Journal of the KSQC
Vol. 18, No. 2, Nov. 1990

1990년 11월 韓國品質管理學會誌 제18권 제2호

공통납기를 고려한 병렬기계 일정계획
A Parallel Processors Scheduling Problems with a Common Due Date

이 정 환*
노 인 규**

ABSTRACT

This paper considers a scheduling of a set of jobs on single and multiple processors, when all jobs have a common due date and earliness and lateness are penalized at different cost rates. The objective is to determine the optimal value of a common due date and an optimal scheduling to minimize a total penalty function. It is also shown that a schedule having minimum weighted completion time variances must be V-shaped. For identical processors, a polynomial scheduling algorithm with the secondary objectives of minimizing makespan and machine occupancy is developed and a numerical example is presented.

1. 서 론

최근에 1대의 기계에서 n개의 작업이 도중에 중지됨이 없이(nonpreemtion) 공통의 납기(a common due date)내에 가능하면 밀접히 연결된 상태로 모든 작업을 처리 완료하는 일정계획 문제에 많은 관심이 집중되고 있다[1, 2, 5, 6, 7, 8, 9].

특히 작업이 납기전후에 조기완료(earliness) 되거나, 납기지연(lateness)된 경우에 벌과금(penalty cost)을 부과하는 목적함수를 최소화하는 일정계획문제를 다루었는데, Hall(1986)

* 동의대 산업공학과 교수
** 한양대 산업공학과 교수

은 동일한 가중치 즉 동일한 벌과금이 부과되는 상황을 취급하였으며, Prabuddha et al(1990)과 Emmons(1987)등은 조기완료와 납기지연에 따라서 서로 다른 벌과금이 부과되는 경우의 목적식을 고려하였다.

납기전후에 완료된 작업은 다음의 2가지 벌과금 비용요소를 가지게 된다.

첫째, 납기후에 완료된 작업은 주문의 손실이나 고객의 신뢰(goodwill)상실에 대한 기회비용을 발생시키고,

둘째, 납기전에 조기완료된 작업은 보다 더 많은 재고비용을 초래할 수 있다. 만약 제품이 진부성(perishible)이거나 가용생산의 잠재적 손실이 있을 경우에는 작업의 조기완료는 주문취소라는 생산환경의 변화요인으로 과다 재고보유의 위험을 증폭시킬 수도 있다. 그러나 대체로 납기지연의 단위 벌과금비용이 조기완료에서 기인한 단위 벌과금 보다 더 많이 부과된다. 이와같은 상황은 바로 일본의 도요다 자동차 생산시스템인 적시적정 생산체제(JIT) 개념에 부합된다[2, 7, 8, 9].

그리고 Kanet(1981)는 공통의 납기와 순서계획을 다룬 MAL(Mean Absolute Lateness)의 단일 기계문제를 평균작업 흐름시간의 복수 기계문제와 같다는 것을 최초로 제시했으며, 그 후에 Bagchi(1986)(1987)는 계속해서 이를 수리적으로 입증하였다. 한편 Hall(1986)도 단일기계와 복수기계에서의 완료시간 편차의 최소화 문제를 다루었으며, Emmons(1987)도 공통납기를 가진 복수기계의 경우를 다루었으나, 두 논문에서는 모두 공통의 납기에 대한 완벽한 내용설명이 거의 미비한 실정이다.

따라서 본 연구에서는 작업이 공통의 납기를 갖는 경우에 조기완료 또는 납기지연이 일어날 때 서로 다른 벌과금이 부과되는 상황 아래에서 총벌과금의 합을 최소로 하는 단일기계 및 동일의 능력을 갖는 병렬기계(parallel processor)에서의 일정계획문제를 다룬다.

제2장에서는 모델전개를 위한 부호설명과 WMAD 문제를 모형화하였으며, 그에 따른 정리를 전개하였고, 제3장에서는 공통납기를 가진 단일기계 일정계획문제가 평균작업처리시간의 기계문제와 동일함을 증명하였다. 제4장에서는 복수기계에서 같은 가중치와 다른 가중치에 따른 모델과 알고리듬을 수치예제와 함께 제시하였으며, 마지막으로 제5장에서는 결론을 유도했다.

2. 부호설명과 모델설정

2.1 부호설명

본 연구에서 모델전개를 위한 부호는 다음과 같이 정의한다.

