Journal of the Korean Institute
of Industrial Engineers
Vol. 16, No. 2, Dec., 1990

수송 네트워크에서 최대 물동량 경로문제의 근사해법

성기석* · 박순달**

A Heuristic Algorithm for Maximum Origin-Destination Flow Path in the Transportation Network

Ki-Seok Sung* · Soon-Dal Park**

Abstract

This paper studies a heuristic method for the Maximum Origin-Destination Flow Path (MODFP) in an acyclic transportation network.

We construct a mathematical formulation for finding the MODFP. Then by applying Benders' partitioning method, we generate two subproblems which should be solved in turn so that they may give an optimal solution. We solve one subproblem by an optimal seeking algorithm and the other by a hueristic method, so that, we finally obtain a good solution.

The computational complexity of calculating the optimal solution of the first subproblem is $0(mn)$ and that of calculating the heuristic solution of the other subproblem is $0(n^2)$.

From the computational experiments, we estimated the performance of the heuristic method as being 99.3% and the computing time relative to optimal algorithm as being 28.76%.

1. 서 론

지하철, 시내버스, 시외 직행버스, 열차 등과 같은 수송수단의 운송노선을 정할 때에는 그 운송노선을 설치함으로써 연결되는 모든 지점들 사이에 발생하는 화물이나 승객의 물동량의 합을 극대화하도록 정해야 한다. 또 새로 건설하는 고속도로나 철도의 건설노선을 결정할 때에도 지역간의 물동량을 최대로 할 수 있도록 노선을 결정해야 한다.

여기서, 유방향 네트워크에서 각 마디상에 대해서 물동량이 주어져 있고, 정해진 두 마디를 잇는 임의의 경로가 있다 하자. 이 때 그 경로상에서 연결

* 강릉대학교 산업공학과
** 서울대학교 산업공학과

가능한 모든 마디상의 물동량의 합을 그 '경로의 물동량'이라 하자. 그리고 정해진 출발마디로부터 도착마디까지의 경로들중 경로의 물동량이 최대인 경로를 최대 물동량 경로라 하고, 그 경로의 물동량을 '최대 물동량'이라 하자.

이 논문에서는 주어진 네트워크가 무환인 경우에 최대 물동량 경로의 근사해를 찾는 해법을 다음과 같이 제시한다.

먼저 2절에서 최대 물동량 경로를 찾는 수리식을 세운다.

그리고 3절에서 그 수리식에서 경로를 나타내는 변수와 마디쌍의 연결을 나타내는 변수를 구분하고 벤더스 분해방법(Benders' Partitioning Method)을 이용하여 두개의 문제로 분리한다. 두 문제중 첫번째 것은 주어진 임의의 경로에 대해서 각 마디쌍의 출발호의 제약식과 도착호의 제약식에 대한 쌍대값을 구하는 문제이다. 두번째 것은 앞의 문제에서 구한 쌍대값들을 이용하여 최대 물동량의 상한을 구하는 문제이다. 분리한 두 문제를 서로 번갈아 풀면서, 최대 물동량의 상한이 어떠한 경로의 물동량과 같아지면 그 때 최적해를 구하게 된다.

4절에서는 변형된 두 문제중 첫번째 문제를 푸는 방법을 제시한다. 첫번째 문제는 $0(mn)$만에 그 최적해를 구할 수 있다.

5절에서는 두번째 문제를 근사적으로 푸는 방법을 제시한다. 두번째 문제는 그 최적해를 구하기가 어려우므로 근사해를 구함으로써 최대 물동량의 상한의 근사값을 구한다. 이 근사값은 $0(n^2)$만에 구할 수 있다.

마지막으로 6절에서 이들 각 계산과정을 모아서 최대 물동량 경로의 근사해를 구하는 해법을 제시하고 7절에서 예제를 풀어본다.

2. 최대 물동량 경로의 수리모형

먼저 다음과 같이 기호를 정의하자.

