Journal of the KSQC
Vol. 18, No. 1, June 1990

1990년 6월 韓國品質管理學會誌 제18권 제1호

손실비용함수를 이용한 *pn*관리도의 경제적인 설계
Economic design of a *pn* control charts using loss-cost function

李 榮 植*
黃 義 徹**

ABSTRACTS

A model for the economic design of an *pn* control charts with an assignale cause is presented and the loss-cost function for control schemes using these charts is derived.

By minimizing this function with respect to the three control variables, namely, the sample size, the sampling interval and acceptance number, the economically optimal control plan can be optained.

The article shows what influence increasing or decreasing condition, according to changeability of the size of these factors, of expected cost can have on the economy when an attribute control chart is used.

I. 序 論

管理圖(Control chart)는 一般的으로 計量値(Varialule)와 計數値(Attribute) 管理圖로 分類되며, 그 目的은 工程에 관한 資料를 解析하여 必要한 情報를 얻고 이들 情報에 의해 工程을 效果的으로 管理해 나가고저 하는데 있다.

品質特性이 連續的인 척도 즉, 길이, 인장강도, 무게 등에 의하여 測定될 수 있을 때에는 計量値 管理圖를 使用하게 되며 이에는 $\bar{X}$管理圖, Cusum管理圖, T^2管理圖등이 適用된다. 그러나 많은 品質特性 즉, 파손이나 결점 같은 것

*安養專門大學 工業經營學科 副敎授
**漢陽大學校 産業工學科 敎授

은 計量値로서는 測定이 될 수 없는 것으로 다른 척도로서 測定되어야 하는데 이는 不良品이나 良品으로 分類되기 때문이다. 이러한 경우 計數値 管理圖가 使用되며 이에는 p管理圖, pn管理圖, C管理圖 등이 있다[2].

실제적으로 計數値管理가 計數値管理보다 많은 現實問題에 適用됨에도 불구하고 이에 관하여서는 硏究가 미흡 하였다.

따라서 본 연구에서는 이상원인(assignable cause)이 發生하는 경우에 있어서 計數値管理圖의 經濟的인 設計를 하여 이를 pn管理圖에 適用코져 하는 것이다. 이 pn管理圖는 不良率을 플로트하는 대신 不良品數를 플로트하여 작성한다. 이 管理圖의 計算이 p管理圖에 비해서 수월하며 pn管理圖에서 구한 意思決定變數 값을 그대로 조금 변형 시켜서 p管理圖로 活用시킬수도 있겠다[1, 4, 5].

또한 이 pn管理圖의 經濟的인 設計를 하기 위하여 유도된 손실비용함수(loss-cost function)의 성질분석과 이 함수의 매개 변수의 變動效果에 관해서도 解析的으로 分析해 보고져 한다. 다음 절 수식(6)에서 14개의 매개 변수 중 pn管理圖에도 중요한 意思決定變數인 합격판정개수(acceptance number)와 샘플의 크기(sample size), 그리고 샘플링빈도(frequency of sampling)에 관하여 그 효과를 나타내고져 한다.

본 연구의 제II절에서는 기존연구의 고찰을 다루고 제III절에서는 본 연구에서 다룰 모델설정과 전제조건에 관하여 서술 하였으며 제IV절에서는 본 연구의 중심이 되는 최적의 pn管理圖를 設計할 수 있도록 손실비용 함수를 유도하였고 마지막 V, VI절에서는 손실비용함수의 성질을 분석하여 매개변수의 변동효과에 관하여 서술한 다음 결론을 유도하였다.

II. 기존 연구의 고찰

費用의 最少化에 근거를 하여 $\bar{X}$관리도와 Cusum관리도의 最適設計에 관한 硏究는 많은 사람들에 의하여 연구되어 왔다. Ducan(1956), Cowden(1957), Mukherjee(1964), Taylor(1968), Goel et al(1968), Baker(1971), Gibra(1971), Chiu(1973), Chiu and Wethenill(1974), Lashkari and Rahim(1981)등이 計量値 管理圖에 관하여 연구하였다[9, 11, 13].