- $N = \{1, 2, \cdots\cdots, n\}$: n개의 독립된 작업의 집합
- π : 집합 N에서 n개 작업의 $n!$ 순서 집합
- S : π에서 임의의 순서
- P_j : 작업 j의 가공처리시간(processing time), $j \in N$
- R_j : 작업 j의 출발시간(starting time)
- C_j : 작업 j의 가공완료시간(completion time), $j \in N$
- d : 공통납기
- $B = \{j | C_j \leq d\}$: 조기완료된(early completed) 작업의 집합
- $A = \{j | C_j > d\}$: 지연된 작업(tardy jobs)의 집합

$n_1 = |B|$
$n_2 = |A|$
단 $|B|$, $|A|$는 집합 B, A의 갯수 (cardinalty)를 나타냄
$[j]$: 집합 B에서의 j번째 집합
(j) : 집합 A에서의 j번째 집합
W_j : 작업 j에 관련된 가중치, $j \in N$
$MS = \sum_{j \in N} P_j$

본 연구는 다음의 목적식을 최소화하는 일정계획 S를 구하는 것이다.

$$Z(S) = \frac{\sum_{j \in N} W_j |C_j - d|}{\sum_{j \in N} W_j} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

식(1)에서 알 수 있는 사실은 작업은 초기에 약간의 휴지시간(idletime)을 가질 수 있으며, 가능한 한 납기(due date)근처에서 작업군을 형성하게 된다. 그리고 d는 d 이전에 작업을 일정하는데 있어서 충분한 자유(freedom)를 줄 수 있도록 큰 값을 가진다. 즉 $d \geq MS$이다. 식(1)에서 W_j가 1인 경우에는 $Z(S)$는 $(1/n) \sum_{j \in N} |C_i - d|$로서 Bagchi et al(1986)이 정의한 MAD (Mean Absolute Deviation) 문제가 된다.

2.2 WMAD문제

WMAD(Weighted Mean Absolute Deviation)문제는 $NP-$complete문제이지만, 다음과 같은 3가지 경우로 나누면 최적일정계획은 다항적 시간(polynomial time)으로 구할 수 있다 [9].

(1) 모든 작업에 대한 모든 가중치가 동일하다.

$$W_j = k(\text{constant}),\ j \in N$$

(2) 조기완료와 납기지연된 작업이 서로 다른 가중치를 가진다.

$$W_j = W_b,\ j \in B$$
$$W_j = W_a,\ j \in A$$

(3) 모든 작업에 대한 가중치가 서로 다르나, 작업처리시간에 대한 비는 동일하다.

$$(P_1/W_1) = (P_2/W_2) = \cdots\cdots\cdots = (P_n/W_n)$$

3가지 경우를 설명하면 다음과 같다.

예 1. $W_j = k(\text{constant}),\ j \in N$
이 경우에 식(1)의 목적식은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$Z(S) = \sum_{j \in B} k(J-1) P_{[j]} + \sum_{j \in A} k \cdot J \cdot P_{(j)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

식(2)의 일정계획문제의 목적식은 2개의 똑같은 수를 서로곱(pairwise product)하여 합으로 정식화할 수 있다. 하나의 집합은 작업매개변수(즉 가공처리시간)과 다른 하나는 작업특성과는 독립적인 위치가중치(positional weight)의 집합이므로 해답은 쉽게 구할 수 있다. 즉 함수의 최소값은 가장 큰 가공처리시간과 가장 적은 위치가중치를 서로 짝지우며(matching), 그 다음 두번째로 큰 가공처리시간과 두번째로 적은 위치 가중치를 서로 짝짓기해서 얻을 수 있다. 목적식은 이와같은 곱의합(product-sum)형태이며, 그 해는 최대－최소 짝짓기(largest-to-smallest matching)방식의 해답을 가진다.

만약 작업이 가공시간의 비증가순서(non-increasing)로 $(P_1 \geq P_2 \geq \cdots\cdots \geq P_n)$과 같이 나열된다면 작업 1은 첫번째(가중치=0)로 일정계획되어야하며, 작업 2와 3은 두번째와 마지막 번째로 서로 순서에 관계없이 일정계획된다. 가중

치가 같은 쌍이 많을 때에는 $2^{[n/2]}$개의 대체적인 최적 일정계획을 가진다[6].

예 2. $W_j = W_b$, $j \in B$ and $W_j = W_a$, $j \in A$

이 경우에는 작업이 조기완료되는 집합 B에 대해서는 동일한 가중치 W_b와 납기지연이 된 작업집합 A에 대해서도 동일한 가중치 W_a를 서로 다르게 가지기 때문에 식(1)의 목적식은 다음과 같이 된다.

$$Z(S) = \sum_{j \in B} W_b (J-1) P_{[j]} + \sum_{j \in A} W_a \cdot J \cdot P_{(j)} \quad \cdots\cdots (3)$$

식(3)은 Panwalker et al(1982)이 다룬 최소 가중편차(Minimal weighted deviation)문제와 동일하게 된다.