$G=(V, A)$: 유방향 네트워크

$n=|V|$, $m=|A|$: G상의 마디와 호의 수

$C=\{(u, v)\mid(u, v)\in V\times V,\ u<v\}$: G상에서 연결가능한 마디쌍의 집합

f_{uv}: 마디쌍 $(u, v)\in C$ 사이의 물동량

s, t: G상에서 정해진 출발마디와 도착마디

$P=(V_p, A_p)$: G상의 임의의 경로

V_p, A_p: P상의 모든 마디와 호의 집합

$C_p=\{(u, v)\mid(u, v)\in V_p\times V_p,\ u<v\}$: P상에서 연결가능한 마디쌍의 집합

$F(i)$, $B(i)$: 마디 i의 후행마디와 선행마디의 집합

F, B: $|C|\times|A|$: 마디쌍-출발호 사건행렬과 마디쌍-도착호 사건행렬

E: $|V|\times|A|$: 마디-호 사건행렬

X: $|A|\times 1$: 경로상의 호를 나타내는 변수벡터

Y: $|C|\times 1$: 경로에 의해서 연결되는 마디쌍을 나타내는 변수벡터

W: $1\times|C|$: 마디쌍의 물동량 벡터

α, β : $1\times|C|$: 마디쌍의 출발 쌍대값과 도착 쌍대값으로 이루어진 벡터

그러면 무환 네트워크에서 최대 물동량 경로를 찾는 문제의 수리모형은 다음과 같이 된다.

$$\text{Max } \Sigma_{(u,v)\in C} f_{uv} Y_{uv} \quad \cdots\cdots (1)$$

s.t

$$\left.\begin{array}{l} Y_{uv}\leq\Sigma_{j\in F(u)}X_{uj},\ \forall\ (u, v)\in C \\ Y_{uv}\leq\Sigma_{i\in B(v)}X_{iv},\ \forall\ (u, v)\in C \end{array}\right] \quad \cdots\cdots (2)$$

$$\Sigma_{j\in F(r)} X_{rj}-\Sigma_{i\in B(r)} X_{ir}=\begin{cases} 1, & \text{for } r=s \\ 0, & \forall r\in V,\ r\neq s,t \\ -1, & \text{for } r=t \end{cases} \quad \cdots\cdots (3)$$

$$X_{ij}\in\{0, 1\},\ \forall (i, j)\in A \quad \cdots\cdots (4)$$

$$Y_{uv}\in\{0, 1\},\ \forall (u, v)\in C$$

위의 수리식에서 변수 Y_{uv}는 마디 u와 v가 경로

상에 존재하면 1, 아니면 0의 값을 갖는다. 또 X_{ij}는 호(i, j)가 경로상에 존재하면 1, 아니면 0의 값을 갖는다. 그리고 목적함수식 (1)은 경로상에서 만족되어지는 물동량을 최대화 하자는 것이다. 제약식 (2)는 마디쌍의 두 마디 모두 경로상에 존재할 때에만 그 마디쌍의 물동량을 만족시킬 수 있도록 하는 식이다. 제약식 (3)은 네트워크상에서 정해진 출발마디로부터 도착마디에 이르는 경로를 만들도록 하는 식이다.

3. 문제의 변형

최대 물동량 경로문제의 수리식을 행렬 형태로 간략하게 표현하면 다음과 같다.

$$[P]\qquad \begin{aligned} &\text{Max } WY \\ &\text{s.t } \quad EX=b \\ &\qquad Y-FX\leq 0 \\ &\qquad Y-BX\leq 0 \\ &\qquad X\in\{0,\ 1\},\ Y\geq 0 \end{aligned}$$

위의 식에서 W는 마디쌍의 물동량을 나타내는 행벡터이고, E는 네트워크를 나타내는 마디-호 사건행렬(node-arc incidence matrix)이고, b는 출발마디에 대해서는 1, 도착마디에 대해서는 −1, 나머지 마디에 대해서는 0인 값을 갖는 열벡터이다. 또, F는 각 마디쌍 사이의 연결을 가능하게 하는 출발호들을 나타내는 마디쌍-호 사건행렬(node pair-arc incidence matrix)이고, B는 각 마디쌍의 연결을 가능하게 하는 도착호들을 나타내는 마디쌍-호 사건행렬이다.

