

## 4각 덕트의 입구영역에서 천이 정상유동의 입구길이에 관한 연구

### A Study on Entrance Length of Developing Transitional Steady Flows in a Square Duct

박 길 문\*, 유 영 태\*\*, 고 영 하\*\*\*  
G.M.Park, Y.T.Yoo, Y.H.Koh

#### ABSTRACT

In the present study, the entrance length, velocity profiles and waveforms of developing transitional steady flows in a square duct are investigated analytically and experimentally. The systems of conservation equations for transitional steady duct flows are solved analytically by linearizing non-linear convective terms and adoption of modified eddy viscosity from empirical correlations. Analytical solutions of velocity profiles for developing transitional steady flow were obtained in the form of infinite series. The experimental study for transitional steady flow in a square duct with 40mm x 40mm x 4000mm(width x height x length) was carried out to measure velocity profiles and other parameters by using a hot-wire anemometer with data acquisition and processing system. The entrance length of developing transitional steady flows in a square duct was  $L_e \approx 0.02 \cdot Re_{st} \cdot D_h$ , and the overshoot was occurred at about 30 times of hydraulic diameter because of the effect of external velocity of boundary layer and instantaneous acceleration.

#### NOMENCLATURES

$A_1$	: Velocity amplitude ratio	Re	: Reynolds number
$A_p$	: Stroke(mm)	$t$	: Time(second)
$a$	: Duct half-width(mm)	$t'$	: Dimensionless time( $t' = vt/b^2$ )
$b$	: Duct half-width(mm)	$u, v, w$	: Velocity component in x,y, and z-axis, respectively
$D$	: Pipe diameter(mm)	$u', v', w'$	: Dimensionless velocity component in x,y, and z-axis, respectively
$D_h$	: Hydraulic diameter( $D_h = 4ab / (a+b)$ ) (mm)	$x, y, z$	: Cartesian coordinates of test section
$L_e$	: Entrance length(mm)	$x'$	: $v/ab \cdot um \cdot x$

\* 조선대학교 기계공학과

\*\* 조선대학교 대학원

\*\*\* 조선대학교 대학원

$y'$	: $y/a$
$z'$	: $z/b$
$z_o$	: Distance from duct wall

### Subscripts, Superscripts and Orders

$cr$	: Critical Value
$cl$	: Value of duct center-line
$e$	: Value of developing flow
$fd$	: Value of fully developed flow
$I$	: Fundamental wave in finite Fourier series
$\ell$	: Laminar flow
$m$	: Mean value
$max$	: Maximum value
$\alpha$	: Orifice discharges coefficient
$\sim$	: Fluctuating value
$-$	: Short time averaged value

### Greeks

$\eta^*$	: $(b-z)u^*/\nu$
$\epsilon$	: Eddy viscosity
$\lambda$	: Friction factor
$\mu$	: Dynamic viscosity
$\nu$	: Kinematic viscosity
$\nu_z$	: Modified eddy viscosity
$\rho$	: Density
$\tau$	: Shear stress
$\omega$	: Angular frequency of oscillation
$\omega^*$	: Dimensionless angular frequency ( $\omega' = b^2 \omega/\nu$ )
$\omega^+$	: Dimensionless angular frequency ( $\omega^+ = b\sqrt{\omega/\nu}$ )

## 1. 서 론

덕트내의 입구영역에서 유동특성과 입구길이는 유체공학의 응용분야에 있어서 많이 활용되고, 덕트 설계에서 중요한 자료가 될 뿐만 아니라, 산업현장에서 유체기계의 대형화, 고성능화, 안정성 및 경제성에 커다란 영향을 미친다. 덕트 입구의 유동특성에 대한 기존 연구들을 살펴보면, Han<sup>1)</sup>은 속도분포에 대한

수치적인 계산을 수행하여 입구길이와 압력분포를 연구하였고, McComas<sup>2)</sup>는 원관, 타원형, 환상, 4각, 3각 덕트에 적용시킬 수 있는 입구 길이를 속도분포로부터 결정하였으며, Miller<sup>3)</sup>는 다양한 종횡비를 갖는 4각덕트와 이등변삼각형에서 압력강하 및 속도분포를 이론적으로 연구하였다. 이들 연구결과들을 정리하여보면, 주로 평판, 원관과 4각덕트의 완전발달된 유동영역에서 정상유동에 대한 유동특성이 연구되었으며, 덕트시스템의 최적설계에 필수적인 자료가 될 정4각 단면덕트의 입구영역에서 천이유동에 대한 속도분포와 입구길이 등의 유동특성에 대한 연구는 많이 이루어지지 않은 것으로 사료된다.

