Journal of the KSQC
Vol. 18, No. 1, June 1990

1990년 6월 韓國品質管理學會誌 제18권 제1호

다단계 생산시스템에서의 로트크기 결정방법
A Lot Sizing Model for Multi-Stage MRP Systems

李 浩 一*
金 滿 植**

ABSTRACT

A lot-sizing model for multi-stage MRP systems is proposed, in which known demands must be satisfied. In this model, an approach with considerations of initial inventory and limited production capacity is involved.

Most of the studies on the lot-sizing techniques for multi-stage material requirement planning systems have been focused upon two basic approaches. One approach is to develope an algorithm yielding an optimal solution. Due to the computational complexity and sensitivity of the optimal solution to the problem of lot sizing, heuristic approaches are often employed.

In this paper, the heuristic approach is used by sequential application of a single-stage algorithm with a set of modified cost by the concept of multi-echelon costs. The proposed method is compared with an lot-sizing method(Florian-Klein Model) to prove its effectiveness by numerical examples.

1. 서 론

생산계획의 목적은 소비자의 수요를 만족시키기 위하여 필요한 제품을 적시에 적량을 최소의 비용으로 생산할 수 있도록 계획하는데 있다. 이러한 생산계획의 개념으로 등장한 MRP시스템은 MPS(기준생산계획)의 결과를 입력자료로 하여 자재소요계획을 결정하는 것을 말하며, 로트크기 결정 문제(Lot Sizing Problem)는 MRP의 가장 중요한 부문이라 할 수 있다. 로

*한양대학교 대학원
**한양대학교 산업공학과 교수

트크기 결정문제는 지금까지 많은 연구가 진행되고 있는 부문이며, 이러한 문제를 다루는데 고려되는 사항들을 크게 분류해보면 다음과 같다.

i) 단일품목 혹은 다품목
ii) 생산 또는 재고 용량의 제약여부
iii) 수요의 형태(확정적 또는 확률적 발생)
iv) 재고의 고갈 허용여부
v) 제품구조 고려여부
vi) 고정생산계획기간(fixed horizon production planning) 혹은 연동생산계획기간(rolling horizon production planning)

단일 품목에 대한 로트크기 결정 기법으로는 FOQ(Fixed Order Quantity), EOQ(Economic Order Quantity), LFL(Lot for Lot), FPR (Fixed Period Requirements), LUC(Least Unit Cost), LTC(Least Total Cost), PPB (Part Period Balancing), W-W 앨고리듬(Wagner Whitin algorithm) 등을 들 수 있다. 이중 W-W 앨고리듬이 가장 효과적인 기법으로 최적해를 보장하지만 문제의 크기가 커지면 계산효율이 떨어지는 단점을 가지고 있다.

Florian과 Klein [5]은 생산능력이 일정한 경우 꼭지점의 특성을 이용하여 동적계획법으로 최적해를 구하는 모형을 개발하였다.

기존의 로트크기 결정 기법들은 제품구조를 고려하지 않고 로트크기를 결정하므로써 각 단계에서는 최적해가 될 수 있으나 전체 문제의 최적해라고는 볼 수 없다. 최근 이러한 다단계의 문제를 해결하는 방법으로는 크게 3가지 방향으로 연구가 진행되고 있는데 이는 다음과 같다.

첫째는 최적해를 얻기위한 앨고리듬을 개발하는 것으로서 Zangwill[14]과 Love[8]에 의해 발표된 직렬형 조립생산 체계에서의 연구와 Napier Steinberg[8]에 의해 발표된 정수계획법을 이용한 방법등이 있으나 계산크기가 너무 많아 기존 MRP시스템에 적용하는 데는 한계가 있다.

둘째는 현재 MRP시스템에서 적용하는것 처럼 각 단계를 서로 독립적으로 처리하여 각 단계에 대한 최적해를 구하여 사용하는 방법이다.

셋째는 New[9], Blackburn과 Millen[3]에 의해서 제시된 각 단계에 대해서 고려되는 생산준비비용과 유지비용을 수정하여 사용하는 방법이 있다.

또한, 지금까지 연구되어온 로트크기 결정기법들은 대부분 계획기간의 초기재고가 없는 것을 가정하여 개발되었다. 그러나 현실적으로 제품을 생산하는 각 단계에는 현존하는 재고가 존재하며, 이러한 재고를 고려할 경우에는 로트크기가 바뀌게 될 것이다.

