Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 16, No. 1, June, 1990

부가변수를 이용한 휴가형 대기행렬의 모형화†

이순석* · 이호우*

Modeling of Vacation Queues by Supplementary Variables †

Soon-Seok Lee* and Ho-Woo Lee*

Abstract

A queueing system with compound Poisson arrival and server vacation is analyzed by including supplementary variables. We consider a vacation system in which the server leaves for a vacation as soon as the system empties. When he returns, if no customer is waiting for service, he waits until a group of customers arrive and then begins to serve. We obtain the system size distribution and the waiting time distribution. Additional performance measures will be also considered.

1. 서 론

휴가형 대기행렬(Queueing system with server vacations)이란 고객이 없으면 써어버가 시스템을 떠나서 일정시간이 지난후 다시 시스템으로 복귀하는 대기행렬을 말한다. 이때 써어버가 시스템을 떠나있는 기간을 '휴가(Vacation)'라고 부른다.

휴가형 대기행렬은 일반적으로 두가지 형태로 나누어진다. 첫째 형태는 중복휴가(multiple vacation)로서 휴가에서 돌아왔을때 기다리고 있는 고객이 없으면 다시 휴가를 떠나는 경우이다. 둘째 형태는 단일휴가(single vacation)로서 휴가에서 돌아왔을때 고객이 없으면 기다린 후 고객이 도착했을때 써비스를 시작하는 경우이다. 위와 같은 휴가형 대기행렬에 대한 연구는 그간 많이 진행되어 왔는데 몇몇 예를 든다면 Levy & Yechiali[1], Scholl & Kleinrock[2], Baba[3], Fuhrmann & Cooper[4], Lee[5], Takagi[6] 등을 들수 있다. 응용분야로서는 Computer Network(Fuhrmann & Cooper [7]), 데이타 전송 시스템(Scholl & Kleinrock

* 성균관대학교 산업공학과

† 본 연구는 1989년도 학술진흥재단의 지원으로 수행되었음.

[2]), 생산 및 재고 시스템(Lee[8]) 등을 꼽을수 있다.

휴가형 대기행렬의 대표적인 성질은 분해법칙(Decomposition Property)이라고 할수 있다. 분해법칙이란 휴가형 대기행렬에서의 대기시간은 휴가가 없는 대기행렬의 대기시간과 다른 어떤 확률변수의 합으로 주어짐을 말한다. 중복 휴가인 경우 '다른 어떤 확률변수'는 잔여 휴가기간(Residual Vacation Time)이 된다. Fuhrmann과 Cooper[4]는 이러한 분해법칙이 다양한 형태의 M/G/1 휴가형 대기행렬에 존재함을 증명하였다.

Baba[3]는 이러한 법칙이 집단 도착(Compound Poisson Arrival)인 경우에도 성립함을 보였다. Baba는 중복형 대기행렬을 다루었는데 본 연구에서는 단일형 대기행렬에서도 수정된 형태의 분해법칙이 성립됨을 보임으로써 비로소 완전한 형태의 집단도착 휴가형 대기행렬의 성질이 규명되는 결과가 된다.

단일형 대기행렬은 실제적으로 많은 상황에서 일어나고 있다. 예를 들어서 제품을 생산하는 기계를 생각해 보자. 기다리고 있는 재료가 없으면 기계를 유지보수 하기 위한 작업을 진행하기로 한다. 이때 유지보수 시간이 바로 단일 휴가가 된다. 이와 같은 상황은 생산 및 재고가 합쳐진 상황에서도 자주 발생하게 된다.

휴가형 대기행렬의 분석방법으로는 Imbedded Markov Chain 및 부가변수법(Supplementary variable technique)을 들수 있는데 집단도착의 경우 부가변수법이 좀더 유용한 방법이라 할수 있다. Imbedded Markov Chain을 이용하는 경우 Departure Point Analysis가 $M^x/G/1$ 대기행렬에서는 통용되지가 않는다는 것은 널리 알려진 사실이다[9]. 한 예로서 어떤 고객이 시스템을 떠나는 시점에 한 집단내에서 시스템이 비게 되는 경우를 보는 고객은 그 집단의 마지막 고객 뿐이다. 따라서 departure point에서 고객이 없을 확률은 임의의 시점에서 고객이 없을 확률과 달라지게 되며, 이때 감소 비율은 도착 집단의 평균 크기가 된다. 같은 이유로서 Imbedded Markov Chain 방법은 휴가형 집단도착 대기행렬의 분석에는 부적절하며, 본 연구에서는 부가변수법을 사용하기로 한다.