본 연구에서는 정4각단면 덕트내의 입구영역에서 천이 정상유동을 분류하여 속도파형, 속도분포와 입구길이 등의 유동특성을 규명하기 위하여 이론 및 실험적인 연구를 하였다. 그리고, 이론적인 해석방법으로는 정4각 단면 덕트내의 천이 정상유동 영역에 대한 운동량방정식을 정리한 후에 운동량방정식에서 비선형인 대류항을 선형화 시켜서 속도분포식의 해를 이론적으로 구하였고, 실험적인 방법으로는 시험 덕트의 입구영역에서 속도파형과 속도분포를 열선풍속계로 측정하여 유동해석 및 입구길이를 결정하였다. 또한 천이 정상유동에 대하여 정4각 단면덕트 입구영역의 축방향 위치와 덕트의 횡방향 위치에서 레이놀즈수를 변화시켜 가면서 속도파형을 고찰하여 천이정상유동상태를 고찰하고, 덕트입구영역의 축방향 위치에서 속도분포를 이론해와 측정한 실험결과를 비교하여 정확성을 검토한 후 입구길이에 대한 실험식을 얻었다.

## 2. 이론해석

### 2.1 지배방정식

정4각 단면덕트내의 입구유동영역에서 Fig. 1과 같이 직교 좌표계(Coordinate System)를 설정하여  $x$ ,  $y$ ,  $z$ 축 방향의 속도성분을  $u$ ,  $v$ ,  $w$ 라 하였다. 본 실험에 사용한 작동유체는 비압축성 유체이고, 점성계수는 일정하다고 가

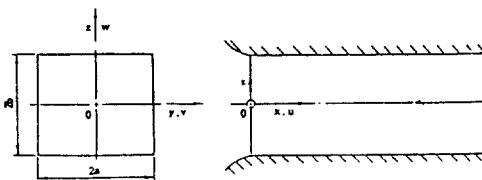


Fig.1 Cartesian Coordinates System and Velocity Components

정하였다. 덕트의 입구영역에서 천이 정상유동은 총류유동과 난류유동성분이 공존하지만, 총류운동과 난류운동의 과동성분을 분리하여 먼저 총류운동의 운동량방정식과 연속방정식을 정리한 후에 난류운동의 과동성분을 고려하였다.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{F_x}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} +$$

$$\nu \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{F_y}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} +$$

$$\nu \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right\} \quad (3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{F_z}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} +$$

$$\nu \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right\} \quad (4)$$

(2), (3), (4)식에서 물체력( $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$ )은 무시하고,  $y$ 축과  $z$ 축에 대한 속도성분이  $x$ 축 속도성분에 비하여 대단히 작기 때문에,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ 또는 } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

조건을 적용하여 (2)식을 다시 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} +$$

$$\nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (5)$$

여기서, (5)식을 Von karmon의 적분법으로 선형화시키고,  $u^2 = u_m \cdot u$ 라고 가정하여 정리하면 다음과 같다.

$$\int_A \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) dA = \int_A \left\{ u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(uw)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} - u \frac{\partial v}{\partial y} - u \frac{\partial w}{\partial z} \right\} dA \quad (6)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = u_m \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad (7)$$

그러므로, (7)식을 (5)식에 대입하여 정리하면 선형화된 운동량방정식이 얻어진다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_m \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (8)$$

정상유동에서는  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ 이고, 천이정상유동은 총류유동과 난류유동이 공존하므로 난류유동의 과동성분을 고려하여 선형화시킨 운동량 방정식을 다시 정리하면 선형화된 천이정상유동의 운동량방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u_{m, st} \cdot \frac{\partial u_{st}}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial y} - \bar{u}' v' \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial z} - \bar{u}' w' \right) \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (\nu_l + \nu_t) \frac{\partial u}{\partial y} \right\} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (\nu_l + \nu_t) \frac{\partial u}{\partial z} \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

여기에서,  $\nu_l + \nu_t = \nu_d$ 는 천이정상유동의 수정와점성계수이다.

## 2.2 속도분포식과 전단응력분포식

정4각 단면덕트의 입구영역에서 총류정상유동에 대한 속도분포식은 Park<sup>4)</sup>이 제시한식을 본 연구에 적용하였다.

$$\begin{aligned} \frac{u_{st}}{u_{m, st}} &= \text{EXP}(\alpha_i^2 x') \times \\ &\left[ \frac{\pi^6}{128} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i^4} \left( 1 - \frac{\cos \alpha_i z}{\cos \alpha_i} \right) + \frac{\pi^3}{8} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \right. \\ &\left. \left( \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 \lambda_i^2} \left\{ \frac{3}{2} \frac{\tanh(\pi \sqrt{\lambda_i} y'/2)}{(\pi \sqrt{\lambda_i} y'/2)} \right\} \right. \right. \\ &\left. \left. \left. \frac{\{(-1)n\} \{ \cos h(\pi \sqrt{\lambda_i} y'/2) \}}{|\alpha_i^2(2n+1)\lambda_i|} \{ \cos h(\pi \sqrt{\lambda_i} /2) \} \cos \beta_n z' \right\} \right] \\ &\left. - 1 - \frac{1}{2} \sec h^2 \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\lambda_i} \right) \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