예를들어 만약 $W_b = 1$, $W_a = 3$이라고 하면 10개의 작업에 대한 위치가중치는 (0, 1, 2, 3, 4 ; 15, 12, 9, 6, 3)로 계산된다. 그러므로 가장 큰 3개의 작업은 LPT(Largest Processing Time)순서로 처음에 처리되며, 작업 4와 5는 4번째와 마지막에 처리될 수 있다.

예 3. $(P_1/W_1) = (P_2/W_2) = \cdots\cdots = (P_n/W_n)$

이 경우는 모든 작업의 가중치가 서로 다르지만, 작업처리시간에 대한 비는 동일하다. 이 경우의 최적해는 식(1)에서 정해진 어떤 위치 r까지는 LPT 순서로 작업을 일정계획하고 나머지 $(n-r)$개의 작업은 SPT(Shortest Processing Time)순서로 일정을 계획하면 된다. 예(3)이 최적해를 갖는다는 것은 Prabuddha De et al (1990)등에 의하여 증명되었다.

2.3 모델에 대한 기본적인 정리

공통납기를 고려한 복수기계의 일정계획에 대한 해법의 개발을 위한 일정계획의 기본적인 성질에 대하여 요약하면 다음과 같다.

정리 1($P1$) 최적일정계획에서 B내에서의 작업은 LPT순으로 나열되며, $R_j \geq d$인 작업은 SPT 순서로 나열된다. 이와같은 결과에 따른 일정계획은 V자 모양의 최적일정계획을 형성한다[7].

정리 2($P2$) $d \leq P_1$이면 SPT 순서가 최적이다. 만약 $W_b < W_a$이면 $d \leq (P_1 + P_2)/2$에 있어서 SPT 순서가 최적이다[1].

정리 3($P3$) 작업의 최적 순서집합에서 이들 중 한 작업의 완료시간이 납기 d와 일치하는 최적일정계획이 존재한다[8].

정리 4($P4$) 만약 B에 속한 작업이 WLPT (Weighted Largest Processing Time) 순서로 나열되고,

$$P_{[1]}/W_{[1]} \geq P_{[2]}/W_{[2]} \geq \cdots\cdots \geq P_{[n1]}/W_{[n1]} \quad \cdots\cdots (4)$$

A에 속하는 작업은 WSPT(Weighted Shortest Processing Time)순서로 나열된다면

$$P_{(n_2)}/W_{(n_2)} \leq P_{(n_2-1)}/W_{(n_2-1)} \leq \cdots \leq P_{(1)}/W_{(1)} \quad \cdots\cdots (5)$$

이 된다.

이런 일정계획은 가중치가 부여된 단일기계의 공통납기와 일정계획 문제에 있어서 V자 모양의 최적일정계획을 형성한다.

(증명) 어떤 일정계획 S가 가중된 V자 모양을 형성하지 않는다고 가정하면 다음과 같은 위치 j와 $j+1$에서의 작업쌍이 존재하게 된다.

(1) $(P_j/W_j) < (P_{j+1}/W_{j+1})$ $j \in B$

(2) $(P_j/W_j) > (P_{j+1}/W_{j+1})$ $j \in A$

새로운 일정계획 S'는 S에서 작업 j와 $j+1$

이 서로 교환된 순서라고 하자. 그러면 S'목적식의 값이 위의 2가지 경우에 대하여 S의 목적식 값보다 적다는 것만을 보여주면 충분하다.

먼저 예(1)에 있어서,

$$
\begin{aligned}
Z(S)-Z(S') = & (\sum_{k=1}^{j-1} W_k)P_j \\
& +(\sum_{k=1}^{j} W_k)P_{j+1} \\
& -[(\sum_{k=1}^{j-1} W_k)P_{j+1} \\
& +(\sum_{k=1}^{j-1} W_k+W_{j+1})P_j] \\
= & W_jP_{j+1}-W_{j+1}P_j>0
\end{aligned}
$$

예(2)에 대해서도

$$
\begin{aligned}
Z(S)-Z(S') = & (\sum_{k=1}^{n} W_k)P_j \\
& +(\sum_{k=j+1}^{n} W_k)P_{j+1} \\
& -[(\sum_{k=1}^{n} W_k)P_{j+1} \\
& +(W_j+\sum_{k=j+2}^{n} W_k)P_j] \\
= & W_{j+1}P_j-W_jP_{j+1}>0
\end{aligned}
$$

위에서 알 수 있듯이 작업 j와 $j+1$의 상호교환은 목적식 값을 줄인다. 이것은 가중된 V자 모양을 형성하지 않은 어떤 작업순서는 서로 인접한 작업쌍을 상호 교환함으로써 목적식값을 향상시킬 수 있다는 것을 보여준다.

