

순수한 찬물속에 잠겨있는 경사진 등온벽면 부근의 자연대류에 관한 수동력학적 안정성

The Hydrodynamic Stability of Natural Convection Flows Adjacent to an
Inclined Isothermal Surface Submerged in Cold, Pure Water

황 영 규*, 장 명 륜**
Y. K. Hwang, M. R. Jang

ABSTRACT

Hydrodynamic stability equations are formulated for natural convection flows adjacent to a heated or cooled, inclined, isothermal surface in pure water at 4°C, where the density variation with temperature becomes nonlinear.

The resulting stability equations, when reduced to ordinary differential equations by a similarity transformation, constitute a two-point boundary-value problem, which was solved numerically.

It is found from the obtained stability results that the neutral stability curves are systematically shifted to have lower critical Grashof numbers, as the inclination angle of upward-facing plate increases. Also, the nose of the neutral stability curve becomes blunter as the angle increases. It implies that the greater the inclination of the upward-facing plate, the more susceptible of the flow to instability for the wide range of disturbance wave number and frequency.

Key Words : Density Extremum Parameter
(최대밀도변수),
Wave Instability(파형 불안정성),
Hydrodynamic stability
(수동력학적 안정성),
Parallel flow(평행유동),
Neutral Stability Curve
(중립안정곡선)

기 호 설 명

C : 무차원화한 wave 속도, $C = \beta/\alpha$

C_p : 정압비열
 D : 특성 경계층 두께
 $f(\eta)$: 일반화한 유동함수
 \bar{f} : 주파수
 g : 중력가속도
 G : 수정한 Grashof 수, $4(\text{Gr}(x)/4)^{1/4}$
 G^* : 임계 Grashof 수
 $\text{Gr}(x)$: Grashof 수, $g x^3 \alpha_T |T_0 - T_\infty|^q / \nu^2$
 $H(\eta)$: 무차원화한 압력교란 증폭함수
 $\bar{H}(y)$: 차원있는 압력교란 증폭함수
 k : 열전도계수
 M : 고유벡터성분에 있어서 가장 큰 절대값

* 정회원, 성균관대학교 기계설계학과

** 성균관대학교 대학원 기계공학과

P : 수동력학적 압력 (hydrodynamic pressure)
 \bar{P} : P 에 해당하는 교란함수
 Pr : Prandtl 수
 q : Gebhart와 Mollendorf¹¹⁾의 밀도관계식에서 사용되는 온도항의 염도와 압력 관련 지수
 R : 최대밀도변수, $(T_m - T_\infty)/(T_0 - T_\infty)$
 $S(\eta)$: 무차원화한 온도교란 증폭함수
 $\bar{S}(y)$: 차원있는 온도교란 증폭함수
 t : 시간
 T : 온도
 U : x 방향 속도성분
 \tilde{U} : u 에 해당하는 교란양
 \bar{U} : 특성 경계층 속도
 V : y 방향 속도성분
 \tilde{V} : v 에 해당하는 교란양
 x, y : 좌표 축
 Z_0 : 안정성방정식에서 부력교란 계수

$$\delta q |\theta_b - R|^{q-1} (\theta_b - R) / |\theta_b - R|$$
 <그라이스문자>
 α : 무차원화한 교란 복소 wave 수,
 $\alpha = \bar{\alpha}(4x/G)$
 $\bar{\alpha}$: 교란 복소 wave 수, $\bar{\alpha}_R = 2\pi/\lambda$
 α_T : Gebhart와 Mollendorf¹¹⁾의 밀도관계식에서 사용되는 온도항의 계수
 β : 무차원화한 교란 주파수,
 $\beta = \bar{\beta}((16x^2)/(\nu G^3))$
 $\bar{\beta}$: 교란 주파수, $\bar{\beta} = 2\pi f$
 γ : 수직으로부터 기울어진 각도
 δ : 유동방향에 대한 상수, $\delta = +1$: 상향유동
 $\delta = -1$: 하향유동
 η : 무차원화한 상사변수, $Gy/4x$
 η_∞ : 무한대에 대한 가정치
 θ : 무차원화하여 정규화한 온도,
 $(T - T_\infty)/(T_0 - T_\infty)$
 λ : 파장
 ν : 동점성계수
 ρ : 밀도
 $\phi(\eta)$: 무차원화한 속도교란 증폭함수
 $\bar{\phi}(y)$: 차원있는 속도교란 증폭함수
 ψ : 유동함수