여기에서, 경제조건은  $y' = \pm 1$ ,  $z' = \pm 1$  일

때  $u' = 0$ 이며, Park은 층류 정상유동에서 입구의 영향을 받는 길이를  $Le = 0.08 Re$ ,  $st \cdot D_h$ 로 제시하였다. 덱트입구영역에서 경계층의 발달로 인하여 균일유동과 경계층에서 발생한 난류성질이 존재하며, 경계층 천이유동 영역에서 난류성분 빙도수를 나타내는 간헐율을 이용하여, 간헐율이 1이면 완전히 발달된 난류유동, 간헐율이 0이면 층류유동영역으로 규정하였다.<sup>6)</sup>

$$\gamma = \left\{ 1 + 5.5(z/\delta)^6 \right\}^{-1} \quad (11)$$

여기에서 입구의 영향을 받아 경계층이 발달하여 축방향 속도성분의 변화가 거의 없는 지역까지의 거리를 입구영역(Entrance Region)이라 규정하고, 이 완전 발달된 유동영역에서 중심속도를  $u_{max}$ 라 할 때, 경계층의 두께와의 관계를 실험으로부터 구하면 다음과 같다.<sup>6)</sup>

$$\frac{u_{m, st}}{u_{max}} = \frac{k}{\delta} \left( 2 - \frac{k}{\delta} \right) \quad (12)$$

여기에서,  $k = b - z$ 이다. 그리고, 이들  $\frac{u_m}{u_{max}}$ 과 레이놀즈수와의 관계를 Fig. 2에 나타내었다.

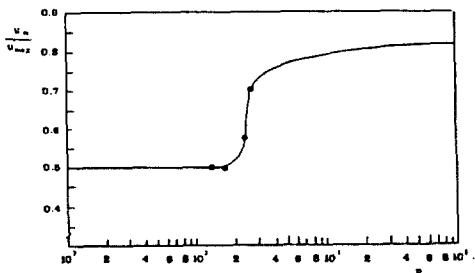


Fig. 2 The Relation of Velocity Distribution and Reynolds Number

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (13)$$

천이정상유동영역에서 벽면전단응력을 얻기 위하여 경계조건을  $z_0 = 0$ 에서  $u = 0$ ,  $w = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\tau_w}{\mu}$ 로 하고,  $z_0 = \delta$ 에서  $u = u_0$ ,  $w = W_b$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z_0} = 0$ 라 해서  $z_0$ 에 대하여 적분하고 정리하면 다음과 같다.

$$W_b = - \int_0^\delta u \frac{\partial u}{\partial x} dz_0 \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} \int_0^\delta u^2 dz_0 + u_0 W_b - \int_0^\delta u \frac{\partial w}{\partial z_0} dz_0 = \\ -\frac{\delta}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\tau_w}{\rho} \end{aligned} \quad (15)$$

결국,  $z_0 = \delta$ 에서  $u = u_0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial z} \right\} = 0$ 이므로, 경계층방정식 (13)은 다음과 같이 정리된다.

$$u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (16)$$

(14)식과 (16)식을 (15)식에 대입하고,  $u_0$ 는  $x$ 만의 함수이며  $\delta u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} \int_0^\delta u dz_0$ 임을 감안하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\tau_w}{\rho} &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u (u_0 - u) dz_0 + \frac{du_0}{dx} \int_0^\delta u (u_0 - u) dz_0 \\ &= \frac{\partial}{\partial x} u^2 \int_0^\delta \left\{ \frac{u}{u_0} \right\} \left\{ \frac{u_0 - u}{u_0} \right\} dz_0 + \frac{du_0}{dx} \\ &\quad \int_0^\delta \left\{ \frac{u_0 - u}{u_0} \right\} dz_0 \end{aligned} \quad (17)$$

균일유동일 경우에  $u_0$ 는 일정하므로  $\frac{du_0}{dx} = 0$ 이고, 벽면 전단응력( $\tau_w$ )은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\tau_w}{\rho} &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u (u_0 - u) dz_0 = u_0^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \frac{u}{u_0} dz_0 \\ &\quad \left\{ 1 - \frac{u}{u_0} \right\} dz_0 \end{aligned} \quad (18)$$

벽면 전단응력( $\tau_w$ )을 이용한 경계층에서의 마찰속도는 다음과 같다.