부가변수법은 전술한 Imbedded Markov Chain에서 사용하는 Imbedded Point를 고려하지 않으며, 직접적으로 임의의 시점에서 고객수나 대기시간의 분포를 제공해준다. 부가변수법의 장점은 M/G/1 같은 Non-Markovian 시스템을 부가변수를 추가함으로써 Markovian화 할수 있다는 것이다. 부가변수로서는 M/G/1의 경우 경과 서비스 시간(elapsed service time)이나 잔여 서비스 시간(remaining service time)이 된다.

휴가형 대기행렬의 경우 경과 휴가기간이나 잔여 휴가기간이 추가된다. 이때 경과시간을 쓸 것인가 잔여시간을 쓸 것인가는 무엇에 관심이 있느냐에 달려있다고 할수 있다. 본 연구자의 경험으로는 고객수의 분포를 구하기 위하여서는 경과시간을 사용하는 것이 좋고, 대기시간의 분포를 구하기 위하여서는 잔여시간을 사용하는 것이 좋다. 그렇지만 모형화의 실현성을 항상 고려하여야 한다. 어떤 경우에는 한가지만을 사용하여야만 쉽게 모형화를 할수 있게 되기 때문이다. 본 연구에서는 경과 서비스 시간 및 경과 휴가시간을 부가변수로서 사용한다.

2장에서는 부가변수를 이용하여 시스템 방정식을 유도하고, 3장에서는 해를 도출하며, 4장에서는 기타 Performance measure들을 구한다.

2. 시스템 방정식

본 장에서는 부가변수를 이용하여 시스템 방

정식을 유도한다. 이러한 목적하에 다음의 기호들을 정의하기로 한다.

2-1. 기호의 정의

λ : 집단 도착율

X : 도착 집단의 크기(확률변수)

$g_i = Pr[X=i]$

G(z) : X의 확률 모함수(Probability Generating Function; PGF)

S : 서비스 시간(확률변수)

V : 휴가기간(확률변수)

s(x), S(x) : S의 확률밀도 함수 및 누적분포 함수

v(x), V(x) : V의 확률밀도 함수 및 누적분포 함수

$S^*(\theta)$: S의 Laplace-Stieltjes 변환(LST)

$V^*(\theta)$: V의 Laplace-Stieltjes 변환

N(t) : 시간 t에서의 고객수(서비스 받고 있는 고객 포함)

S^0 : 서비스 받고 있는 고객의 경과 서비스 시간

V^0 : 써어버가 휴가중인 경우 경과 휴가기간

Y= { 0 써어버가 휴가중일 경우
　　 1 써어버가 시스템 안에 있는 경우
　　 (시스템 안에서 idle한 경우도 포함)

2-2. 방정식

서비스 시간과 휴가기간이 지수분포가 아니기 때문에 확률과정 $\{N(t), t\geq 0\}$가 Markovian이 아닌 것은 자명하다. 하지만 변형된 확률과정 $\{N(t), Y, X(t); X(t)=S^0 \text{ or } V^0\}$이 Markovian이 되는 것을 쉽게 알수 있다. 따라서 Kolmogorov식에 의해 시스템 방정식을 세울수 있게 된다.

다음의 확률을 정의하기로 하자.

$$P_n(x, t)dx = Pr[N(t)=n, Y=1, x\leq S^0\leq x+dx] \quad n=1, 2, 3, \cdots$$

$$P_0(t) = Pr[N(t)=0, Y=1]$$

$$Q_n(x, t)dx = Pr[N(t)=n, Y=0, x\leq V^0\leq x+dx] \quad n=0, 1, 2, \cdots$$

$\alpha(x)dx = Pr$[진행중인 휴가가 (x, x+dx)내에 끝날 확률]

$\beta(x)dx = Pr$[진행중인 서비스가 (x, x+dx)내에 끝날 확률]

위에서 $\alpha(x)$, $\beta(x)$는 휴가나 서비스의 순간 종료율이기 때문에 다음의 식이 성립됨을 쉽게 알수 있다.

$$v(x)=\alpha(x)\exp[-\int_0^\infty \alpha(u)du] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$s(x)=\beta(x)\exp[-\int_0^\infty \beta(u)du] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

식 (1)과 (2)로부터

$$\alpha(x)=v(x)/[1-V(x)] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$\beta(x)=s(x)/[1-S(x)] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

Markov 성질로부터 다음의 식들을 얻을수 있다.