$\tilde{\psi}$: 교란 유동함수
 <하 첨 자>
 b : 기본유동 성질에 대한
 I : 허수부에 대한
 m : 물의 최대밀도점에 대한
 o : 등온표면 조건에 대한
 R : 실수부에 대한
 ∞ : 경계층 바깥영역에 대한

1. 서 론

본 연구는 4°C의 순수한 물속에 잠겨있는 가열, 또는 냉각된 경사진 등온벽면 주위 형성되는 층류 자연대류를 기본유동(base flow)으로 하고, 선형 안정성 방정식을 유도하였으며, 두점 경계값 문제(two-point boundary-value problem)로써 중립안정 계산결과를 구하여 수동력학적 안정성(Hydrodynamic Stability)을 해석하였다. 이때 유동은 밀도와 온도의 관계가 비선형적이다. 안정성 문제에서는 파형 불안정성(wave instability)으로써 다루었다. 이러한 연구는 저장, 냉동, 환경통제 등 제반 산업기술에 필수적인 기초 연구이다.

순수한 찬물속에 수직 또는 경사진 등온벽면이 잠겨 있을 경우 온도경계층내에 최대밀도온도 T_m 이 존재하므로 유동은 어느 한 국소 영역에서는 상향, 다른 영역에서는 하향인 두방향의 부력이 발생한다. 이러한 비정상적인 유동현상¹⁻³⁾에서 속도, 온도, 압력의 작은 교란이 시간, 또는 공간에 따라 증폭되어 난류로 천이될 것인가, 아니면 감소하여 안정한 상태로 될 것인가 하는 수동력학적 안정성 문제는 자연대류 현상에 있어서 중요한 연구대상 이 되었다.

경사진 벽면의 파형 안정성에 관한 연구로써 온도와 밀도의 관계가 선형적인 Boussinesq 제2가정이 적용되는 경우에 한하여, Lloyd와 Sparrow⁴⁾는 물속에 잠겨있는 가열된 평판에 대하여 경사각이 미소한 범위내에서 연구하였고, Haaland와 Sparrow⁵⁾는 Prandtl수가 6.7일때와 0.773일때 중립안정곡선을 구하였는데, 그들은 법선(normal)방향

의 속도성분으로 인하여 선형 안정성 방정식에 추가되는 와동과 온도의 교란항들을 고려하였기 때문에 비평행유동(non parallel flow)으로 문제를 해석했다. 그밖에 Chen 등⁶⁾과 Haaland 등⁷⁾에 의하여 와류 유동(vortex flow)에 대한 안정성 문제가 연구되었다.

경사진 벽면에 대한 안정성 연구는 그밖에 많은 연구자들에 의하여 연구되었지만 최대밀도점이 존재하는 부근에서는 연구가 부진하다. 최대밀도점 부근에서 자연대류(natural convection)의 안정성 연구는 Qureshi⁸⁾, Higgins⁹⁾, Hwang¹⁰⁾ 등에 의하여 연구되었는데 이 경우는 벽면이 수직인 경우이다.

Hwang^{10,14)}은 수직한 등온벽면에 대하여 부력의 영향이 유동의 방향에 중요한 영향을 미치는 $0 \leq R$ (density extremum parameter, $R = (T_m - T_\infty) / (T_0 - T_\infty) \leq 0.5$ 의 범위에서 최대 밀도변수 R 값에 따른 중립안정곡선과 교란의 공간에 대한 증폭곡선을 구하였으며 유동의 안정성을 예측하였다. 그때 그는 안정성 방식의 해를 두점 경계값 문제로써 정확히 계산하였는데, 본 연구도 Hwang의 기법에 따라 계산되었다.

차가운 물속에 잠겨있는 불체 주위에 형성되는 층류 자연대류에 대해서는 경계층내에 최대밀도점이 존재하므로 일반적인 Boussinesq 제2가정이 적용되는 경우와는 판이하게 다르다. 그러므로 Gebhart와 Mollendorf¹¹⁾의 밀도관계식을 사용하여 수동력학적 안정성 방정식을 유도하였다.

본 연구는 최대밀도점 부근의 최대밀도변수 R 이 0일때 등온벽면의 경사진 정도에 따라 나타나는 중립안정에 관하여 수치적으로 연구되었으므로 유동은 항상 상향의 경우이다.