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (19)$$

또한, 대수속도분포를 이용하여 경계층에서 천이정상유동의 마찰속도분포를 정리하면 다음과 같다.<sup>7)</sup>

$$\frac{u^*}{u} = \frac{1}{(u^* z / \nu)^2} + \frac{0.03}{\log 10^2 (9.05 u^* z / \nu)} \quad (20)$$

유체유동이 하류방향으로 진행함에 따라 벽면에서 마찰로 인하여 경계층이 발달하는데, 천이유동영역에서 난류성분이 나타나면 점성

계수를 수정와점성계수로 변화시켜야 한다. 수정와점성계수는 층류에서처럼 유체의 성질에 따라 결정되는 것이 아니라, 천이유동속도에 따라 결정되는 수이다. 이것을 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\nu_{\Sigma} = \frac{\mu_l}{\rho} + \frac{\mu_t}{\rho} = \frac{1}{\rho}(\mu_l + \mu_t) = \frac{1}{\rho} \mu_{\Sigma} \quad \dots \quad (21)$$

여기서, 수정와점성계수는 유체의 밀도,  $\rho$ 에 운동량학산계수,  $\epsilon_m$ 을 곱한 것으로 다시 정리하면 다음과 같다.<sup>8)</sup>

$$\nu_{\Sigma} = \rho \varepsilon_m = \mu \frac{k}{b} \left\{ z^+ - z_1^+ \tanh h \frac{z^+}{z_1^+} \right\}$$

$$\left\{ 1 - \frac{z}{b} \right\} \left\{ 1 + 2 \left( \frac{z}{b} \right)^2 \right\} \dots \quad (22)$$

### 3. 실험

정 4 각 단면 덕트 입구영역에서 천이 정상유동에 대한 실험을 수행하기 위한 실험장치의 개략도를 Fig. 3에 도시하였다.

본 실험에 사용된 시험덕트는 종횡비(Aspect Ratio)가 1이고, 매끄러운 아크릴로 제작되었으며, 덕트길이(L)는 4,000 mm이고, 관횡단면( $2a \times 2b$ )은  $40 \times 40$  mm인 정4각 단면 덕트이다. 작동유체는 공기를 사용했고, 덕트 입구에는 매끄러운 유입관(Bell Mouth)을 설치하여 공기의 유입을 원활히 하여 균일 유동이 이루어지도록 하였다.

유량조절을 하기 위하여 유량제어밸브(Control Valve)를 설치하였고, 유체유동을 일정하게 하기 위하여 서어지 탱크를 송풍기 앞에 부착하였다.

그리고, 시험덕트는 Fig. 4에 나타낸 것처럼 열선의 센서를 삽입하기 위하여 5.4 mm 구멍을  $y' = 0$ 에서 횡 방향을 따라 덕트 윗면에 200 mm 간격으로 만들었고, 대칭성을 조사하기 위하여  $x/D_h = 10, 35, 60, 85$ 의 지점에서  $y' = 0.5$ 의 위치에 센서가 들어갈 수 있는 구멍을 만들었다.

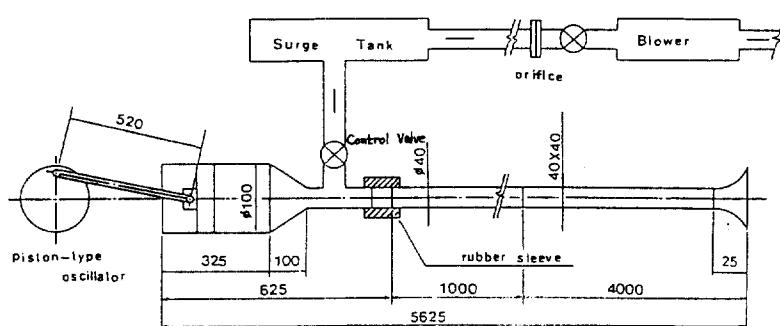


Fig.3 Schematic Diagram of Experimental Apparatus

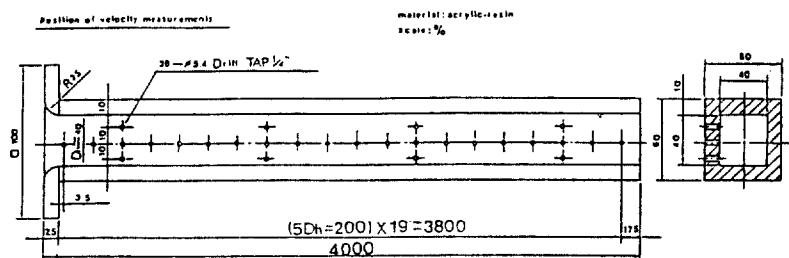


Fig.4 Position of Velocity Measurement

Table 1. Experimental Conditions

RUN	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6	1-7	1-8	1-9	1-10
$x/D_h$	5	10	20	25	30	35	40	45	60	80
Re, st	1,500 1,800 2,400 2,700									

