^3\left(1 - \frac{32 h_2}{27 h_1}\right) > 0 \quad (13-44)$$

의 조건이 만족될 조건은,

$$-u_1^3 > 0 \quad (13-45)$$

이 항상 성립하므로(카세그레인계에서 1차거울과 2차거울 사이에서의 광선의 기울기는 항상 음의 값을 가지므로),

$$\frac{h_2}{h_1} < \frac{27}{32} \quad (13-46)$$

이 된다. 즉,

(ii) $0 \leqq u_2 \leqq -u_1$이고, $\frac{h_2}{h_1} < \frac{27}{32}$ 이면, 구면수차는 양의 값을 갖는다.

상점의 적절한 위치와 2차거울에 의해 1차거울이 가려지는 비율을 감안해 보면 실제적인 카세그레인형의 2-구면경계는 항상 양의 구면수차를 갖게되므로 구면만으로는 구면수차의 보정이 불가능함을 알 수 있다. 따라서 실제의 광학계에서는 원추면(conic surface)을 갖는 반사경들이 사용된다.

13.3.2 그레고리계

그레고리계에 대해서 S_I'의 부호를 따져주면, 그레고리계는

$$h_2 < 0, \quad (13-47)$$

$$u_2 + u_1 < 0, \quad (13-48)$$

$$u_1 < 0 \quad (13-49)$$

의 조건을 만족시키므로 모든 경우에

$$S_I > 0 \quad (13-50)$$

이 된다. 따라서 그레고리형 2-구면경계에서의 구면수차 역시 항상 양의 값을 갖게 되고, 실제의 광학계는 원추면을 갖는 반사경들이 사용된다.

자이델수차는 이와 같이 어떠한 광학계의 대략적인 수차특성을 해석적으로 파악하는 데 유용하게 사용될 수 있다. 또한, 반사경으로 이루어진 경우에는 면의 곡률이 크지 않기 때문에 고차의 수차항들이 작아서 자이델 수차에 의한 분석이 아주 잘 들어맞는다는 특징을 가진다.