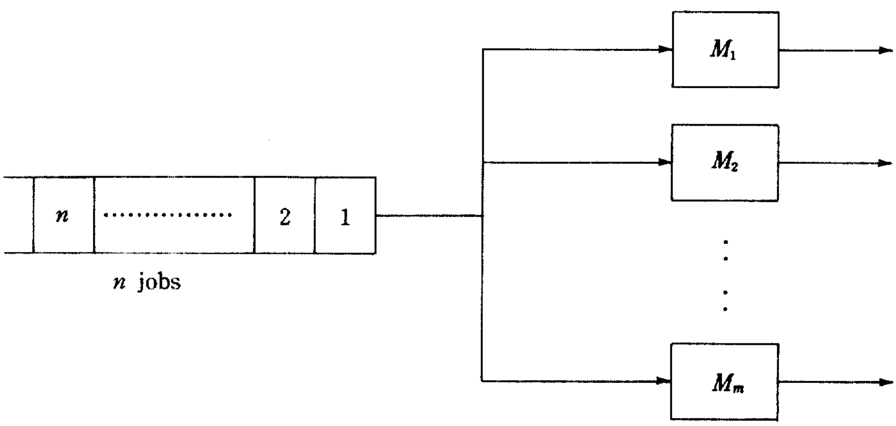
(증명 끝)

3. 공통납기의 MAD문제와 $\bar{F}$의 병렬기계문제

시간 0에서 동시에 이용가능한 n개의 단일 처리작업이 있다고 하자. 이를 가공처리하기 위해서 m대의 동일한 기계를 이용할 수 있는데 작업은 기껏해야 한 기계에서 한번에 가공처리 완료될 수 있다.

이를 병렬기계 일정계획 문제(parallel processers scheduling problem)라고 한다[3, 4].

본절의 내용전개를 위하여 다음과 같은 부호를 사용한다.



<그림 1> 병렬기계 일정계획 문제

$n/m/A/B$
n : 작업의 수
m : 기계의 수
A : 문제의 특별한 특성
B : 수행도 평가

Baker(1974)와 Conway et al(1967)이 다룬 $\bar{F}$(mean flow time)문제의 최적해는 공통납기의 MAL문제의 최적해와는 항상 동일한 것은 아니다[7].

즉 $n/1/d/$MAL은 $(n-1)/2/$병렬$/\bar{F}$과 항상 동일한 최적해를 갖는 것은 아니다. 그러나 식(1)에서 모든 가중치 W_j가 1이 되면 식(1)은 식(6)의 MAD 문제가 된다.

$$Z(S)=\text{MAD}=(1/n)\sum_{j=1}^{n}|C_j-d| \quad \cdots(6)$$

$$\Delta=\begin{cases}P_1+P_3+\cdots\cdots+P_n & \text{if } n \text{ is odd}\\ P_2+P_4+\cdots\cdots+P_n & \text{if } n \text{ is even}\end{cases}$$

$$\theta=P_n+\begin{cases}P_2+P_4+\cdots\cdots+P_{n-1} & \text{if } n \text{ is odd}\\ P_1+P_3+\cdots\cdots+p_{n-1} & \text{if } n \text{ is even}\end{cases}$$

단일기계에서 처리되는 n개의 작업에 대하여 공통납기를 구하는 문제에서, $\Delta<\theta<MS$인 경우에 $Z(S)=$MAD를 최소화하는 스케줄 S를 구하는 문제를 $n/1/d/$MAD라고 표현한다.

F_j를 2대의 기계에서 최적스케줄로 i번째 작업의 흐름시간(flow time)이라고 하면 $n/1/d\geq\theta/$ MAD문제는 항상 $(n-1)$개의 작업을 처리하는 2대의 병렬기계의 평균흐름시간 최소화 문제인 $(n-1)/2/$병렬$/\bar{F}$ 문제와 같다[2].

이를 증명해 보면 $n/1/d\geq\theta/$MAD 문제에서 n이 홀수(odd)일 때 최적해는 S이다.

$$S=(n, n-2, \cdots\cdots, 1)\,(2, 4, \cdots\cdots, n-1)$$

여기서

$$\begin{aligned} n\cdot Z(S)&=\sum_{j=1}^{n}|C_j-d|\\ &=|C_1-d|+|C_2-d|+|C_3-d|\\ &\quad+\cdots\cdots+|C_{n-1}-d|+|C_n-d|\\ &=F_1+F_2+F_3+\cdots\cdots\\ &\quad+F_{n-2}+F_{n-1}\\ &=\sum_{j=1}^{n-1}F_j \end{aligned}$$

n이 짝수인 경우도 동일하다.