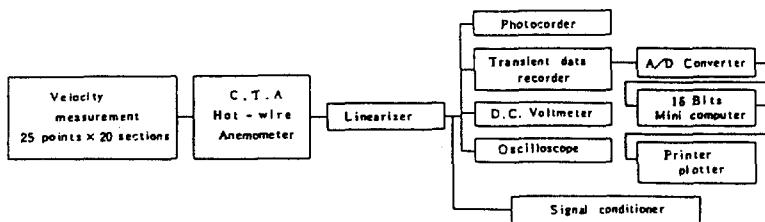


Fig.5 Diagram of Data Acquisition and Processing System

본 실험의 실험조건은 위의 Table 1과 같고, 천이정상유동의 발달과정으로부터 입구길이를 결정하기 위하여, 레이놀즈수와 무차원축방향위치( $x/D_h$ )를 변화시켜가면서 실험하였다.

실험자료 처리과정으로는 속도측정에서 열선으로부터 얻은 신호를 정온 열선유속계의 선형기(Linearizer), 신호안정기(Signal Conditioner)를 거쳐서 오실로그래프에 기록하여 속도를 측정하였고, 또한 이 실험자료들의 신호는 자료기록기(Data Recorder) 및 A/D변환기를 통하여 컴퓨터에서 처리한 다음 프린터에서 출력하도록 하였고, 이를 자료처리 시스템을 Fig.5에 도시하였다.

#### 4. 결과 및 고찰

##### 4.1 속도파형

본 연구에서는 천이 유동영역을 규정하기 위하여 레이놀즈수와 무차원 축방향위치( $x/D_h$ )를 변화시켜가면서 천이 정상유동에서 난류정상유동 상태를 얻은 Choi<sup>10</sup>의 실험결과와 비교해가면서 실험의 정확성을 확인하였

고, Table 1의 실험조건 아래에서 실험하여 얻은 속도파형을 Fig.6-(a), (b), (c), (d)에 도시하였다.

이들 속도파형을 고찰해 보면, 덕트축 중심에서 벽쪽으로 갈수록 천이유동상태가 발달하고 있으며, 벽 부근( $z'=0.95$ )에서 유동이 무차원 축방향 위치( $x/D_h$ )가 증가하는 방향으로 진행됨에 따라 유동상태가 벽마찰로 인하여 난류성분이 발생하였다가  $x/D_h = 30$ 부근에서부터 점성의 영향이 관성력보다 크기 때문에 다시 총류저층이 나타남을 알 수 있다.

##### 4.2 축방향 속도분포

레이놀즈수가 1,800, 2,400 및 2,700인 천이 정상유동영역에서 무차원 축방향 위치( $x/D_h$ )를 변화시켜가면서 덕트 횡방향( $z'$ )에 따른 속도분포를 Fig.7~9에 도시하였다.

이들 결과를 고찰하여 보면, 덕트입구의 경계층 영향으로 Potential 유동영역이 무차원 축방향거리( $x/D_h$ )가 증가할수록 적어지며, 레이놀즈수가 증가할수록 벽 부근의 속도가 증가하여 총류속도 분포형인 포물선 형태로부터 난류속도분포형인 1/7승 법칙의 속도분포