본 연구에서는 단일품목을 생산하는 시스템에서 생산용량이 제약되어 있고 제품의 구조와 초기 재고를 고려하는 경우의 로트크기 결정에 관한 근사해법을 제시하고자 한다. 따라서 2장에서는 초기재고를 고려한 경우 동적계획법으로 해를 얻는 절차를 제시하고, 3장에서는 제품구조를 고려할 경우 비용을 수정하는 모형을 제시한다. 4장에서는 수치예제로서 본 논문에서 제시한 근사해법을 초기재고를 고려하지 않은 Florian과 Klein[5]의 논문과 2장에서 제시한 초기재고만을 고려한 단단계 최적알고리듬, 제품의 구조를 고려한 알고리듬에 의한 로트크기의 변화와 총비용의 변화를 보여주고자 한다.

2. 모형 설정

본 장에서는 본 연구에서 고려중인 각각의 생산계획기간에 생산능력의 제한이 있고, 초기재고가 존재하며, 각 기에서 발생하는 수요는 모두 만족되어야 하는 생산계획 문제에 있어 계획

기간 동안의 생산-재고-준비 비용의 합을 최소화 하는 생산계획 모형을 세운다.

2.1. 기호 정의

r_t : 기간 t에서 발생하는 수요량,
단, $t=1,2,\cdots,T$

x_t : 기간 t에서의 생산량,
단, $t=1,2,\cdots,T$

P_t : 제품단위당 생산비용,
단, $t=1,2,\cdots,T$

h_t : 제품한단위의 기간당 재고 보관 비용,
단, $t=1,2,\cdots,T$

S_t : 기간에서의 생산 준비비용.
단, $t=1,2,\cdots,T$

I_t : 기말에 보유하고 있는 재고량,
단, $t=0,1,\cdots,T$

$\delta(x_t)=1 \quad x_t>0$
$\quad 0 \quad x_t=0$
단, $t=1,2,\cdots,T$

C_t : 기간 T에서의 생산능력
단, $t=1,2,\cdots,T$

2.2. 모형전개

$$(P)\ \ \text{Min}\ \ TC(X)=\sum_{t=1}^{T}P_t x_t+\sum_{t=1}^{T}h_t I_t+\sum_{t=1}^{T}\delta(x_t)\ S_t \quad \cdots\cdots(1)$$

$$\text{s.t.}\ \ I_t=\sum_{j=1}^{t}x_j-\sum_{j=1}^{t}r_j+I_0 \quad \cdots\cdots(2)$$

$$I_t\geq 0,$$

$$0\leq x_t\leq C_t \quad \cdots\cdots(3)$$

$$\sum_{j=1}^{t}c_j\geq\sum_{j=1}^{t}r_j-I_0 \quad \cdots\cdots(4)$$

단, $t=1,2,\cdots,T$

문제(P)의 제약식은 폐쇄된 볼록집합(closded convex set)을 구성하고 목적식 $TC(X)$는 오목함수(concave function)이므로 구하고자 하는 최적해는 제약식에 의해 구성되는 폐쇄된 볼록 집합의 꼭지점(extream point)에서 존재한다.

2.3. 꼭지점의 특성

Mann와 Weinott[7]에 의하며 $I_t=0$인 $t(t=0,1,\cdots,T)$기를 재생점(regeneration point)이라 하였다.

$$I_t=0 \quad 단,\ \ t\in\{1,2,\cdots,T\} \quad \cdots\cdots(5)$$

$$\sum_{j=1}^{t}c_j\geq\sum_{j=1}^{t}r_j \quad \cdots\cdots(6)$$

이고, 식(2), (3), (4)를 만족하면 원문제 P에 대한 최적생산 계획은 처음 t기와 마지막 $(T-t)$기에 대한 생산 계획 문제를 독립적으로 풀 수 있다.

특정기간에서 생산비용과 생산준비 비용은 해당기간의 생산량에만 의존하고 재고 유지 비용은 재생점을 기준으로 전후에 독립적으로 영향을 끼치므로 식(5)는 제약식(2)를 분리한다.

u와 v는 연속적인 재생점이고 기간$(u+1, v)$에서 실행가능한 생산계획 X의 부집합을 $S_{u+1\,v}$라 하면

$$S_{u+1.v}=\{x_i,\ \ i=u+1,\cdots,v|I_u=0=I_v\ ;\ I_i>0\ \text{for}\ u<i<v\},\ \ 0\leq v\leq n \quad \cdots\cdots(7)$$

이 된다.

그러나 Manne와 Veinott[7], Florian과 Klein[5], C.S.Sung[11,12] 등은 $I_0=0$로 가정함으로써 실제 상황과는 차이가 있는 모형을 수

식화 하였다.

본 연구에서는 $I_0>0$이고 첫 재생점을 $k(1)$으로 정의한다. 즉 $I_0>0$, $I_{k(1)}=0$일때, $S_{1.k}$는 실행 가능한 생산계획 X의 부집합$(x_1, x_2, \cdots, x_{k(1)})$을 나타낸다.