한편 EX=b, X∈{0, 1}를 만족하는 임의의 해 X는 출발마디로부터 도착마디에 이르는 경로를 이룬다. 한편, 임의의 해 X에 대해서 $Y\leq FX$, $Y\leq BX$, Y∈{0, 1}를 만족하는 Y는, X가 이루는 경로상에서 연결되는 마디쌍들을 나타낸다. 그런데, FX, BX의 원소들은 0 또는 1의 값을 가지므로 $Y\geq 0$로 놓을 수 있다.

이제 위의 문제[P]를 변형해 보다. 우선 X의 집합 R={X | EX=b, X∈{0, 1}}을 정의하여 다음과 같이 써보자.

$$[P1]\quad \max_{X\in R}\{\text{Max}\{WY \mid Y\leq FX,\ Y\leq BX,\ Y\geq 0\}\}$$

그리고 이 식에서 괄호 안의 최대화 부분만을 따로 떼어서 쌍대문제로 나타내면 다음의 문제 [DLP]와 같다.

$$[DLP]\qquad \begin{aligned} &\text{Min } \alpha FX+\beta BX \\ &\text{s.t. } \alpha^T+\beta^T\geq W^T \\ &\qquad \alpha,\ \beta\geq 0 \end{aligned}$$

여기서 α, β는 각각 마디쌍이 연결되기 위한 출발호의 제약식 $Y\leq FX$과, 도착호의 제약식 $Y\leq BX$에 대응하는 쌍대변수를 나타내는 행 벡터이다. 앞으로 이들 변수 α_{uv}, β_{uv}를 각각 마디쌍 (u, v)의 출발쌍대값, 도착쌍대값이라 부르기로 한다.

한편 괄호안의 문제는 모든 X∈R에 대해서 가능해를 가지므로 쌍대문제인 문제[DLP]는 유한해를 가지고, 또 괄호안의 문제와 문제[DLP]는 서로 쌍대관계이므로 괄호안의 문제의 최대값은 문제[DLP]의 최소값과 같다. 따라서 위의 문제[P1]은 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\max_{X\in R}\{\text{Min}\{(\alpha F+\beta B)X \mid \alpha+\beta\geq W,\ \alpha,\ \beta\geq 0\}\}$$

여기서 H={(α, β) | $\alpha+\beta\geq W$, α, $\beta\geq 0$}라고 두고 (α^i, β^i), i=1,⋯, N를 그것들의 볼록조합으로 H의 모든 요소들을 표현할 수 있는, H의 정점벡터들이라 하자. 그러면 문제[P1]은 다시

$$\max_{X\in R}\ \min_{1\leq i\leq N}\{(\alpha^i F+\beta B^i)X\}$$

단, (α^i, β^i), i=1, ⋯, N는 집합 H={(α, β) | $\alpha+\beta\geq W$, α, $\beta\geq 0$}을 그것들의 볼록조합으로 표현하는 정점벡터들.

와 같이 쓸 수 있다. 따라서 다음의 문제[P2]와 문제[P]는 동등하다.

$$\begin{array}{lll} & \text{Max } Z & \\ & \text{s.t. } Z \leq (\alpha^i F + \beta^i B)X, \ i \in I = \{1, \cdots, N\} & (a) \\ [P2] & EX = b & \\ & X \in \{0, 1\} & \end{array}$$

한편 위의 문제[P2]에서 H의 정점의 수만큼 있는 제약식 (a)의 일부분을 완화한 문제를 다음의 [MP2]와 같이 나타내어 보기로 하자.

$$\begin{array}{lll} & \text{Max } Z & \\ & \text{s.t. } Z \leq (\alpha^i F + \beta^i B)X, \ i \in I_s & \cdots (a)' \\ [MP2] & EX = b & \\ & X \in \{0, 1\} & \end{array}$$

단, I_s는 H의 정점을 가리키는 지수들의 부분집합이다.