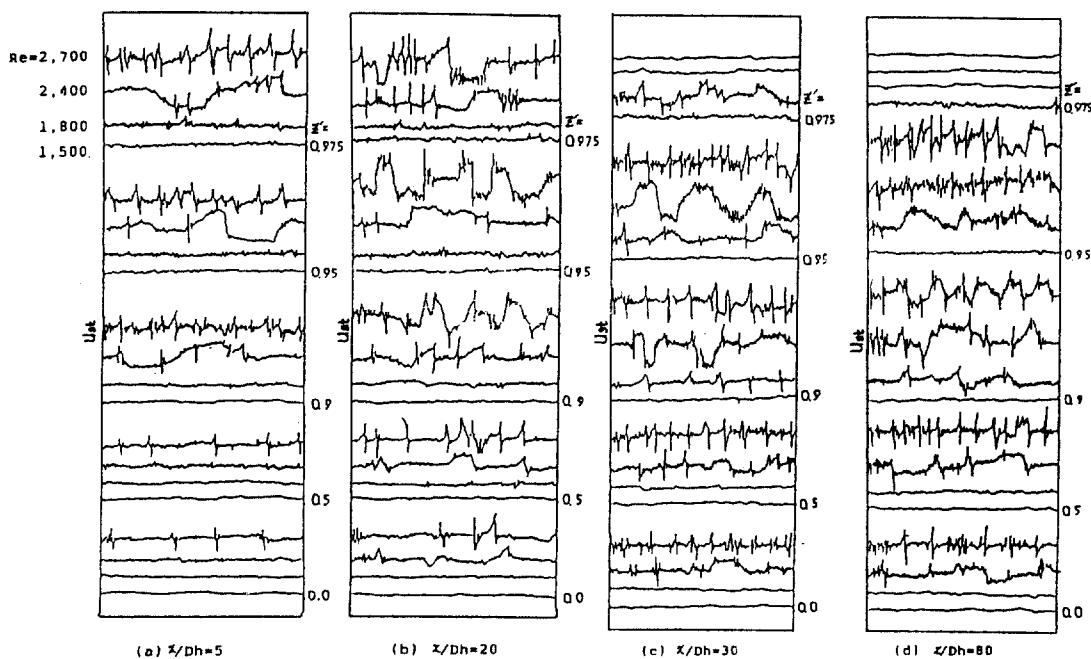
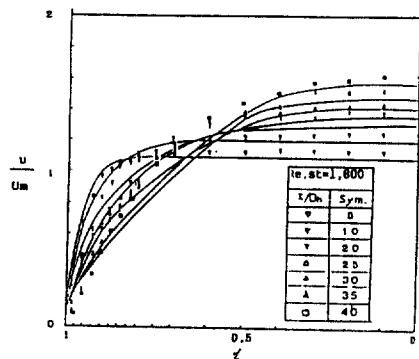
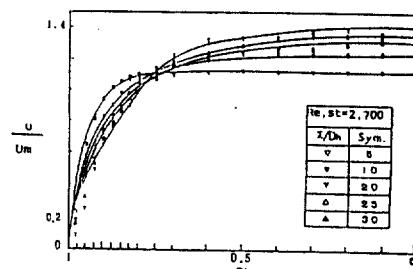
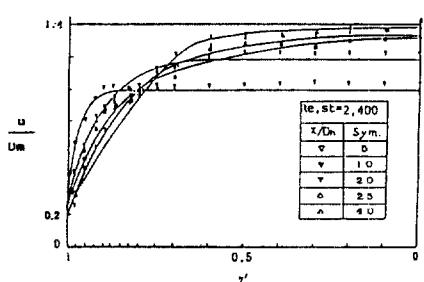


Fig. 6 The Waveforms under the Conditions of Table 1.

Fig. 7 The Velocity Distribution of Transitional Steady Flow ( $Re=1,800$ )Fig. 9 The Velocity Distribution of Transitional Steady Flow ( $Re=2,700$ )Fig. 8 The Velocity Distribution of Transitional Steady Flow ( $Re=2,400$ )

에 접근하여 횡단면 속도분포에서 벽 부근의 속도가 레이놀즈수의 증가에 따라 상승됨을 알 수 있다.

그리고, 입구의 영향을 받지 않고 덕트 축 방향의 위치에서 속도분포가 변하지 않고 일정한 속도분포를 형성하게 되는 유동영역까지를 입구유동영역이라 고찰할 수 있고, 완전 발달된 천이 정상유동의 속도분포형태는 층류 정상유동의 속도분포형인 포물선형태와 난류정상유동의 속도분포형인 1/7승 법칙 중간형태를 이루고 있음을 알 수 있다.

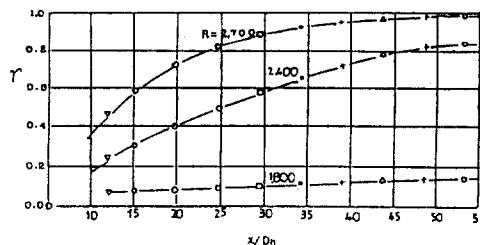


Fig.10 The Relation of Intermittency and Reynolds Number in Transitional Steady Flow

Fig. 10에는 레이놀즈수를 변화시켜 가면서 덕트 축방향의 위치( $x/D_h$ )에 따른 간헐율(Intermittency Factor)과의 관계를 도시하였다. 이 결과를 고찰하여 보면, 유동이 하류로 진행함에 따라 간헐율이 증가하고, 유동속도변화와 레이놀즈수와의 관계를 J. Rotta의 실험결과와 비교하면 완전히 발달된 난류영역에서는 간헐율( $\gamma$ )이 1이고, 간헐율이 0일때를 층류유동영역이라 할 수 있는데, 간헐율은 덕트 입구로부터 무차원 축방향의 위치( $x/D_h$ )가 증가하면 할수록, 레이놀즈수가 증가하면 할수록 상승하는 현상을 고찰할 수 있다.