두개의 연속적인 재생점$(I_{k(1)}=I_{k(2)}=0)$을 각각 $k(1)$, $k(2)$라 하면

$$\begin{aligned} S_{k(1)+1.k(2)} = \{ & x_i.\ \ i=k(1)+1, \\ & \cdots k(2) \mid I_{k(1)}=I_{k(2)}=0\ ; \\ & I_i>0 \text{ for } k(1)+1 \le i < k(2)\} \quad \cdots\cdots(8) \end{aligned}$$

여기서 $0 \le k(1) < k(2) \le T$

$k(1)=0$은 $I_0=0$인 경우를 의미한다.

실행가능한 생산 계획 X가 $S_{k(1)+1.k(2)}$를 포함하고 식(1)을 만족하는 두개의 서로 다르고 실행가능한 생산순서 $S'_{k(1)+1.k(2)}$와 $S''_{k(1)+1.k(2)}$가 존재한다면

$$S_{k(1)+1.k(2)} = S'_{k(1)+1.k(2)} + S''_{k(1)+1.k(2)}/2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

이다.

생산계획 X는 $X=(X'+X'')/2$ 이므로 꼭지점이 아니다.

$I_0 \neq 0$인 경우에도 유사하다. $I_{k(1)}=0$, 즉 $k(1)$을 첫번째 재생점이라고 가정하면

$$\begin{aligned} S^*_{1.k(1)} = \{ & x_1.\ \ i=1, 2, \cdots, k(1) \mid I_0>0, \\ & I_{k(1)}=0\ ; I_i>0 \text{ for } 1<i<k(1)\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10) \end{aligned}$$

이다.

초기재고가 있는 경우, 실행 가능한 생산계획 X가 $S^*_{1.k(1)}$을 포함하고 식 (11)을 만족하는 두개의 서로 다르고 실행가능한 생산순서 $S'_{1.k(1)}$와 $S''_{1.k(1)}$이 존재한다고 하면

$$S^*_{1.k(1)} = (S'_{1.k(1)} + S''_{1.k(1)})/2 \quad \cdots\cdots(11)$$

이다.

생산계획 X는 $X=(X'+X'')/2$ 이므로 꼭지점이 아니다. $X \notin D$이므로 최적해가 될 수 없다.

(정의)

계획기간 T에서 $k(1)\,(1 \le k(1) \le t)$가 재생점, 즉 $I_{k(1)}=0$라 하면 생산계획 X는 식(5), (6)에 의하여 첫 $k(1)$기와 마지막 $(T-k(1))$기로 구분되어 독립적으로 생산계획을 세울 수 있다. 이때 생산계획 기간 내의 $S_{1.k(1)}$ 혹은 $S^*_{1.k(1)}$과 $S_{k(1)+1.T}$의 각 생산량이 생산용량보다 작고 0보다 큰(즉 $0<x_t<C_t\,(1 \le t \le T)$) 생산량을 갖는 주기가 많아도 한 주기만 존재하고 다른 주기의 생산량이 모두 0이나 최대 생산용량까지 생산할 때 $S^*_{1.k(1)}$ 혹은 $S_{1.k(1)}$과 $S_{k(1)+1.T}$는 각각 capacity constrained 되어졌다고 한다.

(정리 1)

실행가능한 생산계획 X가 꼭지점의 집합 D내에 존재한다면 X는 capacity constrained만으로 구성되어졌다.

(증명)

$X \in D\,(D$: 꼭지점 집합), $S_{1.k(1)}$ 또는 $S_{1.k(1)}$이 X의 일부분이고, capacity constrained 되어 있지 않다고 가정하자. 그러면 생산용량 제약보다 적게 생산할 생산주기가 최소한 두 주기 (b, d)가 존재한다. 즉 $0<x_b<C$, $0<x_d<Cd$인 b, d가 존재한다.

$$\delta = 1/2 \text{ Min } \{x_b.\ C_{b-xb},\ x_d.\ C_{b-xd},\ \min(I_t)\},\ \ I \le t \le k(1)$$

로 두고 U_i를 i번째 요소만 1이고 나머지는 0인

$k(1)$요소 벡터라고 하자. 이제 서로 다른 실행가능한 생산계획을 식 (12), (13)에 의하여 정의하자.

$$S'_{1,k(1)}\text{이나 } S^{*'}_{1,k(1)} = S_{1,k(1)} - \delta\ U_b + \delta\ U_d \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

$$S''_{1,k(1)}\text{이나 } S^{*''}_{1,k(1)} = S_{1,k(1)} + \delta\ U_b - \delta\ U_d \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (13)$$

$\delta > 0$이므로 부 생산계획 $S'_{1,k(1)}$, $S''_{1,k(1)}$ 또는 $S^{*'}_{1,k(1)}$, $S^{*''}_{1,k(1)}$는 실행가능임을 쉽게 알 수 있다.