$$Q_0(x+\Delta t, t+\Delta t)=Q_0(x, t)(1-\lambda\Delta t)(1-\alpha(x)\Delta t)+o(\Delta t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

$$Q_n(x+\Delta t, t+\Delta t)=Q_n(x, t)(1-\lambda\Delta t)(1-\alpha(x)\Delta t)+\sum_{i=1}^{n} Q_{n-i}(x, t)\lambda g_i\Delta t+o(\Delta t) \quad n=1, 2, \cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

$$P_0(t+\Delta t)=P_0(t)(1-\lambda\Delta t)+\int_0^\infty Q_0(x, t)\alpha(x)\Delta t(1-\lambda\Delta t)dx+o(\Delta t) \quad \cdots\cdots\cdots (7)$$

$$P_n(x+\Delta t, t+\Delta t)=\lambda\sum_{i=1}^{n} P_{n-i}(x, t)g_i\Delta t + P_n(x, t)(1-\lambda\Delta t)(1-\beta(x)\Delta t)+o(\Delta t) \quad n=1, 2, \cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

식(5), (6), (7), (8)로부터 다음의 편미분 차등 방정식(Partial differential-difference equation)을 얻을수 있다.

$$(\partial/\partial x)Q_0(x,t)+(\partial/\partial t)Q_0(x,t) = -[\lambda+\alpha(x)]\,Q_0(x,t) \quad \cdots\cdots (9)$$

$$(\partial/\partial x)Q_n(x,t)+(\partial/\partial t)Q_0(x,t) = -[\lambda+\alpha(x)]Q_n(x,t)+\lambda\sum_{i=1}^{n} Q_{n-i}(x,t)g_i \quad \cdots\cdots (10)$$

$$(d/dt)P_0(t)=-\lambda P_0(t)+\int_0^\infty Q_0(x,t)\alpha(x)dx \quad \cdots\cdots (11)$$

$$(\partial/\partial x)P_n(x,t)+(\partial/\partial t)P_n(x,t)= -[\lambda+\beta(x)]P_n(x,t)+\lambda\sum_{i=1}^{n} P_{n-i}(x,t)g_i \quad \cdots\cdots (12)$$

위 식들을 풀기 위하여서는 경계조건들이 필요한데 경과 서비스 시간이나 경과 휴가기간이 0^+인 경우에 시스템 상태의 변화를 설명하기 위한 조건들이라고 할수 있다.

$$P_n(0,t)=\int_0^\infty Q_n(x,t)\alpha(x)dx+\lambda g_n P_0(t)+\int_0^\infty P_{n+1}(x,t)\beta(x)dx \quad n=1,2,\cdots \quad \cdots\cdots (13)$$

$$Q_0(0,t)=\int_0^\infty P_1(x,t)\beta(x)dx \quad \cdots\cdots (14)$$

$$Q_n(0,t)=0 \quad n=1,2,\cdots \quad \cdots\cdots (15)$$

결과적으로 다음과 같은 평형상태 방정식(steady-state system equation) 및 경계조건들을 구할수 있다.

$$(d/dx)Q_0(x)=-[\lambda+\alpha(x)]Q_0(x) \quad \cdots\cdots (16)$$

$$(d/dx)Q_n(x)=-[\lambda+\alpha(x)]Q_n(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n}Q_{n-i}(x)g_i \quad \cdots\cdots (17)$$

$$0=-\lambda P_0+\int_0^\infty Q_0(x)\alpha(x)dx \quad \cdots\cdots (18)$$

$$(d/dx)P_n(x)=-[\lambda+\beta(x)]P_n(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n} P_{n-i}(x)g_i \quad \cdots\cdots (19)$$

$$P_n(0)=\int_0^\infty Q_n(x)\alpha(x)dx+\lambda g_n P_0+\int_0^\infty P_{n+1}(x)\beta(x)dx \quad n=1,2,\cdots \quad \cdots\cdots (20)$$

$$Q_0(0)=\int_0^\infty P_1(x)\beta(x)dx \quad \cdots\cdots (21)$$

$$Q_0(0)=0 \quad n=1,2,\cdots \quad \cdots\cdots (22)$$

3. 고객수의 확률분포

식(16)으로부터

$$Q_0(x)=\exp\left[-\int_0^x [\lambda+\alpha(u)]du\right] \quad \cdots\cdots (23)$$