수치예제는 Baker(1974)와 Kanet(1981)의 6개 작업을 가진 문제를 고려해 보자.

j	1	2	3	4	5	6
P_j	1	2	3	4	5	6

이 문제가 $6/1/d\geq\theta/$MAD문제이므로 이 문제는 2대의 병렬기계 문제인 $5/2/$병렬$/\bar{F}$문제와 같다.

j	1	2	3	4	5
P_j	1	2	3	4	5

원래의 $6/1/d\geq\theta/$MAD문제에서도 최적해는 $2^{[6/2]}=8$개 존재하며, $5/2/$병렬$\bar{F}$ 문제는 Baker[1974, p. 118]의 해법으로 구하면 4개의 최적해가 존재한다. 그러나 M_1 ; (1, 3, 5), M_2 ; (2, 4)와 M_1 ; (2, 4), M_2 ; (1, 3, 5)는 일정계획상에 차이가 없으므로 병렬기계에서 4개의 해는 MAD에서의 8개의 해와 같음을 알 수 있다.

이를 요약하면 다음 <그림 2>와 같다.

4. 병렬기계 일정계획 문제

최적해 / 문제의 종류			1	2	3	4
5/2/병렬/$\bar{F}$	기계	M_1	(1, 3, 5)	(1, 3, 4)	(1, 2, 5)	(1, 2, 4)
		M_2	(2, 4)	(2, 5)	(3, 4)	(3, 5)
$6/1/d \geq \theta$ =15/MAD			(6, 5, 3, 1) : (2, 4), (6, 4, 2) : (1, 3, 5)	(6, 4, 3, 1) : (2, 5), (6, 5, 2) : (1, 3, 4)	(6, 5, 2, 1) : (3, 4), (6, 4, 3) : (1, 2, 5)	(6, 4, 2, 1) : (3, 5), (6, 5, 3) : (1, 2, 4)

<그림 2> $6/1/d \geq \theta$/MAD문제를 동일한 5/2/병렬/$\bar{F}$ 문제에 의하여 해결된 최적해와 상호연관

4.1 동일한 벌과금(가중치)을 갖는 공통납기의 병렬기계

본절에서는 1대의 기계를 복수의 기계에 연관시켜, 동일한 기계(identical processor)의 집합 $M=\{1, 2, \cdots, i, \cdots m\}$이 이용가능할 때의 평균 벌과금을 최소화하는 MAD문제를 고려해 보자.

동일한 기계는 작업을 병렬(parallel)로 처리한다고 가정한다.

- B_i : 기계 i에서 조기완료된 작업의 집합
- A_i : 작업 i에서 납기지연된 작업의 집합
- n_{1i} : $|B_i|$
- n_{2i} : $|A_i|$
  단, $|B_i|$, $|A_i|$는 집합 B_i, A_i의 갯수를 나타냄
- $[ji]$: 집합 B_i에서의 j번째 집합
- (ji) : 집합 A_i에서의 j번째 집합
- U : P_j의 집합

동일한 능력을 갖는 m대의 병렬기계에서 작업의 조기완료와 납기지연에 따른 벌과금을 최소로하는 목적식을 표현하면 다음과 같다.

$$Z(S)=\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n1i}(J-1)P_{[ji]}+\sum_{j=1}^{n2i}JP_{(ji)}\right] \quad \cdots\cdots (7)$$

동일한 능력을 갖는 m대의 병렬기계에 있어서의 벌과금은 다음과 같이 부과된다. 이 개념은 예(1)의 개념을 m대의 기계로 연장한 개념이다.

$$0, \cdots, 0, 1, \cdots, 1, 2, \cdots, 2, \cdots, [(n-m)/2m]$$

각 벌과금은 단일기계에 있어서의 m배이다. 즉 벌과금 0은 m번이며, 벌과금 1은 $2m$번이고, 벌과금 2도 $2m$번으로 동일한 결합으로 나타난다. 그러므로 m개의 가장 큰 작업은 각 기계 m의 첫번째로 위치하게 하고, 다음 $2m$개의 큰 작업은 두번째와 마지막에 위치하게 된다. 그 다음의 $2m$ 개의 큰 작업은 세번째와 뒤에서 두번째(penultimate)에 위치하게 된다. 만약 마지막 그룹의 작업이 $2m$개 보다 작으면 그것은 다음 $2m$개의 위치에 어떤 부분집합으로 할당된다.

n개의 작업과 m대의 병렬기계로 된 벌과금 문제의 해법절차는 Hall(1986)의 방법으로 최적의 공통납기도 구할 수 있는 것으로 수정보완

한것으로서 다음과 같다.

(알고리듬)

단계 1. 모든 병렬기계에 대해서 일정계획 S_i를 초기화한다.

$$S_i = (A_i, B_i)$$
$$B_i = \phi$$
$$A_i = \phi$$

단계 2. 모든 P_j 중에서 최대의 작업시간을 가진 작업을 k라고 둔다.

$$P_k = \max_{j \in U} \{P_j\}$$

그리고 집합 Q, P를 다음과 같이 정의한다.

$$Q = \{i | i \in M,\ |B_i| = \min_{i \in M} [|B_i|]\}$$
$$R = \{i | i \in M,\ |A_i| = \min_{i \in M} [|A_i|]\}$$

단계 3. (1) 만약 $|B_i| = |A_i|$이면, 작업 k를 집합 $B_i (i \in Q)$의 맨 마지막에 위치시킨다. 이때 i값의 선택은 임의로 한다.