그러나 $S_{1,k(1)} = (S'_{1,k(1)} + S''_{1,k(1)})/2$ 이고 $S^{*}_{1,k(1)} = (S^{*'}_{1,k(1)} + S^{*''}_{1,k(1)})/2$ 이므로 X가 꼭지점이라는 가정에 어긋난다. 그러므로 $S_{1,k(1)}$ 또는 $S^{*}_{1,k(1)}$는 capacity constrined 되어져야 한다.

(Lemma) X'와 X''가 두개의 실행가능한 생산계획이고 $X=(X'+X'')/2$이면 X'와 X''는 X의 모든 재생점을 공유한다.

(증명)

k를 재생점이라 하면 가설에 의하여

$$\sum_{t=1}^{k} x_t = 1/2\{\sum_{t=1}^{k} x'_t + \sum_{t=1}^{k} x''_t\}$$

양변에 $r^t - I_0$를 공제하면

$$\sum_{t=1}^{k}(x^t - r^t + I_0) = 1/2\{\sum_{t=1}^{k}(x'_t - r_t + O_0) + \sum_{t=1}^{k}(x''_t - r_t + I_0)\}$$

이므로

$I_k = (I''_k + I'_k)/2$이다. $I_k = 0$이므로 I'_k와 I''_k는 0이어야 하고 세개의 생산계획 X, X', X''는 같은 재생점 k를 공유한다. 그렇지 않으면 그 둘중의 하나의 생산계획은 실행불가능이 된다.

(정리 2)

실행가능한 생산계획 X가 capacity constrained 되어진 부집합 $S_{k(v-1)+1,k(v)}(k(v-1)\ \ k(v)\ T)$로 이루어져 있다면 X는 꼭지점의 집합 D안에 존재한다.

(증명)

$X \notin D$라고 가정하면 $X=(X'+X'')/2$이다. (Lemma)로 부터 X'와 X''는 모든 재생점들을 공유함으로 $k(v)$를 재생점이라 하고 $S_{k(v-1)+1,k(v)}$, $S'_{k(v-1)+1,k(v)}$와 $S''_{k(v-1)+1,k(v)}$를 각각 X, X'와 X''에서의 계획기간 $k(v-1)+1 < t < k(v)$의 부 생산계획 이라하면

$$S_{k(v-1)+1,k(v)} = (S'_{k(v-1)+1,k(v)} + S''_{k(v-1)+1,k(v)})/2$$

이다.

$S'_{k(v-1)+1,k(v)}$와 $S''_{k(v-1)+1,k(v)}$가 capacity constrained 되어있지 않았다면, $0<x<C$를 만족하는 주기가 최소한 둘이상(b, d) 존재한다.

즉, 충분히 작은 δ에서 $S'_{k(v-1)+1,k(v)}$와 $S''_{k(v-1)+1,k(v)}$는 각각 식 (14)와 식 (15)에 의하여 표시된다.

$$S'_{k(v-1)+1,k(v)} = S_{k(v-1)+1} - \delta\ U_b + \delta\ U_d \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (14)$$

$$S''_{k(v-1)+1,k(v)} = S_{k(v-1)+1} + \delta\ U_b - \delta\ U_d \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (15)$$

a) $x_b = 0$이고 $x_d = 0$이거나 $x_b = C$와 $x_d = C$인 경우에 $S'_{k(v-1)+1,k(v)}$와 $S''_{k(v-1)+1,k(v)}$는 실행

불가능하다.

b) $x_b = C$이고 $x_d = r < C$, 즉 $S'_{k(v-1)+1,k(v)}$가 실행가능하면 $x_b = C + \delta$이므로 $S'_{k(v-1)+1,k(v)}$는 실행불가능하다.

c) $x_b < C$이고 $x_d = 0$이면 $S''_{k(v-1)+1,k(v)}$는 실행가능하나 $x_d = -\delta$이므로 $S''_{k(v-1)+1,k(v)}$가 실행불가능하다.

이상으로 $S'_{k(v-1)+1,k(v)}$와 $S''_{k(v-1)+1,k(v)}$가 동시에 실행 가능할 수 없음을 보였으므로 이것은 $X \notin D$라는 초기 가정에 위배된다.

정리와 lemma에 의하여 해의 영역과 꼭지점의 집합 D의 특성에 대하여 살펴보았다.

정리 1과 2에 의하여 $I_{k(1)} = 0$(기간 $k(1)$은 재생점)이라 할때

$$\sum_{j=1}^{k(1)} r_j - I_0 = mC + \varepsilon$$

여기서, m은 음이 아닌 정수이고 $0 \le \varepsilon < C$, $I_0 \ge 0$이다. 계획기간 $k(v-1)+1 \le t \le k(v)$, $v = 2, 3, \cdots$, 에서는

$$\sum_{j=k(v-1)+1}^{k(v)} r_j = mC + \varepsilon$$

(Corollary) 계획기간이 T이고 재생점이 $k(1), k(2), \cdots, k(n)$이라 할 때

$$\sum_{j=1}^{k(1)} r_j - I_0 = mC + \varepsilon \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

$$\sum_{j=k(v-1)+1}^{k(v)} k_j = mC + \varepsilon, \quad v = 2, 3, \cdots n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (17)$$

식 (16), (17)을 만족한다.