이 완화된 문제 [MP2]에서 최적해를 구했을 때, 그 최적해가 [P2]의 제약식을 모두 만족한다면 그 해는 원래의 문제 [P2]의 최적해가 된다. 이 조건은 다음과 같다.

정리 1 : (Z^o, X^o)가 문제[MP2]의 최적해일 때, 문제[DLP]의 최적 목적함수값인 $\text{Min}\{\alpha FX^o + \beta BX \mid \alpha + \beta \geq W, \ \alpha, \ \beta \geq o\}$가 Z^o와 같으면, (Z^o, X^o)가 문제[P2]에서도 최적해이다.

(증명)

문제[MP2]는 문제[P2]에서 일부의 제약식을 제외한 문제이다. 따라서 어떠한 해 (Z^o, X^o)가 [MP2]의 최적해 일 때, 문제[P2]에서 제외되었던 제약식들을 만족하면 이 해 (Z^o, X^o)는 [P2]에서도 최적해이다.

그런데 (α^i, β^i), $i=1, \cdots, N$는 $H=\{(\alpha, \beta) \mid \alpha + \beta \geq W, \ \alpha, \beta \geq 0\}$의 정점벡터들이므로 $\text{Min}\{\alpha FX^o + \beta BX^o \mid \alpha + \beta > W, \ \alpha, \ \beta > 0\} = Z^o$이면, 모든 (α^i, β^i), $i=1, \cdots, N$에 대해서 $Z^o \leq (\alpha^i F + \beta^i B)X^o$가 성립된다.

즉 문제[P2]의 모든 제약식을 만족한다. 따라서 정리가 성립한다. ■

반면에 문제[MP2]의 최적해 (Z^o, X^o)가 주어져 있을때, 문제[DLP]에서 구한 최적해 $(\alpha^o 2, \beta^o)$에 대해서 $Z^o > (\alpha^o F + \beta^o B)X^o$이면 (Z^o, X^o)는 문제[MP2]에서는 최적해이지만 문제[P2]에서는 제약식을 모두 다 만족시키지 못하는 비 가능해이다. 그런데, 이 때 $Z \leq (\alpha^o F + \beta^o B)X$가 바로 (Z^o, X^o)가 만족시키지 못한 제약식중의 하나이므로 이것을 문제[MP2]에 추가하여 새로운 최적해를 구한다. 그리고 문제[DLP]의 최적해를 구하고 위의 최적조건을 검토하는 과정을 반복해 나간다.

* 원 문제를 변형해서 푸는 계산단계

단계 1. 제약식 (1)을 제외하고 [MP2]를 푼다.

단계 2. [MP2]를 풀어서 그것의 최적해 (Z^o, X^o)를 구한다. 만약 [MP2]가 무한해를 가지면 $Z^o = +\text{INF}$로 두고 X^o는 $EX=b$ $X \in (0, 1)$을 만족하는 임의의 해로 둔다.

단계 3. $X = X^o$로 놓고 [DLP]을 푼다.

단계 4. 단계 3에서 구한 [DLP]의 최적 목적함수의 값이 Z^o와 같으면 단계 2에서 구한 (Z^o, X^o)가 [P2]의 최적해가 된다. 만약 같지 않으면 단계 5로 간다.

단계 5. [DLP]의 최적해 (α^o, β^o)에 대해 제약식 $Z \leq (\alpha^o F + \beta^o B)X$을 [MP2]에 추가하고 단계 2로 간다.

4. 쌍대문제의 풀이

앞절에서 원 문제를 변형하여 풀 때, 임의의 해 X^o에 대해서 생성된 문제[DLP]의 최적해를 구하는 방법을 보자.