(Fig.1(a) 참조)

Fig.1에서 경사각이 반시계방향으로 기울어질 경우 ‘+’방향으로, 시계방향으로 기울어질 경우 ‘-’방향으로 잡았다. 만약 경사각이 ‘+’방향으로 기울어질 경우 낮은 밀도가 높은 밀도의 아랫부분에 놓여지기 때문에 열 불안정성(thermal instability)이 야기되므로 당연히 불안정해지는 것은 분명하다. 그러나 본

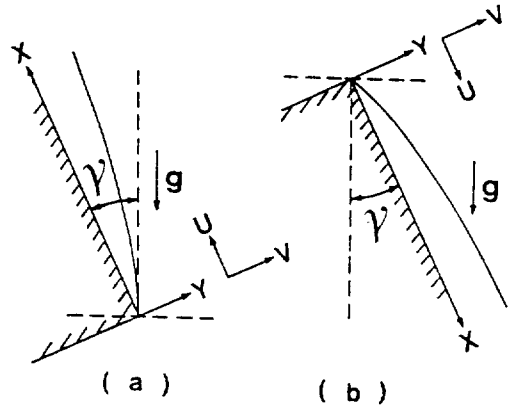


Fig.1 The coordinate systems for positive inclination angle γ , (a) upflow, (b) downflow

연구에서는 경사각이 미소하다고 가정하여 Tollmien-Schlichting 형태의 파형 불안정성 문제로써 수동력학적 안정성 문제를 해석하였다. 경사각이 작은 범위이므로 본 연구에서는 압력항의 영향을 무시하였고, 평행유동(parallel flow)이라고 가정할 수 있었다. 따라서 비평행유동 경우에 대한 기초연구가 될 것이다. 경사각이 ‘-’방향으로 기울어진다면 이번에는 낮은 밀도가 높은 밀도의 윗부분에 놓이게 되므로 이때는 경사각이 커질수록 유동이 안정해질 것이다.

최대밀도점을 포함하는 $0 < R < 0.5$ 의 영역에서의 안정성 연구는 다중해의 존재로 인하여 매우 어려움이 따른다. 이 영역에서의 경사진 벽면에 대한 안정성 연구는 본 연구에서 그 해석방법이 제시되었다.

2. 지배 방정식

2.1 기본유동 방정식

경사진 등온벽면에 이웃한 순수한 물에서 교란되지 않은 층류 자연대류에 대한 경계층 방정식은 다음과 같다.

연속 방정식

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0, \dots\dots\dots (1.a)$$

운동량 방정식

$$\frac{D\bar{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \bar{V} + \bar{F}, \dots\dots\dots (1. b)$$

에너지 방정식

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{k}{\rho C_p} \nabla^2 T. \dots\dots\dots (1. c)$$

여기서, V, T, P 는 각각 속도, 온도, 수동력학적 압력(Hydrodynamic Pressure)이고, ρ, g, ν, k 그리고 C_p 는 각각 유체밀도, 중력가속도, 동점성계수, 열전도계수, 유체의 정압비열이다. \bar{F} 는 부력항인데 X 방향에 대하여 다음과 같이 표현된다.

$$F_x = \frac{(\rho_\infty - \rho)}{\rho_m} g \cos \gamma \dots\dots\dots (2)$$

Gebhart 와 Mollendorf¹¹⁾의 밀도관계식은 온도, 염도, 압력에 따라 밀도가 정확하게 표현되는데 그 식은 다음과 같다.

$$\rho(t, s, p) = \rho_m(s, p) [1 - \alpha_T(s, p) |T - T_m(s, p)|^{q(s, p)}] \quad (3)$$

여기서 q 는 온도항의 염도와 압력관련 지수이고, α_T 는 온도항의 계수이다.

그리고 온도조건을 용이하게 표현하기 위하여 최대밀도변수(density extremum parameter) R 이 Gebhart 와 Mollendorf에 의하여 다음과 같이 정의되었다.

$$R = \frac{T_m - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \dots\dots\dots (4)$$

무차원화한 온도 θ_b 는,

$$\theta_b = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \dots\dots\dots (5)$$

여기서 T_m 는 대기압하에서 순수한 물의 최대밀도 온도, T_0 는 등온벽의 온도이고, T_∞ 는 벽 주위 온도경계층 밖의 온도(ambient temperature)이다.