(2) 만약 $|B_i| = |A_i| + 2$이면, 작업 k를 집합 A_i $(i \in R)$의 맨 첫번째에 위치시킨다. 이때 i값의 선택은 임의로 한다.

그렇지 않으면 (즉 (1) (2)의 경우가 아니면), 작업 k를 $B_i (i \in Q)$의 맨 마지막이든가 아니면 $A_i (i \in R)$의 맨 처음에 위치시킨다.

단계 4. 집합 U가 공집합이면 단계 5로 가고, 그렇지 않으면 단계2로 간다.

단계 5. n개의 작업과 m대의 병렬기계에 대하여 최적일정계획 S^*와 최적공동납기 d^*를 구한다.

$$S^* = (S_1, S_2, \cdots\cdots, S_m)$$
$$d^* = C_{[j*i]}$$

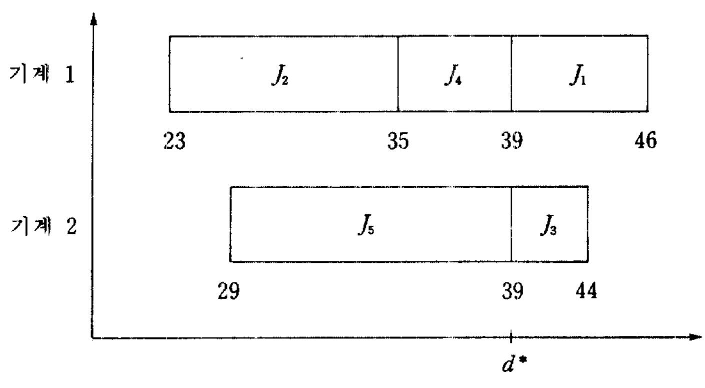
단 j^*는 모든 S_i의 B_i중에서 맨 마지막에 위치한 작업

단계 6. 모든 과정을 끝낸다.

2대 기계인 경우에 대하여 예를 들면 작업할당에 대한 임의의 기계선택은 작은 수의 첨자를 가진 기계로 가공하는 경우로 가정한다.

j	1	2	3	4	5
P_j	7	12	5	4	10

최적해는 다음의 <그림 3>과 같다.



<그림 3> 2대의 병렬기계에 대한 수치예

해의 평균 벌과금은 16/5이며, 최적납기는 39이다.

4.2 공통납기에 따른 조기 또는 지연에 따른 서로 다른 벌과금이 부과되는 병렬기계

본 절은 예(2)를 확대한 경우로 작업이 조기완료되는 경우의 벌과금 W_b를 부담하고, 납기지연이 된 작업에 대하여는 벌과금 $W_a(W_b < W_a)$가 부과되는 동일의 능력을 갖는 m대의 병렬기계(parallel identical processors)문제를 고려해 보자.

이 때의 목적식은 다음과 같다.

$$Z(s) = \sum_{i=1}^{m} [\sum_{j=1}^{n1i} W_b (J-1) P_{[ji]} + \sum_{j=1}^{n2i} W_a J \ P_{(ji)}] \quad \cdots\cdots\cdots(8)$$

이 경우에는 전의 예(1)의 경우와는 달리 $2m$개의 동일한 가중치를 갖지않고, m개의 늦은 위치의 작업은 m개의 빠른 위치의 작업과는 다르게 된다.

LPT순서로 m개의 작업의 연속된 그룹이 각 기계에 임의로 열거되어 할당될 수 있으며, 그 다음 그룹은 다음의 첫번째와 다음의 맨 마지막에 최소의 가중치를 갖는 위치에 의존해서 할당된다. 그러나 이와같은 병렬처리알고리듬은 대체적인 $(m!)$개의 최적해를 발생시킨다. 따라서 이들 중에서 하나를 선택하는데 있어서 다른 의미있는 목적을 달성할 수 있는 하나를 선택한다. 즉 납기 d의 가능한 값을 가지고 최소의 가능한 제한식에 대한 관심을 두어 가능한 한 일찍 적은 량의 작업을 일정계획하는 것이다.

LPT순서로 된 m개의 작업집합 중 i번째를 S_i라 두자.