이에 비하여 計數値管理圖에 관해서는 1973년에 Ladany가 처음으로 硏究論文을 발표하였다[13]. 1975년에 Chiu는 1956년에 Ducan이 개발한 $\bar{X}$관리도의 最適設計를 pn관리도에 적용 하였으며 1986년에 Thomas와 Vance는 $\bar{X}$관리도에서 p관리도 u관리도로의 計量値와 計數値 관리도의 연관성과 計量値管理圖의 最適設計를 計數値管理圖의 最適設計로 이용하는 연구를 시도하였다[8]. 또한 Duncan은 1978년에 Pn관리도에서 p관리도를 設計할 수 있는 또다른 하나의 연구를 수행 하였으며[3], Chiu는 1975년에 pn관리도의 최적설계가 아닌 최적설계에 근사한 발전적기법의 반경제적(semi-economic)설계를 시도 하였다[12]. 최근까지 Chiu[11, 13, 14] William and Paters[9, 10]는 다양하게 pn관리도에 관하여 꾸준히 연구해 왔다. 우리나라에서는 計量値로서 $\bar{X}$管理圖에 관해서는 몇편의 연구실적이 있으나 計數値, 특히 pn관리도에 관한 연구는 거의 없는 실정이다. 따라서 본 연구에서는 이에 관한 기초연구 고찰과 아울러 經濟的인 最適設計에 관한 가이드라인을 제시하며 또한 실제로 모델을 설정하여 이에 관한 解析的인 수식유도를 도출한 다음 이를 분석하고져 하였다.

III. 모델설정과 전제조건

現在의 工程은 管理(in control)상태에 있다

는 조건하에서 이때 불량이 날 확율은 P_0이며 하나의 이상원인이 발생하면 工程의 不良이 일어날 확률은 P_1으로 된다. 이때의 공정이 관리가 잘 이루어지지 못한 상태(out of control)로 본다.

P_1값은 工程의 安定狀態(표준편차σ)에서 관리상태가 변함으로서 유도될 수 있다. 즉 $P_1 = P_0 + \sigma\sqrt{P_0(1-P_0)}$이므로 P_1값이 대체로 P_0값보다 크게 된다. 다음에 전개하게 될 모델은 P_0값과 σ값으로 다양하게 P_1을 구해서 적용시킬수 있다[3].

이상원인이 일어날때 까지의 시간은 평균 t시간인 지수분포를 하며 샘플의 크기 n은 매 h시간 마다 추출하기로 한다.

이 샘플에서 C개이상의 불량품이 발견되면 공정은 멈추게 되고 이상원인의 조사가 착수된다. 그리고 h는 샘플링빈도 c는 합격판정 갯수로 규정한다.

이 세가지 값이 바로 pn관리도의 설계에 있어서 의사결정 변수가 된다. c개 이상의 불량품수가 발견되어서 工程을 중지하고 이상원인에 관한 조사가 이루어진 다음에 그것이 실제로 이상원인이 아닐 때 즉 Type I error 혹은 false alarm일 때에는 이때 소비된 기대시간이 t_0이고 이에 수반된 비용은 A_0이다. 만약 실제로 이상원인이 발견되었을 때 즉 true alarm일 때는 t_1시간과 A_1의 비용이 든다. 그리고 본 모델에서는 이상원인이 발생한 공정은 자기보전이나 수리본능이 없다고 가정하기 때문에 이상원인이 발생하면 그 문제가 해결된 다음에 관리상태로 되돌아간다. 공정은 생산속도가 빨라서 실제적으로 샘플링 동안에는 이상원인이 발생하지도 않으며 따라서 샘플링 시간도 무시된다고 본다. V_0는 관리가능 상태에서 공정이 운용중일 때의 시간당 수익이며 V_1은 관리불능 상태에서 공정이 운용중일 때의 시간당 수익이다.

샘플링해서 검사를 하는데 드는 비용은 거의 모든 문헌에서 가정 했듯이 선형으로 가정하여 $a+bn$으로 표시하며 이때 a는 고정비이며 b는 변동비이다.

IV. 손실비용 함수

손실비용 함수를 유도하기 위해서 다음 두값을 정의 한다.

α는 공정이 관리상태에 있을 때 샘플에서 불량품수가 c를 초과할 확율이므로 다음식과 같다.

$$\alpha = \sum_{x=c+1}^{n} \binom{n}{x} P_0^x (1-P_0)^{n-x}$$

p는 공정이 관리불능 상태일때 샘플에서 불량품수가 c를 초과할 확율로서 다음 식과 같이 나타낸다.