상사변환한 항으로써 부력항은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{(\rho_\infty - \rho)}{\rho_m} g \cos \gamma = \pm g \alpha_T \cos \gamma [|\theta_b - R|^q - |R|^q] |T_0 - T_\infty|^q \dots\dots\dots (6)$$

경사각이 미소한 범위이므로 압력항을 무시하고 기본유동에 대한 경계층 방정식을 상사변환(similarity transformation)하였다. 이때 다음식들이 정의되었다.

$$\text{유동함수 } \psi = \nu G f_b(\eta),$$

$$\text{속도 } U = \psi_y = \frac{\nu f_b' G^2}{4x},$$

$$V = -\psi_x = -\frac{\nu G}{4x} (3f_b - \eta f_b') \dots\dots (7)$$

$$\text{무차원화한 상사변수 } \eta = \frac{Gy}{4x} \dots\dots\dots (8)$$

Grashof 수

$$\text{Gr}(x) = \frac{g x^3 \alpha_T}{\nu^2} |T_0 - T_\infty|^q,$$

수정한 Grashof 수

$$G = 4 \left(\frac{\text{Gr}(x)}{4} \right)^{1/4} \dots\dots\dots (9)$$

기본유동 방정식은 다음과 같다.

X -운동량 방정식

$$f_b''' = -\delta [|\theta_b - R|^q - |R|^q] \cos \gamma + 2(f_b')^2 - 3f_b f_b'', \dots\dots\dots (10. a)$$

에너지 방정식

$$\theta_b'' = -3Pr f_b \theta_b' \dots\dots\dots (10. b)$$

여기서 상향유동에 대하여 $\delta = +1$, 하향유동에 대하여는 $\delta = -1$ 이다. Pr 은 Prandtl수이며 q 는 Gebhart 와 Mollendorf의 온도와 밀도의 관계식에 사용되는 지수이다.

경계조건은,

$$f_b(0) = f_b'(0) = \theta_b(0) - 1 = 0, \\ f_b'(\infty) = \theta_b(\infty) = 0 \dots\dots\dots (11)$$

2.2 안정성 방정식

안정성 방정식은 평행유동(parallel flow)이라고 가정하고, 압력 교란항을 소거하지 않은 상태에서 방정식을 유도하였다.

먼저 속도, 온도와 압력에 작은 교란을 가정하였다.¹²⁾

$$\begin{aligned} U(x, y, t) &= U_b(x, y) + \tilde{U}(x, y, t), \\ V(x, y, t) &= V_b(x, y) + \tilde{V}(x, y, t), \\ P(x, y, t) &= P_b(x, y) + \tilde{P}(x, y, t), \\ T(x, y, t) &= T_b(x, y) + \tilde{T}(x, y, t) \dots\dots (12) \end{aligned}$$

여기서 하첨자 **b**는 기본유동의 항을 말하고, 상첨자 ~항은 교란항을 말한다.

부력항은 다음과 같이 변하게 된다.

$$\begin{aligned} F_x + \tilde{F}_x &= \pm g \alpha_T \cos \gamma [|\theta_b - R + \tilde{\theta}|^q \\ &- |R|^q] |T_0 - T_\infty|^q \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

식 (12)을 2차원 층류 자연대류에 대한 경계층 방정식에 대입한 후 기본유동에 의해 만족되는 항을 소거하고, 교란양들을 선형화하였다. 그리고 평행유동으로 가정하였으므로

$$V_b, \frac{\partial U_b}{\partial x} \text{ 및 } \frac{\partial T_b}{\partial x}$$

가 포함된 항들을 무시하였다.

X-운동량 방정식

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + U_b \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + \tilde{V} \frac{\partial U_b}{\partial y} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial y^2} \right) \\ + \alpha_T g |T_0 - T_\infty|^q Z_0 \tilde{\theta} \cos \gamma \dots\dots\dots (14.a) \end{aligned}$$

Y-운동량 방정식

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + U_b \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial y^2} \right) \\ + \alpha_T g |T_0 - T_\infty|^q Z_0 \tilde{\theta} \sin \gamma \dots\dots\dots (14. b) \end{aligned}$$

에너지 방정식

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + U_b \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + \tilde{V} \frac{\partial T_b}{\partial y} \\ = \frac{k}{\rho C_p} \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial y^2} \right) \dots\dots\dots (14. c) \end{aligned}$$

이때 교란 유동함수, 교란 온도, 교란 압력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} &= \bar{\phi}(y) e^{i(\bar{\alpha}x - \bar{\beta}t)}, \\ \tilde{U} &= \bar{\phi}_y, \quad \tilde{V} = -\bar{\phi}_x, \\ \tilde{T} &= \bar{S}(y) e^{i(\bar{\alpha}x - \bar{\beta}t)}, \\ \tilde{P} &= \bar{H}(y) e^{i(\bar{\alpha}x - \bar{\beta}y)} \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

여기서 $\bar{\alpha}$ 는 복소 파수이고 $\bar{\beta}$ 는 교란 주파수이다.