덕트 유동평균속도와 관마찰 계수와의 관계를 Fig. 11에 도시하여 고찰하여 보면, 레이놀즈수가 증가함에 따라 관마찰계수가 감소하다가 레이놀즈수가 약 2,300 부근에서 층류 점성계수와 난류파동성분의 점성계수를 합한 와점성계수만큼 상승하는데, 이 부분이 천이유동영역이고, 이 천이유동영역을 벗어나면 다시 레이놀즈수가 증가함에 따라 관마찰계수가

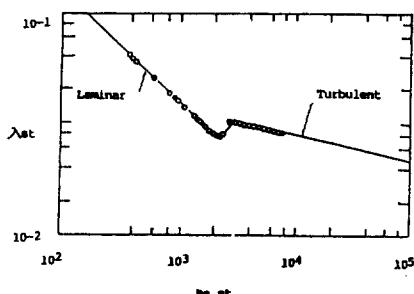


Fig.11 The Relation of Mean Velocity and Friction Factor in Transition Steady Flow

감소하는데, 이 부분은 난류유동영역이라 규정하였다.

#### 4.3 경계층에서 속도분포

경계층 배재두께를  $\delta_1 = 1.7208\sqrt{vx/u_{cl}}$  라 하고, 운동량두께  $\delta_2 = 1.644\sqrt{vx/u_{cl}}$ 로 계산하여 형상계수  $H = \frac{\delta_1}{\delta_2}$ 이라 할 때 천이 과정에서 형상계수가 층류 영역에서는 약 2.6이었는데, 난류 영역에서는 1.4로 급속하게 감소하는 현상을 Fig. 12에 도시하였고, 경계층내에서 경계층속도와 마찰속도분포를 Nikuradse가 실험한 결과와 비교한 Fig. 13을 고찰하여 보면 ③은 층류저층두께,  $\delta_1 (= 5v/u^*)$ 로부터 난류경계층까지의 천이를 나타내고, ①은  $u^* = z \cdot u^*/v$ 로 표시되는 층류유동에 해당된다. ②는 난류유동의 이론식인데, 경계층내에서 마찰속도와 경계층속도비는 경계층 레이놀즈수가 증가할수록 증가함을 알 수 있다. 난류발생은 벽으로부터 무차원거리인  $z^* (= z \cdot u^*/v)$  값이 5~70 부근에서 발생하며, ③의 영역은 난류 점성저층으로부터 Core Region까지의 천이 유동영역으로 마찰속도  $u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ 의 계산값이다.

#### 4.4 입구길이

덕트 입구로부터 균일한 속도분포가 유입되어 축방향으로 유체유동이 진행함에 따라 균

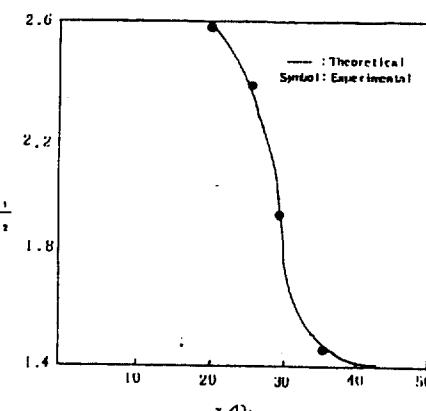


Fig.12 Change in the Shape Factor of the Boundary Layer at  $Re_{st} = 2,700$

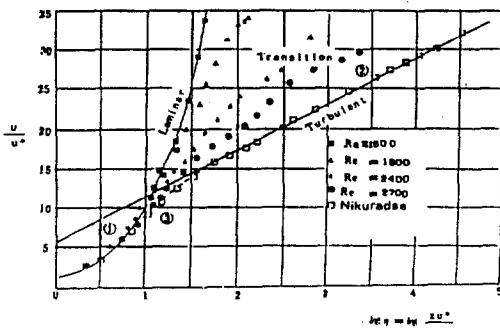


Fig.13 Fully Developed Velocity Profiles in the Boundary Layer in  $x/D_h$

일하게 유입된 유체가 입구의 영향과 벽면으로부터 마찰저항으로 인하여 덕트입구의 벽면을 따라 덕트 중심 축방향으로 경계층이 발달하여 덕트의 중심까지 완전히 발달한 범위를 입구영역(Entrance Region)으로 규정하고, 덕트 입구에서 완전 발달된 유동이 이루어지는 곳까지의 거리를 입구길이(Entrance Length)로 정하였다. 입구에서부터 형성된 경계층 내에서는 벽면에 가까운 유체의 유동속도는 벽면의 마찰저항으로 인하여 느려지고, 덕트 중심에 가까운 유체의 유동속도는 빨라지게 되어 속도구배(Velocity Gradient)가 생기면서 난류유동이 발생하여 점점 확대 형성되어 가면서 유체유동이 난류로 천이되어 간다. 입구길이는 덕트 중심의 축방향 속도분포가 99%까지 거의 변화되지 않는 위치까지의 거리와 경계층이 완전 발달된 지점까지의 거리를 입구길이로 결정하였다.