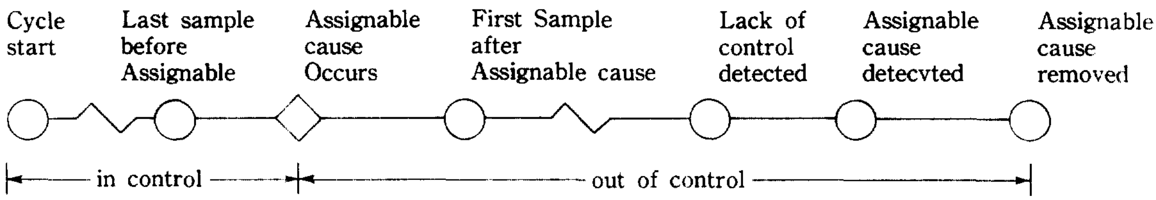
$$P = \sum_{x=c+1}^{n} \binom{n}{x} P_1^x (1-P)^{n-x}$$

다음에는 생산주기(Production cycle : PC)를 결정하기 전에 먼저 공정의 관리상태와 관리불능 상태의 시간적 흐름을 그림으로 나타내보면(그림 1)과 같다[6, 8].

생산주기 PC는 생산을 개시해서 이상원인을 탐지하고 이를 제거하기 까지의 시간으로 정의한다. 이상원인의 출현율을 λ라 하고 만약 이상원인이 m번째와 $m+1$번째 샘플사이에서 발생한다면 이 기간 동안에 출현할 평균시간 τ는 다음 식으로 구할 수 있다.

$$\tau = \int_{mh}^{(m+1)h} \exp(-\lambda y),\ \lambda(y-mh)$$

$$dy / \int_{mh}^{(m+1)h} \exp(-\lambda y)\ \lambda dy$$



(그림 1) Diagram of in control and out of control states of a proess.

$$=\frac{\{1-(1+\lambda h)\exp(-\lambda h)\}}{\{\lambda-\lambda\exp(-\lambda h)\}}\doteq\frac{h}{2}$$

Proof

$$\int_{mh}^{(m+1)h}e^{-\lambda y}\lambda(y-mh)\,dy=\int_{mh}^{(m+1)h}ye^{-\lambda y}\lambda dy-\int_{mh}^{(m+1)h}e^{-\lambda y}mhdy$$

$$=\lambda\left[y\frac{e^{-\lambda y}}{-\lambda}\right]_{mh}^{(m+1)h}+\lambda\int_{mh}^{(m+1)h}\frac{e^{-\lambda y}}{\lambda}dy+\lambda mh\left[\frac{e^{-\lambda y}}{\lambda}\right]_{mh}^{(m+1)h}$$

$$=-(m+1)h\,e^{-\lambda(m+1)h}+mhe^{-\lambda mh}+\left[\frac{e^{\lambda y}}{-\lambda}\right]_{mh}^{(m+1)h}+mh(e^{-(m+1)h}-e^{-\lambda mh})$$

$$-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda(m+1)h}+\frac{e^{-\lambda mh}}{\lambda}$$

$$=-(mh+h)e^{-\lambda mh}e^{-\lambda h}+mhe^{-\lambda mh}+\frac{1}{\lambda}(-e^{-\lambda mh}e^{-\lambda h}+e^{-\lambda mh})+mhe^{-\lambda mh}e^{-\lambda h}-mhe^{-\lambda mh}$$

$$=-he^{-\lambda mh}e^{-\lambda h}+\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda mh}(1-e^{-\lambda h})$$

$$=\frac{e^{-\lambda mh}}{\lambda}(1-e^{-\lambda h}-\lambda he^{-\lambda h})$$

$$=\frac{e^{-\lambda mh}}{\lambda}(1-(1+\lambda h)e^{-\lambda h})\quad\cdots\cdots\cdots\cdots Ⓐ$$

$$\int_{mh}^{(m+1)h}e^{-\lambda y}\lambda dy=\lambda\left[\frac{e^{-\lambda y}}{-\lambda}\right]_{mh}^{(m+1)h}$$

$$=-e^{-\lambda(m+1)h}+e^{-\lambda mh}$$

$$=e^{-\lambda mh}(1-e^{-\lambda h})\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots Ⓑ$$

$$\therefore\tau=Ⓐ/Ⓑ=\frac{\frac{e^{-\lambda mh}}{\lambda}(1-(1+\lambda h)e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda mh}(1-e^{-\lambda h})}$$

$$=\frac{1-(1+\lambda)e^{\lambda h}}{\lambda-\lambda e^{-\lambda h}}$$

따라서 생산주기 PC는 다음과 같이 4가지로 구성되어 진다.