이때 분할된 (decomposed) 부계획기간 $k(v-1)+1 \le t \le k(v)$, $v = 1, 2, \cdots, m$ (단, $k(0) = 0$)에서 최적순서(optimal sequence)는 부계획기간(subplanning period)내의 생산량 ε $(0 < \varepsilon < C)$을 갖는 주기수는 1회 이하이고 나머지 주기에서는 0이나 생산용량만큼 생산한나.

2.4. 네트워크의 구성

분할된 부 생산계획 기간의 최적생산계획을 찾는 문제는 비순환 네트워크에서 최소비용 경로를 찾는 것과 동일하다.

각각 $k(1), k(2), \cdots, k(n)$를 각각 재생점이라 하면 생산계획은 n개의 부생산계획 문제로 분할된다. 이때 Y_t를 t기 까지의 누적생산량이라 하면, $1 \le t \le k(1)$인 경우에는 식 (18)이 되고, $k(v-1)+1 \le t \le k(v)$ $(v = 2, 3, \cdots, n, k(1) = 0)$인 경우에는 식 (19)가 된다.

$$Y_t = \sum_{t=1}^{k(1)} x_t = \sum_{t=1}^{k(1)} - I_0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (18)$$

a) $Y_{t-1} = mC - I_0$. $(m = 0, 1, 2, \cdots)$이면 $Y_t = x_{t-1} + (0, \varepsilon \text{ or } C)$를 갖는다.

b) $Y_{t-1} = mC + \varepsilon - I_0$. $(m = 0, 1, 2, \cdots)$이면 $Y_t = Y_{t-1} + (0 \text{ or } C)$를 갖는다.

$$Y_t = \sum_{t=k(v-1)+1}^{k(v)} x_t = \sum_{t=k(v-1)+1}^{k(v)} r_t \cdots\cdots\cdots (19)$$

a) $Y_{t-1} = mC$. $(m = 0, 1, 2, \cdots)$이면 $Y_t = Y_{t-1} + (0, \varepsilon \text{ or } C)$를 갖는다.

b) $Y_{t-1} = mC + \varepsilon$. $(m = 0, 1, 2, \cdots)$이면 $Y_t = Y_{t-1} + (0 \text{ or } C)$를 갖는다.

2.5. 동적계획법

$f_{k(v)}$를 0기부터 재생점 $k(v)$까지 발생되는 총 생산비용이라 정의하면 순환방정식은 식 (20)과 같이 나타낼 수 있다.

$$f_0 = 0$$

$$f_{k(v)} = \mathrm{Min}\{d_{k(v-1)+1,k(v)} + f_{k(v-1)}\}$$
$$0 \le k(v-1) < k(v) \le T,$$
$$k(v-1) = 0, 1, 2, \cdots T-1. \quad \cdots (20)$$

여기서 $d_{k(v-1)+1,k(v)}$는 주기 $k(v-1)+1$부터 주기 $k(v)$까지의 계획기간 동안에 최적생산 계획에 따라 생산을 할 때 발생되는 비용이다.

3. 제품구조를 고려한 비용의 수정

본 장에서는 각 단계에서 발생하는 비용들을 Echelon holding cost의 개념을 이용하여, 각 단계에서 수정된 비용을 산출하려는데 이는 Blackburn과 Millen[3]이 개발한 모형을 이용하고자 한다.

3.1. 용어 설명 및 모형 제시

모형을 설정하기 위해 다음과 같이 기호를 정의한다. 먼저 가정으로는 제품의 품절은 발생하지 않으며, 부(父)단계와 자(子)단계의 수요량은 부단계(sub-stage)의 정수배로 결정된다.

D = 기당 평균수요(수요는 알고있고 일정하다)
h_j = j단계에서 기말에 단위당 재고 유지비용
S_j = j단계에서의 생산준비 비용
$P(j)$ = j단계의 직계 부단계
$C(j)$ = j단계의 직계 자단계
n_j = j단계의 주문기간. 단, $n_{p(1)} = 1$
$k_j = n_j / n_{p(j)}$

위의 가정을 가지고 기당 평균 비용을 최소로 하는 각 단계의 주문기간(즉, $n_1, n_2, \cdots, n_M$)을 결정하는 문제로 모형화 하면 다음 식 (21)과 같다.

$$\min \sum_{h=1}^{M} \left(\frac{S_j}{n_j} + \frac{h_j D \ n_j}{2}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots (21)$$

$$\text{s.t. } n_j = k_j,\ n_{p(j)},\ j = 1, \cdots, M \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (22)$$

$$k_j \ge 1, \quad j = 1, \cdots, M \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (23)$$

식 (21), (22), (23)을 설명하기 위해 Fig. 1과 같은 구조를 가진 제품을 생각해 보자.