교란양은 다음과 같이 무차원화 되었다.

$$\begin{aligned} \phi(\eta) &= \frac{\bar{\phi}(y)}{\bar{U}D}, \quad S(\eta) = \frac{\bar{S}(y)}{T_0 - T_\infty}, \\ H(\eta) &= \frac{\bar{H}(y)}{\rho \bar{U}^2}, \quad \alpha = \bar{\alpha}D, \quad \beta = \frac{\bar{\beta}D}{\bar{U}} \dots\dots(16) \end{aligned}$$

여기서,

$$D = \frac{4x}{G}, \quad \bar{U} = \frac{\nu G^2}{4x}$$

안정성 방정식은 다음과 같다.

X-운동량 방정식

$$\begin{aligned} [f'_b - C] \phi' - f'_b \phi = -H \\ + \frac{1}{i\alpha G} [\phi''' - \alpha^2 \phi' + Z_0 S \cos \gamma], \quad (17.a) \end{aligned}$$

Y-운동량 방정식

$$\begin{aligned} [f'_b - C] \phi = -\frac{H'}{\alpha^2} + \frac{1}{i\alpha G} [\phi'' - \alpha^2 \phi] \\ + \frac{1}{\alpha^2 G} Z_0 S \sin \gamma \dots\dots\dots (17.b) \end{aligned}$$

에너지 방정식

$$[f'_b - C]S - \theta'_b \phi = \frac{1}{i\alpha G Pr} [S'' - \alpha^2 S]$$

.....(17. c)

여기서,

$$Z_0 = \delta \frac{(\theta_b - R)}{|\theta_b - R|} q |\theta_b - R|^{(q-1)},$$

$$C = \frac{\beta}{\alpha},$$

$\delta = +1.0$: 상향유동(upflow),

$\delta = -1.0$: 하향유동(downflow)

경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi(0) = \phi'(0) = S(0) = 0, \\ \phi'(\infty) = S(\infty) = H(\infty) = 0 \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

3. 수치해석 방법

초기값 문제를 풀때 발생하는 누적오차 및 중첩오차의 부정확성을 피하기 위해 orthogonal collocation 방법에 기초를 둔 두점 경계값 문제로서 계산되었다. 이 방법은 단순 사격법(simple shooting method)과는 달리 무한대의 가정치 η_∞ 값을 충분히 취할 수 있으므로 경사각이 증가함에 따라 경계층이 두터워지는 경우에도 정확한 계산이 가능하다. 본 연구에서는 Hwang¹⁰⁾이 사용했던 컴퓨터 코드 COLSYS¹³⁾를 이용했다.

상사변환한 방정식과 경계조건을 실수부와 허수부로 분리하여 프로그램을 작성하였고 기본유동의 해는 COLSYS를 사용하여 우선적으로 계산한 후 B-spline으로 저장되었다가 계산이 진행되는 중에 계수로 사용되었다.

ϕ, S, H 를 실수부와 허수부로 분리한 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi_R(0) = \phi_I(0) = \phi'_R(0) = \phi'_I(0) = 0, \\ S_R(0) = S_I(0) = 0, \\ \phi'_R(\infty) = \phi'_I(\infty) = S_R(\infty) = S_I(\infty) = 0, \\ H_R(\infty) = H_I(\infty) = 0 \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

이때 모두 0인 경계조건으로 고유값 문제를 계산하면 무용해(trivial solution)로 수렴하게 되므로 최소한 한개의 0이 아닌 경계조건이 있어야 한다. 그러므로 경계조건의 일부를 임의의 경계조건과 바꿈으로써 경계조건을 약간 수정하였다.

$$\begin{aligned} \phi_R(0) = \phi_I(0) = S_R(0) = S_I(0) = 0, \\ \phi_R(\infty) = C, \\ \phi'_I(\infty) = \phi'_R(\infty) = \phi'_I(\infty) = 0, \\ S_R(\infty) = S_I(\infty) = 0, \\ H_R(\infty) = H_I(\infty) = 0 \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