즉 $S_1 = \{1, 2, \cdots\cdots, m\}$, $S_2 = \{m+1, \cdots\cdots, 2m\}$등으로 분할하면 맨 마지막 집합은 m개 이하로 형성될 것이다. W_b와 W_a가 다르기 때문에 B와 A도 집합 S_i의 다른 집합으로 구성될 것이다. 예를 들어서 $W_b = 1$, $W_a = 3$이라고 하면 $B = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_5 \cup \cdots\cdots$이고, $A = S_4 \cup S_6 \cup \cdots\cdots$등으로 구성된다. B를 구성하는 조기완료된 집합구성 성분을 E_i라고 하고, A를 구성하는 납기지연된 집합구성 성분을 T_i라고 하자.

부수적인 두번째의 목적식(secondary objectives)를 규정하기 위해서 집합 B와 A는 서로 독립적으로 다룬다. 먼저 집합 B는 어떤 기계에 할당된 최대의 총가공시간을 최소화하는 것으로 하며, 집합 A는 작업총처리시간(makespan)을 최소화하는 것이다.

따라서 동일한 능력을 가진 m대의 병렬기계 문제에서 작업조기완료와 납기지연인 경우에 각기 다른 벌과금이 부과되는 벌과금함수를 최소화하여 최적의 일정계획과 납기를 구하는 알고리듬은 다음과 같다.

<주목적식의 알고리듬>

단계 1. 작업집합 N을 m개의 작업으로 구성된 집합 $S_1, S_2, S_3, \cdots$로 나눈다.

단계 2. 식(8)에서 주어진 위치가중치 $W_b(J-1)$와 W_aJ를 최대-최소(largest to smallest)로 짝짓기를 한다.

단계 3. 납기 d 전후의 작업집합 B, A를 다시 각각 E_i와 T_i로 분할한다.

단계 4. 납기를 고려한 가중된 완료시간편차를 최소화하는 주목적식(primal criterion)에 대하여 $m!$개의 최적일정계획이 얻어진다.

<부목적식의 알고리듬>

단계 1. 작업집합 T_i에 대하여 범위(range) R_i가 감소하는 순서로 재 순서계획을 한다. 집

합에서 범위 R_i는 최대가공시간에서 최소가공시간의 차이이다.

단계 2. 최대－최소 짝짓기 방법을 사용하여 이미 할당된 누적가공처리시간의 연속적인 T_i에 있는 작업의 가공시간을 변제(payoff)한다.

단계 3. 납기에 선행되는 각 기계에서의 부하를 최소화하는 부목적인 경우에도 E_i에 대하여 단계 1과 2와 같은 식으로 계속해 나간다.

위의 알고리듬은 $n \le 4m$인 경우에는 최적해가 얻어질 것이고, $n > 4m$인 경우에는 좋은 발견적인해(heuristic)가 얻어진다.

이에 대한 수치예는 다음과 같다.

$m=3$

J	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P_j	20	17	15	14	12	11	10	7	6	4	2	1

$W_b=1,\ \ W_a=3$

$S_1=\{1,2,3\},\ \ S_2=\{4,5,6\},\ \ S_3=\{7,8,9\},$

$S_4=\{10,11,12\}$

$B=S_1 \cup S_2 \cup S_3\ \ A=S_4$

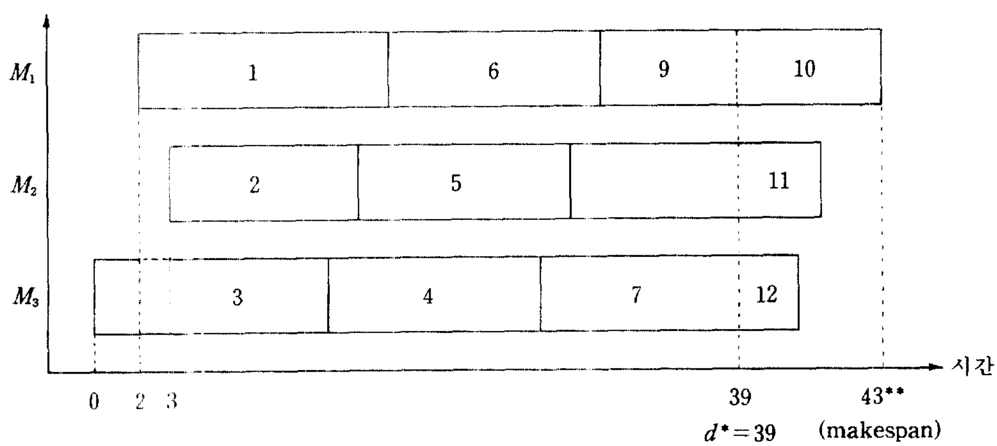
<그림 4>의 간트차트(Gantt-Chart)에서는 최적납기는 39이며, 최적일정계획은 3!(=6)개가 된다. 즉 주목적식의 최적해는 대체적인 6개가 되므로 부목적식으로 이중에서 하나를 구한다.