먼저, 앞의 문제[DLP]를 변수의 요소로써 다시 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{lll} & \text{Min} \sum_{(u, v) \in C} (FX^o)_{uv} \alpha_{uv} + (BX^o)_{uv} \beta_{uv} & \\ [DLP] & \text{s.t.} \quad \alpha_{uv} + \beta_{uv} \geq f_{uv} & \forall (u, v) \in C \\ & \qquad \alpha_{uv}, \ \beta_{uv} \geq 0 & \end{array}$$

위의 식에서 주어진 X^o는 경로를 나타내는데, 그 주어진 경로에 따라서 α_{uv}, β_{uv}의 목적함수 계수인

$(FX^o)_{uv}$, $(BX^o)_{uv}$가 다음과 같이 값을 갖는다.

$$(FX^o)_{uv}=\begin{cases} 1, & \text{만약 마디 } u\text{가 경로 } X^o\text{상에 있으면,} \\ 0, & \text{경로 } X^o\text{상에 없으면,} \end{cases}$$

$$(BX^o)_{uv}=\begin{cases} 1, & \text{만약 마디 } v\text{가 경로 } X^o\text{상에 있으면,} \\ 0, & \text{경로 } X^o\text{상에 없으면,} \end{cases}$$

따라서

i) 마디 u가 경로상에 존재하면 $\alpha_{uv}=0$, $\beta_{uv}=f_{uv}$

ii) 마디 u가 경로상에 존재하지 않으면 $\alpha_{uv}=f_{uv}$, $\beta_{uv}=0$

와 같이 두면 이것은 위의 문제[DLP]의 최적해가 된다.

5. 완화된 문제의 풀이

이 절에서는 주어진 [DLP]의 해 (α^o, β^o)에 대해 제약식 $Z\leq(\alpha^o F+\beta^o B)X$를 추가한 후 문제[MP2]의 최적해를 구하는 과정에 대해서 보자.

$$[\text{MP2}]\qquad \begin{aligned} &\text{Max } Z \\ &\text{s.t. } Z\leq(\alpha^i F+\beta^i B)X,\ i\in I_s \\ &\qquad EX=b \\ &\qquad X\in\{0,\ 1\} \end{aligned}$$

이 문제[MP2]는 완화된 문제이므로 그 최적 목적함수의 값은 최대 물동량의 상한을 나타낸다. 여기서 이 문제를 다음과 같이 바꾸어 써보자.

$$Z=\max_{X\in R}\ \min_{i\in I_s} H^iX$$

단, $R=\{X\mid EX=b,\ X\in\{0,\ 1\}\}$, $H^i=\alpha^iF+\beta^iB$, $\forall\ i\in I_s$

여기서 H^i는 각 마디쌍의 출발쌍대값과 도착쌍대값 α^i, β^i로부터 구해지는 각 호에 대한 값을 나타내는 벡터이다. 이 벡터 H가 나타내는 각호의 값들 중, 임의의 호(i, j)의 값은 그 호를 통과함으로써 마디 i와 연결 가능하게 되는 마디 v와의 마디쌍 (i, v)의 출발쌍대값 α_{iv}들과, 마디 j와 연결 가능하게 되는 마디 u와의 마디쌍 (u, j)의 도착쌍대값 β_{uj}들의 합이다.

한편 문제[MP2]는 네트워크상의 호길이를 나타내는 각각 다른 벡터들 H^1, H^2, H^3,…, H^N에 대한 경로의 총 길이중 최소인 것이 최대인 경로를 구하는 문제임을 보여 준다.

예를 들어 다음 그림 1과 같은 네트워크와 호길이를 나타내는 벡터가 표 1과 같이 주어져 있을 때, 각 벡터들에 대한 경로의 총길이중 최소인 것이 최대인 경로는 s−1−t이;다. 문제[MP2]는 바로 이러한 경로를 찾는 문제이다.