덕트의 축방향 중심속도 변화가 거의 없는 위치, 즉 경계층의 두께가 덕트 중심의 위치까지 완전히 발달된 천이 정상유동에 대한 정4각 단면덕트에서 천이 정상유동의 무차원 입구길이는 수력직경( $D_h$ )과 레이놀즈수( $Re_{st}$ )와의 함수관계로 주어지고, 이들의 결과를 Fig.14에 나타냈는데, 입구길이는  $\frac{Le/D_h}{Re_{st}} = 0.02$ 이었다. 이것은 경계층의 발달로 인하여 바깥쪽의 순간적인 가속도의 영향을 받아 *Overshoot*가 발생하고 난 뒤의 축방향 속도분포가 거의 일정해지는 위치와 일치하고 있다. 이 실험결과의 정확성을 검토하기 위하여

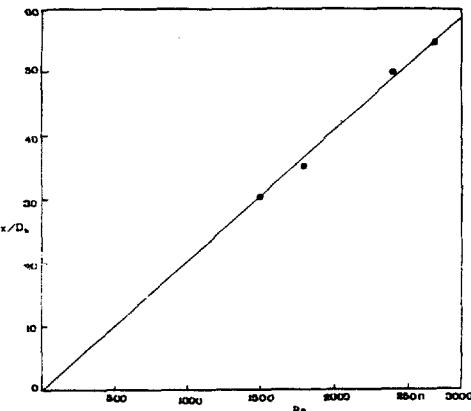


Fig.14 Curve Fitting of Entrance Length for Transitional Steady Duct Flow

Sparrow<sup>2)</sup>의 실험적인  $Le/D_h = 0.027 Re_{st}$ 와 비교하여 볼 때 거의 일치하고 있음을 알 수 있다.

## 5. 결 론

정4각 단면덕트내의 입구영역에서 천이 정상유동에 대한 속도분포와 입구길이 등의 유동특성에 대한 이론 및 실험적인 고찰로부터 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 정상유동에서는 덕트 축 중심에서 벽부근으로 갈수록 천이 유동상태의 속도파형이 발달하고 벽부근( $z' = 0.95$ )에서 유동이 축방향으로 진행함에 따라 벽마찰로 인하여 난류성분이 발생하다가 점성의 영향이 관성력보다 커지는 무차원 축방향 위치( $x/D_h$ )가 30인 지점에서 다시 층류 저층이 발생한다.

(2) 정상유동영역에서는 입구로부터 균일한 속도로 유동하는 축방향의 속도분포가 점성의 영향을 받는 영역과 비점성영역인 Potential 유동영역으로 존재하는데, 입구에서 점성의 영향으로 인한 벽면의 속도는 중심속도에 비하여 빠르게 감소되었으나, 축방향으로 진행함에 따라 벽면의 속도가 증가하였고, 천이 정상유동의 속도분포는 층류정상유동의 속도분포형인 포물선형태와 난류정상유동의 속도분포형인 1/7승 법칙 속도분포의 중간형태를 이룬다.

(3) 천이 정상유동의 경계층내에서 마찰속도와 경계층속도비는 경계층 레이놀즈수가 증가할수록 증가한다.

(4) 덕트 입구영역에서 천이 정상유동의 무차원 입구길이는 수력직경과 레이놀즈 수와의 함수관계로 주어지고, 입구길이에 대한 실험식은  $\frac{Le}{D_h} = 0.02 Re_{st}$  이었다.

### 참 고 문 헌

1. Han, L.S. and Cooper, A.L.: "Approximate solution of two internal flow problems solution by an integral method," Proc. U.S. Natl Congr. Appl. Mech., 4th Vol.2: 1269-1278, 1962.
2. McComas, S.T.: "Hydrodynamic entrance lengths for ducts of arbitrary cross section," J. Basic Eng., Vol.89: 847-850, 1967.
3. Miller, R.W. and Han, L.S.: "Pressure losses for laminar flow in the entrance region of ducts of rectangular and equilateral triangular cross section," J. Appl. Mech., Vol.38: 1087, 1971.
4. Park, G.M.: "Flow characteristics of developing laminar unsteady flow in a square duct," Ph.D. thesis Korea Univ., 1987.
5. Schlichting, H.: "Boundary-layer theory," Tower Press, 1978.
6. Ward-Smith: "Internal fluid flow," Clarendon Press, 1980.
7. 技術資料：“管路ダクトの流體抵抗”日本機械學會, 昭和 53 年。
8. Wilson, N.W. and Azad, R.S.: "A continuous prediction method for fully developed laminar, transitional, and turbulent flows in pipes," Journal of Applied Mechanics, Vol.5, pp.51-54, 1975.
9. Choi, J.H.: "A Study on Flow Characteristics of Transitional Unsteady Flow in a Square Duct," Ph.D. thesis Chosun Univ., 1988.