작업총처리시간을 최소화하고, 부목적식을 만족시키는 최적일정계획은 다음 <그림 5>의 간트차트와 같다. 작업총처리시간이 43에서 40로 줄어들었다.

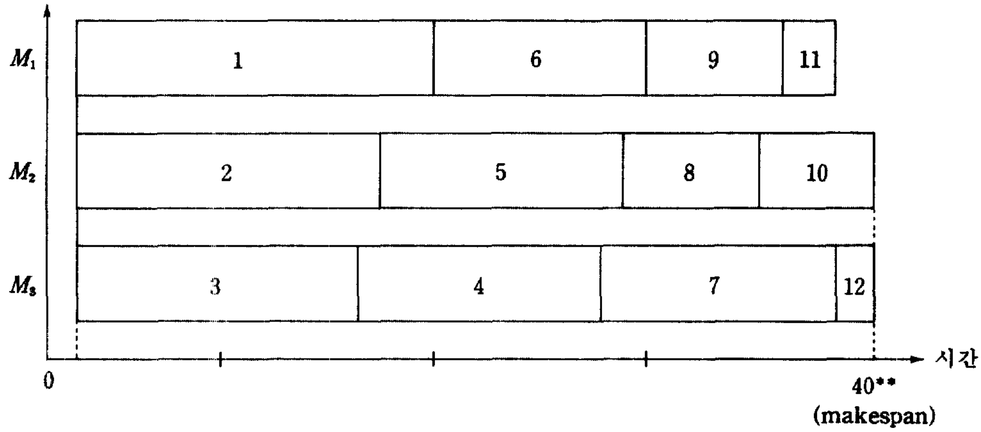
5. 결 론

본 연구에서는 작업이 공통의 납기를 갖는 경우에 조기완료 또는 납기지연에 따라서 벌과금이 부과되는 상황하에서 총벌과금의 합을 최소로하는 단일기계 일정계획 문제와 이를 확대한 동일한 능력을 갖는 복수의 병렬기계의 일정계획 문제를 다루었다.

공통납기의 단일기계에서 MAD문제는 평균흐름시간의 목적식을 가지는 2대의 병렬기계 문



<그림 4> 수치예의 주목적식 알고리듬해



<그림 5> 수치예의 부목적식 알고리듬해

제와 동일하다는 것이 입증되었으며, WMAD 문제가 크게 3가지 경우로 분류되어 위치가중치가 벌과금의 역할을 하는 복수기계의 경우로 확대되었다.

기존의 연구는 복수기계인 경우에는 일정계획만을 고려하였으나 본 연구에서는 단일기계의 경우와 동일하게 최적의 납기를 함께 고려한 알고리듬을 제시했다. 특히 작업의 조기완료와 납기지연에 따른 다른 벌과금 즉 가중치가 부여되는 복수기계의 문제에서는 다수의 대체적인 최적해 중에서도 우리의 주목적식 뿐만 아니라 부목적식인 작업총처리시간 같은 것을 만족시키는 최적해 중에서도 최적해를 구하는 알고리듬을 수치예제와 함께 제시하였다.

參 考 文 獻

1. Bagchi, U., Chang, Y. L. and Sullivan, R.S. (1987), "*Minimizing Absolute and Squired Deviations of Completion Times with Defferent Earliness and Tardiness Penalties and a Common Due Date*", Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 34, pp. 739-751.
2. Bagchi, U., Chang, Y.L. and Sullivan, R.S. (1986), "*Minimizing Mean Absolute Deviation of Completion Time about a Common Due Date*", Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 33, pp. 227-240.
3. Baker, K. (1974), "*Introduction to Sequencing and Scheduling*", John Wiley & Sons, New York.
4. Conway, R.W., Maxwell, W.L. and Miller, L.W. (1967), "*Theory of Scheduling*", Addison-Wesley, Reading, MA.
5. Emmons, H. (1987), "*Scheduling to a Common Due Date on Parallel Uniform Processors*", Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 34, pp. 803-810.
6. Hall, N.G. (1986), "*Single-and-multiple-processor Models for Minimizing Completion Time Variance*", Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 33, pp. 49-54.
7. Kanet, J.J. (1981), "*Minimizing the Average Deviation of Job Completion Times about a Common Due Date*", Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 28, No. 4, pp. 643-651.
8. Panwalkar, S.S., Smith, M. L. and Seidman, A. (1982), "*Common Due Date Assignment to Minimize Total Penalty for the One Machine Scheduling Problem*", OR. Vol. 30, No. 2, pp. 391-399.
9. Prabuddha De, Ghosh, J.B. and wells, C.E. (1990), "*Con Due-Date Determination and Sequencing*", Computer OR, Vol. 17, No. 4, pp. 333-342.