여기서 C 는 $10^{-11} \leq C \leq 10^{-5}$ 범위의 0이 아닌 작은 값으로 취함으로써 원래의 경계조건을 만족시키는 해를 쉽게 구할 수 있었다. 이밖에 경우에 따라서는 고유벡터 $S'_R(0)$, 또는 $S'_I(0)$ 을 0이 아닌 작은 값으로 취하였다. 이때 경계조건에서 0이 아닌 값들이 너무 작거나 너무 크게 선택되면 무용해로 수렴하거나 발산해 버리므로 고유벡터성분($H, S, S', \phi, \phi', \phi''$)의 최대값이 0(1)의 크기가 되도록 조절하였다.

각각의 기본유동에서 여러개의 Grashof 수에 대한 중립안정곡선(neutral stability curve)을 계산하기 위해 α_1 와 β_1 값을 0으로 한 후 G 값을 고정시키고 α_R 과 β_R 을 가정하여 Newton's Method로 $\phi'(0) \leq 10^{-5}$ 을 만족시키는 α_R 과 β_R 을 구하였다. 경우에 따라서는 β_R 을 고정시키고 G 값과 α_R 을 가정하여 새로운 G, α_R 값을 구하였다.

식 (20)의 수정한 경계조건이 사용되었을 때, 그 해는 원래의 경계조건 식 (19)를 만족시켜야 하는데, 그 판정기준은 다음과 같다.

$$0 \leq \min_{\eta} \leq \infty \left(\frac{|\phi'_R(0)|}{|\phi'_R(\eta)|}, \frac{|\phi'_I(0)|}{|\phi'_I(\eta)|} \right) \leq 10^{-4},$$

.....(21. a)

$$\max. \left(\frac{|\phi'_R(0)|}{M}, \frac{|\phi'_I(0)|}{M} \right) \leq 10^{-7} \quad (21. b)$$

여기서 M 은 고유벡터성분에 있어서 가장 큰 절댓값을 말한다. 이때 모든 계산은 VAX/VMS 11-750의 Double Precision으로 수행되었다.

4. 결과 및 고찰

기본유동 방정식의 해를 구하는데 있어서 먼저 $\gamma=0^\circ$, $R=0$, $\eta_\infty=23.2$ 로 놓고 수렴하는 해를 구하였고 무한대의 가정치 η_∞ 를 40까지 확장시켰다. 이때 구하여진 해를 황영규¹⁴⁾의 결과와 비교할 때 일치함을 확인했다.

경사각을 5° 씩 변화시키면서 0° 에서 30° 까지 기본유동 방정식의 해를 구하였다. 이때 기본유동의 속도분포곡선은 Fig.2와 같다. 여기서 경사각이 증가할수록 유동이 둔화된다는 것을 알 수 있다.

Fig.3은 온도분포곡선인데 큰 차이를 보이지는 않지만 경사각이 증가할수록 열전달율(heat transfer rate)이 감소함을 알 수 있다. 따라서 경계층이 두터워질 것이며, 경사각이 증가할수록 η_∞ 값을 크게 취할 필요성이 있다.

안정성 방정식은 경사각이 -10° 부터 30° 까지 10° 간격으로 구하였다. 이때 구하여진 중립안정곡선은 Fig.4, Fig.5에 도시되었다. Fig.4은 $G-\alpha_R$, 그리고 Fig.5는 $G-\beta_R$ 의 중립안정곡선이다. 임계 Grashof 수 G^* 는 중립안정곡선의 횡축에서 가장 작은 G 값을 뜻하는데 $G < G^*$ 인 경우 교란은 감쇄되고, $G > G^*$ 인 경우 최소한 교란의 일부는 증폭된다. 임계값들은 Table 1에 주어져 있다. +방향으로 경사각이 기울어질수록, 경사각에 따른 임계 Grashof 수는 현저하게 감소되었다. 따라서 경사각이 '+'방향으로 기울어질수록 유동은 점점 불안정해지고, '-'방향으로 기울어지게 되면 안정되는 경향을 보이고 있다.