i) 관리상태기간$(\frac{1}{\lambda})$

ii) 관리불능 상태기간$(\frac{h}{p}-\tau)$

iii) false alarm에서 기인한 조사기간 $(\alpha t_0(\frac{1}{\lambda}-\tau)/h)$

iv) true alarm으로 인한 조사기간을 t_1이라 할 때

$$PC = \frac{1}{\lambda} + \frac{h}{p} - \tau + \frac{\alpha t_0 (\frac{1}{\lambda} - \tau)}{h} + t_1 \quad \cdots\cdots (1)$$

본 연구에서 고려하는 총 비용(TC : total cost)는 샘플링비용, false alarm으로 인한 샘플링비용과 그때까지의 정지한 공정의 손실비, 그리고 true alarm일때 이상원인의 탐지, 수정 그리고 그에 따른 부대비용의 합으로 구성된다.

$$TC = a + bn + A_0 + A_1 \quad \cdots\cdots (2)$$

(2)식을 이용하여 생산주기 PC당 기대순이익 (expected net profit : ENP)을 구하면 다음 식 (3)이 얻어진다.

$$ENP = \frac{V_0}{\lambda} + V_1 (\frac{h}{p} - \tau) - \frac{\alpha A_0 (\frac{1}{\lambda} - \tau)}{h} - A_1 - \frac{(a + bn)(\frac{1}{\lambda} + \frac{h}{p} - \tau)}{h} \quad \cdots\cdots (3)$$

따라서 단위기간당 평균순이익 I는 다음 식 (4)와 같이 단순화 할 수 있다.

$$I = \frac{\text{식 (1)}}{\text{식 (3)}} \quad \cdots\cdots (4)$$

F를 손실비용함수(loss cost function)로 정의하면 식 (4)는 다음 식 (6)과 같이 된다.

$$I = V_0 - F \quad \cdots\cdots (5)$$

$$F = \frac{\lambda M B_1 + T B_0 + \lambda W + \frac{(a + bn)(1 + \lambda B_1)}{h}}{1 + \lambda B_1 + t_0 B_0 + \lambda t_1} \quad \cdots\cdots (6)$$

단, $B_0 = \frac{\alpha(1 - \lambda\tau)}{h}$, $B_1 = \frac{h}{p} - \tau$

$M = V_0 - V_1$,
$T = A_0 + V_0 t_0$,
$W = A_1 + V_0 t_1$

F는 3개의 관리변수 즉 h, n, C의 함수로 구성되며 F를 최소화할 수 있도록 이 세값들을 direct search로 구하면 pn관리도에 대한 경제적인 최적설계를 도출할 수 있다. 그런데 위 式 (6)에서 샘플크기 n이 일정하면 pn관리도는 p관리도보다 더욱 쉽게 작성할 수 있으므로[1], 본 연구에서는 F식을 h, n, C의 값으로 구하는 대신 샘플링 이론으로서 샘플크기 n을 먼저 구한 다음에 h, C 두값만의 함수로서 direct search를 한다. 이렇게 하면 식 (6)은 계산량이 훨씬 줄어들게 되어서 더욱더 경제적인 pn관리도를 설계할 수 있게 된다.

V. 손실비용 함수식의 성질분석 및 매개변수의 변동효과

손실비용 함수식은 식 (6)에서 본 바와 같이 11개의 費用 매개변수와 3개의 의사결정 변수들의 함수로 되어 있다. 이 식을 해결해 가는데 있어 관리도 변수들의 견지에서 최소 손실비용 함수의 민감도 분석도 이루어질 수 있겠다.

$\Pi_0 = (C_0,\ n_0,\ h_0)$을 최소비용의 관리도체계 (control scheme)라고 하고(percentage increase in lost cost : PiL)을 실제적으로 규정할 수가 있다.

$$\mathrm{PiL} = \frac{F(\Pi) - F(\Pi_0)}{F(\Pi_0)} \times 100 \quad \cdots\cdots\cdots (7)$$

식 (7)에서 알 수 있는 사실은 PiL값이 적을수록 더 좋은 관리체계가 된다는 사실이다. 매개 변수들의 F식에 대한 변동효과를 살펴보면 다음과 같다[11, 14].