식(1)과 (2)를 이용하면

$$\text{Exp}\left[-\int_0^x \alpha(u)du\right]=1-V(x)$$

따라서

$$Q_0(x)=K\cdot[1-V(x)]\cdot\exp(-\lambda x) \quad \cdots\cdots (24)$$

경계조건 식(21)로부터

$$Q_0(x)=[1-V(x)]\exp(-\lambda x)\int_0^\infty P_1(x)\beta(x)dx \quad \cdots\cdots (25)$$

식(18)로부터

$$\int_0^\infty P_1(x)\beta(x)dx=\frac{\lambda P_0}{V^*(\lambda)} \quad \cdots\cdots (26)$$

따라서 식(25)는 다음과 같다.

$$Q_0=\frac{\lambda P_0}{V^*(\lambda)}[1-V(x)]\exp(-\lambda x) \quad \cdots\cdots (27)$$

위에서 $V^*(\lambda)=\int_0^\infty \exp(-\lambda t)\,dV(t)$ =휴가기간 동안에 아무도 도착하지 않을 확률이 된다.

평형상태 방정식들을 풀기 위하여 다음의 PGF들을 정의하자.

$$Q(z,x)=\sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x)z^n$$

$$\hat{P}(z,x)=\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)z^n$$

$$P(z, x)=P_0+\hat{P}(z, x)$$

식 (17)로부터

$$(\partial/\partial x)Q(z, x)=[\lambda G(z)-\lambda-\alpha(x)]Q(z, x) \quad \cdots\cdots (28)$$

식 (28)의 일반해는 다음과 같이 주어진다.

$$Q(z, x)=C\cdot[1-V(x)] \exp\{-\lambda x[1-G(z)]\} \quad \cdots\cdots (29)$$

경계조건 (21)과 (22)로부터

$$C=Q(z, 0)=Q_0(0)=\int_0^\infty P_1(x)\beta(x)dx$$

따라서 식 (25)로부터

$$Q(z, x)=\frac{\lambda P_0}{V^*(\lambda)}[1-V(x)] \exp[-\lambda x(1-G(z))] \quad \cdots\cdots (30)$$

결과적으로 써어버가 휴가중인 경우에 존재하는 고객수의 분포는 다음의 PGF를 갖는다.

$$Q(z)=\int_0^\infty Q(z, x)dx = \frac{\lambda P_0}{V^*(\lambda)}\cdot\frac{1-V^*[\lambda-\lambda G(z)]}{\lambda[1-G(z)]} \quad \cdots\cdots (31)$$

식 (19)으로부터

$$(\partial/\partial x)\hat{P}(z, x)=D\cdot[\lambda G(z)-\lambda-\beta(x)]\hat{P}(z, x) \quad \cdots\cdots (32)$$

경계조건 식 (20)과 식 (26), (27), (28)로부터

$$D=\hat{P}(z, 0)=$$

$$\frac{\lambda z P_0[V^*\{\lambda-\lambda G(z)\}-V^*(\lambda)-1]+\lambda z P_0 V^*(\lambda)}{V^*(\lambda)\{z-S^*[\lambda-\lambda G(z)]\}} \quad \cdots\cdots (33)$$

따라서 써어버가 시스템안에 있는 동안 고객수의 분포는 다음의 PGF를 따른다.

$$P(z)=P_0+\int_0^\infty \hat{P}(z, x)dx =P_0+\frac{1-S^*(\lambda-\lambda G(z))}{\lambda[1-G(z)]}\cdot$$

$$\frac{\lambda z P_0[V^*\{\lambda-\lambda G(z)\}-V^*(\lambda)-1]+\lambda z P_0 V^*(\lambda)}{V^*(\lambda)\{z-S^*[\lambda-\lambda G(z)]\}} \quad \cdots\cdots (34)$$

<정리 1>

E_1을 써어버가 시스템 안에 있으면서 유휴상태에 있을 사상이라 하면

$$P(E_1)=\frac{(1-\rho)V^*(\lambda)}{\lambda(1-G(z))},\ \rho=\lambda E(X)E(S)$$

<증　명>

$\hat{P}_D(z)$와 $\hat{P}_N(z)$를 각각 $\hat{P}(z)$의 분모와 분자라 하자.