또한 임계 Grashof 수 G^* 는 교란에 대해 유동이 불안정해지기 시작하는 무차원 위치인데 수정한 Grashof 수 G 의 정의로부터 G^* 가 증가할수록 교란의 증폭이 시작하는 거리 x 도 증가한다는 것을 알 수 있다. 즉 경사각이 '+'방향으로 기울어질수록 교란의 증폭이 시작되는 거리는 작게 나타난다. G 의 정의로부터 x 는 다음과 같이 표현된다.

$$x = \left\{ \frac{G}{4} \left(\frac{4\nu^2}{g\alpha_T |T_0 - T_\infty|^a} \right)^{1/4} \right\}^{4/3}$$

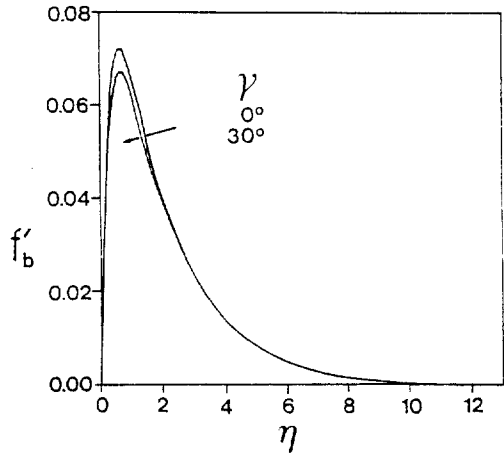


Fig.2 Dimensionless X-direction velocity component f'_b for the angle of inclination at $\gamma=0^\circ$ and $\gamma=30^\circ$

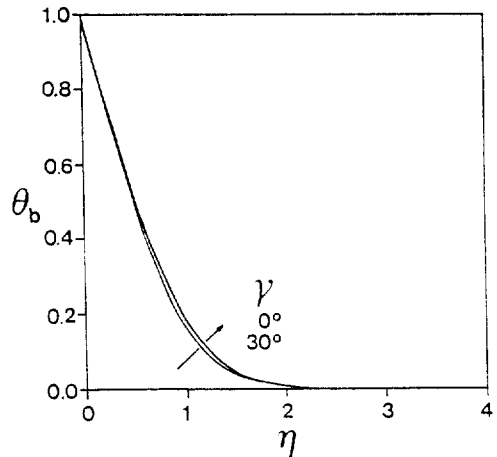


Fig.3 Normalized temperature θ_b for the angle of inclination at $\gamma=0^\circ$ and $\gamma=30^\circ$

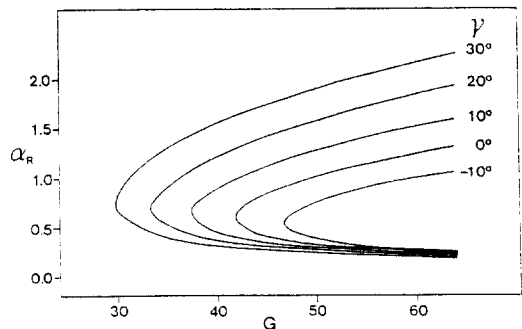


Fig.4 Neutral stability curves in the $(G-\alpha_R)$ -Plane

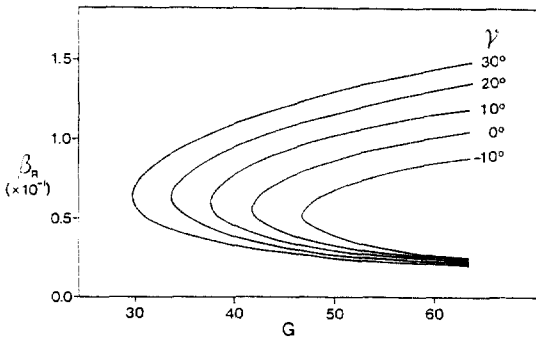


Fig.5 Neutral stability curves in the($G-\beta_R$) -Plane

Table 1. Critical values for various angle of inclination

γ	G^*	α_R^*	β_R^*
-10°	46.788	0.5185	0.050
0°	41.880	0.5782	0.055
10°	37.636	0.6356	0.059
20°	33.657	0.7283	0.064
30°	29.691	0.7734	0.064

경사각에 따른 임계 Grashof 수는 -10°, 0°, 10°, 20°, 30°일때 각각 46.788, 41.880, 37.636, 33.657, 29.691로 나타났다(이때 벽면의 온도를 0°C라고 가정하면 x 는 경사각이 -10°, 0°, 10°, 20°, 30°일때 각각 5.2184cm, 4.5016cm, 3.9038cm, 3.3635cm, 2.8454cm가 된다).