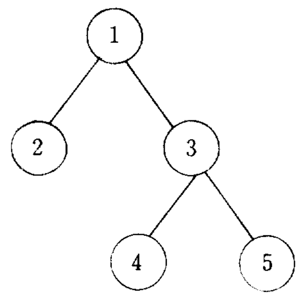

Fig. 1. Structure of the product

위의 예를 M단계를 확장하여 발주비용과 유지비용을 구해보면 다음과 같다.

i) 발주비용은 $\sum_{j=1}^{M} \frac{Sj}{nj}$으로 나타낼 수 있다.

ii) 유지비용 :

그림 2에서 단계 1의 평균유지비용은 $h\frac{D}{2}$로 나타낼 수 있다.

단계 2,3의 평균유지비용은 $(\frac{D}{2} + (\frac{D}{2} + D)) * h_2(h_3)$

단계 4,5의 평균유지비용은 $(\frac{D}{2} + (\frac{D}{2} + D) + (\frac{D}{2} + 2D) + (\frac{D}{2} + 3D)) * h_4(h_5)$로 쓸 수 있다.

이를 M단계로 확장하면

$$\sum_{j=1}^{M}\left(\frac{(D/2)*n_{p(j)}k_j+D((n_{p(j)}k_j-1)+(n_{p(j)}k_j-2)+\cdots+1)}{n_{p(j)}k_j}\right)$$

식 (4)에서 분자항 중

$$(n_{p(j)}k_j-1)+(n_{p(j)}k_j-2)+\cdots+1)$$
$$=\frac{(n_{p(j)}k_j-1)\ n_{p(j)}k_j}{2} \text{ 이므로}$$

평균유지비용은

$$\sum_{j=1}^{M}(D/2)*n_{p(j)}k_j\ h_j=\sum(D/2)\,n_j\ k_j$$

따라서 총 비용을 최소로 하는 식 (21)을 얻을 수 있다.

본 모형의 발주방식은 父단계에서 발주한 양의 정수배가 되도록 3단계에서 발주하게 되는데 단위당 발주시간은 동일하다. 따라서 예를들면 1주에 10개를 발주할 수 있다면 2주에는 20개를 발주할 수 있다. 예를 들어 Table 1과 같이 평균수요가 매기 10이고 각 단계의 발주를 다음과 같이 할 경우를 고려해 보자.

Table I. An Example of Ordering Policy

단계 \ 기	1	2	3	4
수요	10	10	10	10
1	10	10	10	10
2	20	0	20	0
3	20	0	20	0
4	40	0	0	0
5	40	0	0	0

위의 예를 각 단계 별로 발주되어 수요가 되어지는 과정을 Fig. 2로 설명할 수 있다.

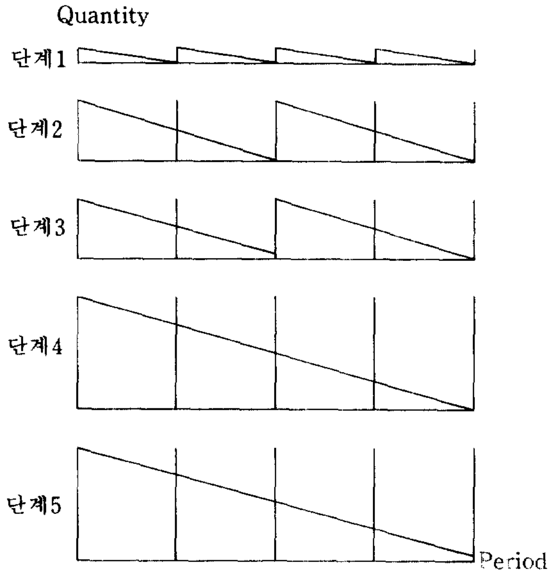

Fig. 2. Schema of ordering patten at each period

Clark과 Scarf[4], Schwarz와 Schrage[10]에 의해 제시된 Echelon holding cost의 개념을 이용하여 주어진 목적식을 바꾸고 각 단계에서의 유지비용을 제품의 구조를 고려한 수정된 준비비용과 유지비용을 산출하고자 한다.

정의에 의하여 j단계의 실제 재고 I_j, Echelon 재고 E_j라 하면,

$$E_j=I_j+E_{p(j)}$$
$$\text{단, } E_{p(1)}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

이때 Echelon 유지비용은

$$e_j=h_j-\sum_{i\ c(j)}h_i \cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

라고 정리할 수 있다.