① 최적의 합격판정갯수 C_0는 P_0/P_1비에 의하여 결정되며 그 비가 클수록 C_0값도 커진다.

② 최적 샘플갯수 n_0는 실질적으로 P_0의 크기에 의존하며 P_0가 작으면 n_0값이 커진다.

③ 최적 샘플링빈도 h_0는 $M(V_0 - V_1)$과 이상원인의 출현율 λ에 크게 영향을 받는다. M값이 적으면 h_0는 커진다.

다만 C_0와 n_0에는 M값은 거의 영향을 미치지 않으며 λ값이 적으면 h_0값은 커진다.

VI. 結　論

工程이 管理狀態에 있을때 管理圖의 管理限界는 3σ로 pn 管理圖의 管理上限을 정하면 合格판정갯수의 관점에서 管理上限은 C와 $C+1$사이에 있게되며 관리하한은 Zero가 된다. 그리고 3σ의 규칙은 다음과 같다.

$$C < nP_0 + 3\sqrt{nP_0(1-P_0)} < C+1 \quad \cdots (8)$$

위 식 (8)을 준수하면서 주어진 손실비용함수를 최소화 하는 方向으로 n_0, h_0, C_0을 구한다. 이 pn관리도에서 구한 값을 p관리도 에서도 적용할수 있다고 하였는데 이는 n_0와 h_0는 그대로 사용하고 단지 C_0값만은 $\dfrac{(C+1)}{n_0} - 0.001$로 변형하여 사용 한다. 이로써 본 연구는 이상원인이 존재하여 관리상태와 관리불능 상태가 교대하는 상황에서 손실비용 함수를 최소화 함으로서 pn관리도의 경제적인 설계를 전개 하였다. 앞으로 더욱더 깊이 연구 되어야 할 과제는 이상 원인의 출혀 시간이 독립적이고 지수분포를 한다는 가정을 완화하는 것이다. 또한 샘플링과 검사에 시간적인 요소가 고려되어야 하며, 관리불능상태의 품질수준에 대한 부정확한 사전분포 (Prior distributhion)의 효과를 분석해야할 것으로 기대된다.

參 考 文 獻

1. 김성인(1985), "관리도" 박영사.
2. 황의철(1982), "최신품질관리" 박영사.
3. Acheson J. Duncan(1978), "*The economic design of p-charts to maintain current control of a process : some numerical results*", Technometrics, Vol. 20, No. 3, pp 235~243.
4. Douglas C. Montgomery(1985), "*Statistical Quality Control*", John Wiley & Sons, New York.
5. ________ (1980), "*The economic design of Control Charts ; A review and literature surrey*", Jr. of Quality Technology, Vol. 12, No. 2, pp 75~87.
6. Lashkani R.S. and Rahim, M.A. (1982), "*An economic design of cumulative sum charts to control non-normal process means*", Comput & Indus, Eng, Vol. 6, No. 1, pp 1~18.
7. Taro Yamane(1967), "*Elementary Sampling Theory*", Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
8. Thomas J. Lorenzen and Lonnie C. Vance(1986), "*The economic design of control charts : A unified approach*", Technometrics, Vol. 28, No. 1, pp 3~10.
9. William W. Williams and Michael H. Pefers(1989), "*Economic design of an attributes control system for a multistage serial production process*", Int, J. Prod Res., Vol. 27, No. 8, pp 1269-1286.
10. ________ (1987), "*Economic design of guality monitoring efforts for multistage production systems*", IIE Trans, March, pp 81~87.
11. Chiu, W.K, (1975), "*Minimum cost control schemes using pn charts*", Int J. Prod. Res., Vol. 13, No. 4, pp 341~349.
12. ________ (1975), "*Economic design of attribute control charts*", Technometrics, Vol. 17, No. 1, pp 81~87.
13. ________ (1976), "*Economic design of pn charts for process subject to a multiplicity of assignable causes*", Management Science, Vol. 23, No. 4, pp 404~411.
14. ________ (1977), "*A, Sensivity study of minimum cost pn-charts*", Int J. Prod. Res., Vol. 15, No. 3, pp 237~242.