그러면 $(d^2/d_z^2)\hat{P}_D(z)\mid_{z=1}$

$$= -2\lambda E(X)V^*(\lambda)(1-\rho)$$

$$(d^2/d_z^2)\hat{P}_D(z)\mid_{z=1}$$

$$= -2\rho[\lambda P_0 E(X)V^*(\lambda)+\lambda^2 P_0 E(X)E(V)]$$

식 (34)로부터

$$P(1)=P_0+\hat{P}(1)=P_0+\frac{\rho P_0[V^*(\lambda)+\lambda E(V)]}{(1-\rho)V^*(\lambda)}$$

식 (31)로부터

$$Q(1)=\frac{\lambda P_0 E(V)}{V^*(\lambda)}$$

$P(1)+Q(1)=1$ 로부터

$$P_0= P(E_1)=\frac{(1-\rho)V^*(\lambda)}{V^*(\lambda)+\lambda E(V)} \blacksquare$$

<정리 2>

T_c를 써어버가 휴가를 떠나서 다음 휴가를 떠날때까지의 기간이라고 하자. 그러면

$$E(T_c)=\frac{V^*(\lambda)+\lambda E(V)}{\lambda(1-\rho)}$$

<증　명>

R을 잔여 도착간격(Residual Interarrival Time)이라고 하자. Regenerative Process 이론과 <정리 1>로부터

$$\frac{E(R)}{E(T_c)}V^*(\lambda)=P_0=\frac{(1-\rho)V^*(\lambda)}{V^*(\lambda)+\lambda E(V)}$$

고객의 도착은 compound Poisson 이므로 $E(R)=1/\lambda$

따라서

$$E(T_c)=\frac{V^*(\lambda)+\lambda E(V)}{\lambda(1-\rho)}$$ ■

<정리 3>

E_2을 써어버가 휴가중에 있을 사상이라고 하면

$$P(E_2)=\frac{\lambda(1-\rho)E(V)}{V^*(\lambda)+\lambda E(V)}$$

<증　명>

<정리 2>로부터

$$P(E_2)=\frac{E(V)}{E(T_c)}=\frac{\lambda(1-\rho)E(V)}{V^*(\lambda)+\lambda E(V)}$$

<정리 4>

E_3을 써어버가 유휴상태에 있을 사상이라 하면

$$P(E_3)=1-\rho$$

<증　명>

위 정리들로부터

$$P(E_3)=\frac{E(V)+E(R)}{E(T_c)}\cdot V^*(\lambda)+\frac{E(V)}{E(T_c)}\cdot[1-V^*(\lambda)]=1-\rho$$

<정리 4>로부터 휴가가 있는 대기행렬에서도 써어버가 유휴할 확률은 휴가가 없는 대기행렬과 같다는 것을 알수 있다. 이는 휴가형 대기행렬에서도 *Work-conservation* 이 지속되기 때문이다.

<정리 5>

평균 고객수 및 대기시간을 L 과 W 라 하면

$$L=L(M^X/G/1)+\frac{\lambda E(X)E(V^2)}{2[V^*(\lambda)+\lambda E(V)]}$$

$$W=W(M^X/G/1)+\frac{E(V^2)}{2[V^*(\lambda)+\lambda E(V)]}$$

위에서 $L(M^X/G/1)$과 $W(M^X/G/1)$은 휴가가 없는 $M^X/G/1$ 대기행렬의 평균 고객수와 평균 시스템 대기시간이다.

<증　명>

$L=P'(1)+Q'(1)$으로부터 평균 고객수는 쉽게 구해진다. 평균 대기시간은 Little 의 법칙으로부터 구할수 있다. ■

4. 고객의 대기시간

Baba[3]는 중복휴가인 경우 고객이 써어버의 휴가때부에 추가로 기다리는 시간은 Residual Vacation Time 이라는 것을 보였다. 이것은 Fuhrmann 과 Cooper[4]의 일반적인 분해법칙에 상응하는 것이다. 그렇지만 단일휴가인 경우는 대기시간의 증가가 Residual Vacation Time 만은 아닐 것으로 기대된다. 그 이유는 써어버가 시스템안에 있더라도 유휴상태인 경우가 있기 때문이다.