식 (24), (25)를 이용하여 식 (21)을 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\mathrm{Min}\sum_{j=1}^{M}\left(\frac{S_j}{n_j}+\frac{e_jD(n_j+1)}{2}\right) \cdots\cdots\cdots (26)$$

Schwarz와 Scharge [10]에 다음 식 (27)을 정의하였다.

$$\sum_{j=1}^{M} h_jI_j=\sum_{j=1}^{M} e_jE_j \cdots\cdots\cdots (27)$$

식 (27)에서 식 (21)을 대입하면

$I_j=(D/2)n_j$라 할 수 있다. 또한 $E_{p(j)}$는 Fig. 2에서 알 수 있듯이 매기마다 상위단계를 이동된 평균수량은 $(D/2)$라 할 수 있다.

따라서 이를 식 (24)에 대입하면

$$E=\frac{D}{2}n_j+\frac{D}{2} \cdots\cdots\cdots (28)$$

이고, 식 (28)을 식 (27)에 대입하면

$$\sum_{j=1}^{M} h_jI_j=\sum_{j=1}^{M} e_j\frac{D}{2}(n_j+1) \cdots\cdots\cdots (29)$$

로 정리할 수 있다.

식 (29)를 식 (21)에 대입하면

$$\mathrm{Min}\sum_{j=1}^{M}\left(\frac{S_j}{n_j}+\frac{e_jD(n_j+1)}{2}\right) \cdots\cdots\cdots (30)$$

으로 목적식을 정리할 수 있고 제약식은 식 (22), (23)과 동일하게 쓸 수 있다.

식 (30)은 다음 식 (31)과 같이 정리할 수 있다.

$$\mathrm{Min}\sum_{j=1}^{M}\left(\frac{S_j}{n_{p(j)}k_j}+\frac{e_jDn_{p(j)}k_j}{2}+\frac{e_jD}{2}\right) (31)$$

식 (31)을 k_j에 대해서 미분하여 0으로 하면

$$k_j=\frac{2S_j}{n_{p(j)e_j}D} \quad j=2,3,4,\cdots,M \cdots\cdots\cdots (32)$$

식 (32)를 이용하여 수정된 준비비용과 Echelon유지비용을 구하면

$$\hat{S}_j=S_j+\sum_{i\ c(j)}\frac{\hat{S}_i}{k_i} \cdots\cdots\cdots (33)$$

$$\hat{e}_j=e_j+\sum_{i\ c(j)}\hat{e}_i(k_i+1) \cdots\cdots\cdots (34)$$

식 (34)에 식 (25)를 대입하여 수정된 유지비용을 구하면 다음 식 (35)로 표현할 수 있다.

$$\hat{h}_j=\hat{e}_j+\sum_{i\ c(j)}\hat{h}_i \cdots\cdots\cdots (35)$$

4. 수치예제

최종 완제품의 기당수요는 Table 1.에 주어져 있고, 각 단계별 생산용량 (C_j), 초기재고 (I_{0j}), 생산준비비용(s_j)과 재고 유지비용(h_j)이 Table 2.로 주어졌을 경우 로트의 결정 방법을 살펴보면 다음과 같다.

Table 1. Demand data

주 기	1	2	3	4
수 요	400	200	550	250

위의 주어진 비용을 3장에서 제시된 비용의 수정방법을 통해 식 (33), (34), (35)를 이용하면 Table 2.에 주어진 비용을 Table 3.으로 수정할 수 있다.

Table 2. The data for an example problem

단 계	S_j	h_j	C_j	I_{0j}
1	1800	5	500	100
2	1800	1	500	80
3	3200	3	500	100
4	6400	1	500	60
5	6400	1	500	100

Table 3. The result of cost modification

단계	e_j	k_j	S_j	e_j	h_j
1	1	−	12790	7.10	13.93
2	2	1.	1800	1.00	1
3	1	1.33	12251	3.83	5.83
4	1	1.41	6400	1.00	1
5	1.	1.41	6400	1.00	1

다음은 Florian과 Klein의 방법(방법 1), 초기재고만을 고려한 방법(방법 2)과 초기재고와 제품의 구조가 동시에 고려된 방법(방법 3) 등 3가지 방법을 가지고 로트크기를 각 단계별로 구한 결과가 Table 4.이다.

각 방법별로 총비용을 분석해 보면 본 연구에서 제시한 근사해법이 총비용을 최소로 하는 것을 Table 5.에서 볼 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 단일품목의 생산시스템에 생산용량이 제약되어 있는 경우, 로트크기를 결정하려는 시점에 초기재고가 존재하는 경우에 제품의 구조를 고려한 다단계 로트크기 결정기법을 근사해법으로 푸는 방법을 제시하였다.