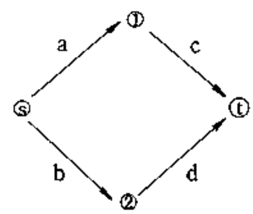


그림 1. 주어진 네트워크

표 1. 호길이 벡터와 경로의 총길이

Path / $H^i=(a,b,c,d)$	s−1−t	s−2−t
$H^1=(3,3,4,2)$	7	5
$H^2=(3,2,3,6)$	6	8
$\bar{H}=(3,2,3,2)$	6	4

여기서, $H^i=(h_1^i,\ h_2^1,\cdots,\ h_m^i)$이라 하고, I의 한 부분집합을 I_s라 하자. 그리고,

$\bar{H}_j=\text{Min}\{h_j\mid i\in I\}$, $\bar{h}_j^s=\text{Min}\{h_j^i\mid i\in I_s\}$,

$\bar{H}=(\bar{h}_1,\ \bar{h}_2,\cdots,\ \bar{h}_m)$,

$\bar{H}^s=(\bar{h}_1^s,\ \bar{h}_2^s,\cdots,\ \bar{h}_m^s)$라고 두면,

$\max_{X\in R}\ \bar{H}X\leq\max_{X\in R}\ \min_{i\in I} H^iX\leq\max_{X\in R}\ \min_{i\in I_s} H^iX$, 이고

$\max_{X\in R}\ \bar{H}X\leq\max_{X\in R}\ \bar{H}^sX\leq\max_{X\in R}\ \min_{i\in I_s} H^iX$, 이다.

이러한 관계를 이용하여 근사해법을 제시하고자 한다. 즉, 문제 [MP2]의 최적해 값을 Z=Max Min H^iX 대신에 그것의 근사치인 Max $\tilde{H}^kX$으로 사용함으로써 최대 물동량의 상한의 근사값을 구하고, 그 근사값이 어떠한 경로의 물동량으로부터 구한 하한보다 작아질 때, 그 하한을 주는 경로를 최대 물동량 경로로 삼는 근사해법을 제시한다.

6. 근사해법

앞 절에서 설명한 바와 같은 특성들을 적용한 근사해법의 계산단계는 다음과 같다.

단계 0 : 임의의 초기 경로 P_0을 구한다.

그 경로의 물동량을 최대 물동량의 하한으로 둔다.

그리고 최대 물동량의 상한은 양의 무한대로 둔다.

단계 1 : 주어진 경로 P에 대해서 각 마디쌍의 출발, 도착 쌍대값을 다음과 같이 구한다.

i) 마디 u가 경로상에 존재하면 마디쌍 (u, v)의 출발 쌍대값을 $\alpha_{uv}=0$, 도착 쌍대값을 β_{uv}라고 둔다.

ii) 마디 u가 경로상에 존재하지 않으면 마디쌍 (u, v)의 출발 쌍대값을 $\alpha_{uv}=f_{uv}$, 도착 쌍대값을 $\beta_{uv}=0$라고 둔다.

iii) 각 호에 대한 쌍대값을 나타내는 벡터를 $H^k=(\tilde{h}_1^k, \tilde{h}_2^2, \cdots, \tilde{h}_m^k)$, 그리고 경로 P(k)의 물동량 $L_{p(k)}$를 구한다.

단계 2 : $\tilde{H}^k$에 대해서 최장경로 P(k)를 구하고 그 길이를 U_k라 둔다. 그리고 경로 P(k)의 물동량 $L_{P(k)}$를 구한다.

단계 3 : 물동량 $L_{p(k)}$가 최대 물동량의 하한보다 크면, 후보 경로 P^*를 P(k)로 수정하고 최대 물동량의 하한은 $L_{p(k)}$로 수정한다. 길이 $U_{p(k)}$가 최대 물동량의 하한보다 작으면 후보 경로 P^*를 문제의 해로 삼고 끝낸다. 아니면 단계 1로 간다.