새로 도착하는 한 고객을 생각하자. 분해법칙에 의하면 써어버가 유휴상태인 경우중 휴가상태에 있을때 Residual Vacation Time 만큼의 추가 대기시간이 발생한다. 따라서 <정리 1>, <정리 2>, <정리 3>으로부터

$$P(E_2\mid E_3)=\frac{\lambda E(V)}{V^*(\lambda)+\lambda E(V)},$$

$$P(E_1\mid E_3)=\frac{V^*(\lambda)}{V^*(\lambda)+\lambda E(V)}$$

따라서 새로 도착하는 고객의 추가 대기시간의 LST 는

$$P(E_2\mid E_3)\cdot\frac{1-V^*(\theta)}{\theta E(V)}+P(E_1\mid E_3)$$가 되므로

고객의 대기시간의 LST, $W_q^*(\theta)$는 다음의 식으로 주어짐을 알수 있다.

$$W_q^*(\theta)=W_q^*(\theta, M^X/G/1)\cdot \left[P(E_2 \mid E_3)\cdot \frac{1-V^*(\theta)}{\theta E(V)}+P(E_1 \mid E_3)\right]$$

$$=\frac{(1-\rho)\theta\{1-G[S^*(\theta)]\}}{E(X)[1-S^*(\theta)]\{\theta-\lambda+\lambda G[S^*(\theta)]\}}\cdot \left[\frac{\lambda E(V)}{V^*(\lambda)+\lambda E(V)}\cdot\frac{1-V^*(\theta)}{\theta E(V)}+\frac{V^*(\lambda)}{V^*(\lambda)+\lambda E(V)}\right]$$

위의 LST로부터 평균 대기시간 W_q를 구하면 <정리 5>의 결과에서 평균 서비스 시간을 뺀것과 같음을 알수 있다.

5. 요 약

단일 휴가, compound Poisson 도착의 M/G/1 대기행렬에서 고객수 분포, 대기시간 분포 및 기타 Performance measure 들을 부가변수법을 이용하여 구했다. 부가변수로는 경과 서비스 시간과 경과 휴가기간을 사용하였다.

Fuhrmann & Cooper[4]의 분해법칙이 성립됨을 보였는데 휴가때문에 발생되는 추가 대기시간은 중복휴가(Baba[3])때의 잔여 휴가기간과는 달리 수정된 형태를 띄게 되는 것이 증명되었다. 수정된 형태를 띄는 주된 원인은 단일휴가인 경우 써어버가 시스템 안에 있더라도 유휴상태인 경우가 있기 때문이다. 따라서 추가 대기시간은 유휴 확률중 써어버가 휴가중이기 때문에 유휴할 비율과 잔여 휴가기간의 곱으로 주어지게 된다. 또한 일반적인 Work-conservation이 있는 여타 대기행렬과 마찬가지로 써어버가 유휴할 확률은 휴가가 없는 경우와 마찬가지로 $(1-\rho)$임을 보였다.

앞으로의 추가 연구사항으로는 본 연구에서 얻어진 결과를 이용하여 생산-재고 시스템의 확률적 성질을 규명하는 것과 일정한 비용 구조하에서 최적 시스템을 지향하는 제어정책의 수립이 될 것이다.

참고문헌

[1] Levy, Y. & Yechiali, Y., "Utilization of Idle Time in an M/G/1 Queueing System," *Mgmt. Sci.*, 22, 202-221, 1975.

[2] Scholl, M. & Kleinrock, L., "On the M/G/1 Queue with Rest Periods and Certain Service-Dependent Queueing Disciplines," *Opns. Res.*, 31, 705-719, 1983.

[3] Baba, Y., "On the $M^X/G/1$ Queue with Vacation Time," *Opns. Res. Letters*, 5(2), 93-98, 1986.

[4] Fuhrmann, S.W. & Cooper, R.B., "Stochastic Decomposition in the M/G/1 Queue with Generalized Vacations," *Opns. Res.*, 33(5), 1117-1129, 1985.

[5] Lee, H.W., "On a Batch Arrival Queue with Different Vacations," to Appear in *Comp. & Opns. Res.*, 1990.

[6] Tagaki, H., "Queueing Analysis of Vacation Models, Part Ⅰ: M/G/1 and Part Ⅱ: M/G/1 with Vacation," *TRL Research Report*, Sep., 1987.

[7] Fuhrman, S.W. & Cooper, R.B., "Application of Idle Time in an M/G/1 Vacation Model to Two Continuum Cyclic Queueing Models—Especially Token-Ring LANs," *AT & T Tech. J.*, 64(5), 1091-1099, 1985.

[8] Lee, Hyo-Seong & Srinivasan, M.M., "The Continuous Review(s, S) Policy for

Production/Inventory Systems with Poisson Demands and Arbitary Processing Times," *Technical Report 87-33,* Dept. of Industrial and Operation Engineering, The University of Michigan, December, 1987.

[9] Chaudhry, M.L. & Templeton, J.G.C., "The Queueing System $M^x/G/1$ and Its Ramifications," *Naval Res. Logist. Quart.,* 26, 667-674, 1979.