2장에서는 초기재고가 존재하는 경우 로트크기를 결정하는 방법으로 꼭지점의 특성을 이용하여 유한한 가능해의 집합을 동적계획법으로 해를 구하는 모형을 제시하였다.

3장에서는 2장에서 고려한 모형이 단단계, 단일품목에 대한 해법이므로 제품구조를 고려한 다단계 모형을 고려하기 위하여 echelon cost의 개념을 이용하여 수정된 준비비용과 재고유지비용을 산출하였다.

4장의 수치예제에서 볼 수 있듯이 초기재고를 무시한 Florian과 Klein의 모형보다 초기재고를 고려하여 단단계의 최적해를 구하는 것이 총 비용을 최소화 시킬 수 있다. 또한, 제품의 다단계 구조를 고려하여 수정된 비용과 2장에서 제시한 초기재고를 고려하는 단단계, 단일제품에 적용하는 알고리듬을 적용하는 것이 총 비용을 감소시키는 것을 알 수 있다.

본 연구에서는 단일품목의 생산시스템에서 수요가 확정된 경우에 대한 로트크기를 결정하는 모형이었으나, 다품목의 생산시스템일 경우와 수요가 확률적으로 변화할 경우에 대한 로트크기 결정기법에 대한 연구가 미래의 필요한 과제라 할 수 있다.

Table 4. The result of lot-size for each stage

단계 1

	1	2	3	4
방법 1	300	250	500	250
방법 2	300	250	500	250
방법 3	300	500	500	0

단계 2

	1	2	3	4
방법 1	220	500	500	0
방법 2	470	0	500	250
방법 3	220	500	500	0

단계 3

1	2	3	4
200	500	500	0
500	0	450	250
200	500	500	0

단계 4

	1	2	3	4
방법 1	140	500	500	0
방법 2	440	0	450	250
방법 3	140	500	500	0

단계 5

1	2	3	4
100	500	500	0
400	0	450	250
100	500	500	0

Table 5. The comparison of total cost for three methods

단계 / 적용기법	1	2	3	4	5	총비용
방법 1	7450	5800	11100	19200	19200	62750
방법 2	7450	5650	10650	19200	19200	62150
방법 3	8150	5400	9600	19200	19200	61550

參 考 文 獻

1. Blackburn, J. D. and Millen, R. A. (1979), "*Selecting a Lot-Sizing Method for a Single-Level Assembly Process : Part-I-Analytical Results*", Production and Inventory Management, No. 3.
2. Blackburn, J. D. and Millen, R. A. (1979), "*Selecting a Lot-Sizing Technique for a Single Level Assembly Process : Part-II-Empirical Results*", Production and Inventory Management, No. 4.
3. Blackburn, J. D. and Millen, R. A. (1982), "*Improved Heuristics for Multi-Stage Requirements Planning Systems*", Management Science, Vol. 28, No. 1.
4. Clark, A. J. o and Scarf, H. (1960), "*Optimal Policies for a Multi-Echelon Inventory Problem*", Management Science, Vol. 6, No. 4.
5. Florian, M. and Klein, M. (1971), "*Deterministic Production Planning with Concave Cost and Capacity Constraints*", Management Science, Vol. 18, No. 1.
6. Love, S. F. (1972), "*A Facilities in Series Inventory Model with Nested Schedules*, Management Science, Vol. 18, No. 5.
7. Manne, A. and Veinott, Jr., A. F. (1967), "*Optimal Arbitrary Incresing Time Paths of Demand*", Chapter 11 in A. S Manne(ed.), Investments for Capacity Expansion : Size, Location and Time Phasing, MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
8. Napier, H. A. and Steinberg, E., "*Computational Comparison of Optimal and Heuristic Lot-Sizing Approaches for the Multi-Level Production Inventory Problem*", Procedings of 1980 National AIDS Conference.
9. New, C. C. (1974), "*Lot-Sizing in Multi-Level Requirements Planning Systems*", Production and Inventory Management, Vol. 15, No. 4.
10. Schwarz, L. G. and Schrage, L. (1975), "*Optimal and System Myoptic Policies for a Multi-Echelon Production Inventory Assembly Systems*", Management Science, Vol. 21, No. 11.
11. Sung, C. S. (1985), "*A Production Planning Model for Multi-Product Facilities*", Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol. 28, No. 4.
12. Sung, C. S. and Chang, S. H. (1986), "*A Capacityb Constrained Single-Facility Multi-Product Production Planning Model*", Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol. 29, No. 3.
13. Wagner, H. M. and Whitin, T. (1958), "*Dynamic Version of the Economic Lot Size Model*", Management Science, Vol. 5, No. 1.
14. Zangwill, W. (1969), "*A Backlogging Model and a Multi-Echelon Model of a Dynamic Lot Size Production System : A Network Approach*", Management Science, Vol. 15, No. 9.