7. 수치예제

다음의 예를 보자. 주어진 네트워크는 그림 2와 같고, 각 마디쌍에 대한 물동량은 표 2와 같다 하자.

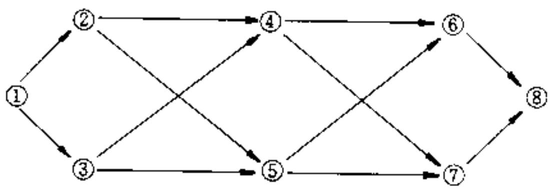


그림 2. 네트워크

표 2. 마디쌍의 물동량 f_{uv}

	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	2	1	3	1	1
2			1	4	1	1	2
3			1	2	2	1	1
4					3	2	1
5					2	1	2
6							2
7							1

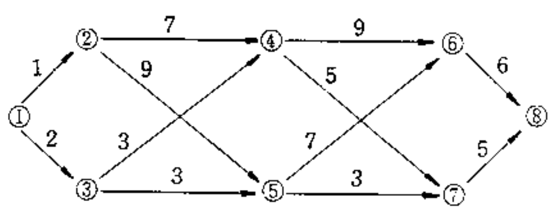
단계 0 : 임의의 초기 경로를 1-3-5-7-8로 두자. 그러면,

K=0, P^*=1-3-5-7-8, L=13, U=+INF

단계 1 : K=1,

$H^1=(1,2,7,9,3,3,9,5,7,3,6,5)$,

$\tilde{H}^1=(1,2,7,9,3,3,9,5,7,3,6,5)$



P(1)=1-2-5-6-8, U_1=23, L_1=19

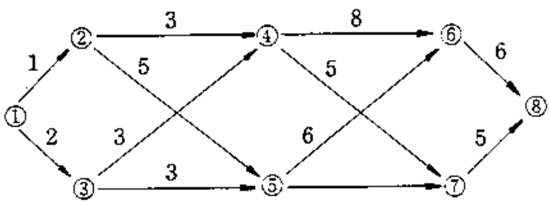
단계 2 : L=19

단계 3 : P^*=P(1). U=23

단계 1 : K=2,

$H^2=(1,2,3,5,7,7,8,5,6,3,7,6)$,

$\tilde{H}^2=(1,2,3,5,3,3,8,5,6,3,6,5)$



P(2)=1−3−4−6−8, U_2=19, L_2=18

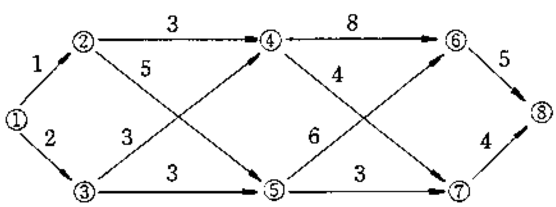
단계 2 : L=19

단계 3 : P^*=P(1), U=19

단계 1 : K=3,

H^3=(1, 2, 3, 5, 3, 3, 8, 4, 9, 5, 5, 4),

$\tilde{H}^3$=(1, 2, 3, 5, 3, 3, 8, 4, 6, 3, 5, 4)



P(3)=1−3−4−6−8, U_3=18, L_3=18

단계 2 : L=19

단계 3 : P^*=P(1), U_3<U, Stop.

따라서 이 근사해법으로 얻어진 경로는 1−2−5−6−8이며, 이 경로의 물동량은 19이다. 이것은 최적해법에서 얻어진 것과 동일하다.

한편 전산실험을 통하여 제시한 근사해법의 해의 정확도와 계산시간을 비교해 보았다. 문제를 풀기 위한 프로그램은 Pascal Language로 작성하였으며, 프로그램의 수행은 Micro−VAX II를 사용하였다. 전산실험에 사용한 문제는 마디의 수, 호의 수 및 마디쌍의 물동량 분포에 따라 총 600개의 문제를 생성하여 사용하였다. 표 3에 실험결과의 일부를 나타내었다.

근사해법의 해의 정확도는 약 99.3%로 나타났고, 계산시간은 최적해법에 비해서 약 28.7%인 것으로 나타났다.

8. 결　　론

이 논문에서는 무환인 수송 네트워크에서 정해진 출발지로부터 도착지에 이르는 경로들 중에서, 경로상에서 연결 가능한 지점들 사이의 물동량의 합이 최대인 경로를 찾는 문제의 근사해법을 연구하였다.

최대 물동량 경로를 찾는 근사해법은 다음과 같다. 우선 네트워크상의 임의의 경로들에 대하여 그 쌍대값들을 이용하여 원문제의 상한의 근사치를 구한다. 쌍대값과 원문제의 상한의 근사치를 구하는 방법들은 벤더스 분해방법에 근거를 두고 있다. 그리고 임의의 경로들 중에 한 경로의 물동량이 원문제의 상한의 근사치 보다 크면, 그 경로를 최대 물동량 경로의 근사해로 삼는다.

한편 전산실험을 통하여 제시한 근사해법의 해의 정확도와 계산시간을 비교해 본 결과 근사해법의 해의 정확도는 약 99.3%이고, 계산시간은 최적해법에 비해서 약 28.7%인 것으로 나타났다.

표 3. 근사해법의 해의 정확도와 계산시간

문제		물동량 값		계산시간	
마디	호	최적해	근사해	최적해법	근사해법
60	384	2594	2590	104.53	8.25
60	326	2170	2155	21.44	6.62
60	219	2576	2576	13.85	5.01
60	134	1039	1039	8.66	5.31
50	335	2593	2593	22.62	3.98
50	249	1896	1896	13.62	4.46
50	186	1420	1399	9.20	3.45
50	117	792	792	5.72	2.94
40	263	1690	1685	19.33	2.47
40	215	2379	2379	7.67	1.88
40	147	1148	1148	5.09	1.55
40	91	928	928	3.36	1.35
30	203	1538	1538	5.38	1.71
30	171	1392	1378	4.61	0.86
30	108	923	923	2.52	0.89
30	72	603	603	1.59	0.60
20	133	1683	1683	2.07	0.33
20	92	932	932	1.35	0.57
20	64	483	483	0.97	0.47
20	38	544	544	0.66	0.20

참고문헌

[1] Christofides, N., A. Mingozzi, P. Toth and C. Sandi, *Combinatorial Optimization*, John Wiley & Sons, 1979.

[2] Dixon, E.T., S.E. Goodman, "An Algorithm for the Longest Cycle Problem," *Networks*, Vol. 6, 1976, 139-149.

[3] Florian, M., S. Nguyen, S. Parllottino, "A Dual Simplex Algorithm for Finding All Shortest Paths," *Networks*, Vol. 11, 1981, 367-378.

[4] Hu, T.C., *Combinatorial Algorithms*, Addison-Wesley, 1982.

[5] Ibaraki, T., *Enumerative Approach to Combinatorial Optimization-Part I, II, Annals of O.R.* Vol. 10, 1987, J.C. Baltzer AG.

[6] Lawler, E.L., "Algorithms, Graphs, and Complexity," *Networks*, Vol. 5, 1975, 89-92.

[7] Lawler, E.L., *Combinatorial Optimization : Networks and Matroids*, Holt, Rinehart & Wfinston, 1976.

[8] Martello, S., Q. Laporte, M. Minoux and C. Ribeiro, *Surveys in Combinatorial Optimization*, North-Holland, 1987.

[9] Minoux, M., *Mathematical Programming-Theory and Algorithms*, John Wiley & Sons, 1986.

[10] Paradimitriou, C.H., K. Steiglitz, *Combinatorial Optimization Algorithms and Complexity*, Prentice-Hall, 1982.

[11] Phillips, D.T., A. Garcia-Diaz, *Fundamentals of Network Analysis*, Prentice-Hall, 1981.