그리고 경사각이 ‘+’ 방향으로 기울어질수록 보다 넓은 범위의 무차원화한 파수(wave number)와 무차원화한 교란 주파수를 갖는 경향을 보인다. 파장 λ 은 다음의 관계식에서 구할 수 있다.

$$\lambda = \frac{2\pi \cdot 4x}{\alpha_R \cdot G}$$

본 연구에서는 제한된 범위내의 수정한 Grashof 수에 한하여 중립안정 수치결과를 수행하였으나, 실제에 가까운 파장이나 주파수의 범위를 구하기 위해서는 계산 범위를 확대할 필요성이 있다. 경제적 여건 때문에 본 계산 결

과의 α , β 의 값들은 비교적 작은 범위내에 있다. 수정한 Grashof수가 60~65에서, 무차원화한 파수 α_R 의 범위는 경사각이 -10°, 0°, 10°, 20°, 30°일때 각각 0.2409~1.0577, 0.2185~1.2807, 0.2027~1.5573, 0.1912~1.8624, 0.1829~2.1911로 나타났다(실제로 벽면의 온도를 0°C로 가정할 때, 파장을 구하여 보면 경사각이 -10°, 0°, 10°, 20°, 30°일때 각각 2.9286cm~12.7980cm, 2.3998cm~14.2270cm, 1.9754cm~15.3446cm, 1.6488cm~16.3358cm, 1.3987cm~17.0467cm의 범위가 된다). 여기서 경사각이 ‘+’ 방향으로 기울어질수록 파장이 보다 넓은 범위를 갖는다는 것을 알 수 있는데, 중립안정곡선 아랫부분의 장파영역보다는 윗부분의 단파영역에서 큰 차이를 보이고 있다. 또한 주파수는 다음 식으로부터 구할 수 있다.

$$\beta G^{1/3} = \frac{2\pi f}{v} \left(\frac{g}{v^2} \alpha_T |T_0 - T_\infty|^q \right)^{-2/3}$$

수정한 Grashof 수가 60~65에서, 무차원화한 교란 주파수 β_R 의 범위는 경사각이 -10°, 0°, 10°, 20°, 30°일때 각각 0.026~0.087, 0.024~0.102, 0.022~0.118, 0.021~0.133, 0.017~0.146로 나타났다(파장을 구한 같은 경우에 대하여 주파수를 구하여 보면, 경사각이 -10°, 0°, 10°, 20°, 30°일때 각각 0.01655Hz~0.05554Hz, 0.01541Hz~0.06474Hz, 0.01413Hz~0.07496Hz, 0.01354Hz~0.08434Hz, 0.01223Hz~0.09240Hz로 나타났다). 따라서 경사각이 ‘+’ 방향으로 기울어질수록 넓은 범위의 파수와 교란 주파수에서 불안정해진다는 것을 알 수 있다.

중립안정곡선의 임계 Grashof 수 아랫부분에서 Grashof수가 커지고, α_R , β_R 값이 작아질수록 고유벡터의 형태가 η 에 대해 완만히 감소하므로 두점 경계값 문제를 사용하기 위해서는 무한대의 가정치 η_∞ 를 크게 잡아야하기 때문에 계산상의 어려움이 따랐다.

Fig.6, Fig.7, Fig.8은 경계조건과 유용해의 판정기준식 (21.a), (21.b)를 만족시키는 고유벡터들의 형태를 보여주는데, 이들의 최대

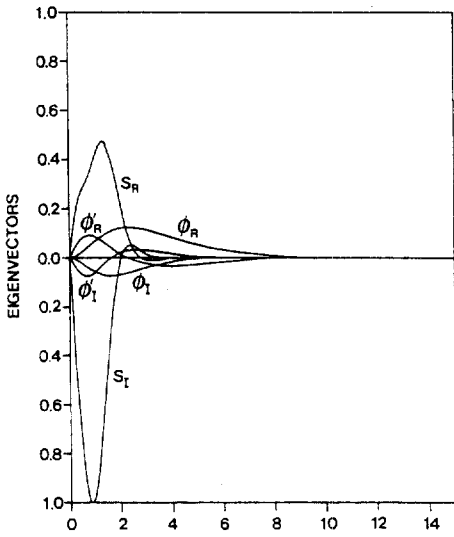


Fig. 6 Plots of eigenvector components vs. η corresponding to the solution at $R=0.0$, $\gamma=30^\circ$, $\alpha_R=0.4966$, $\beta_R=0.045$, and $G=32.452$

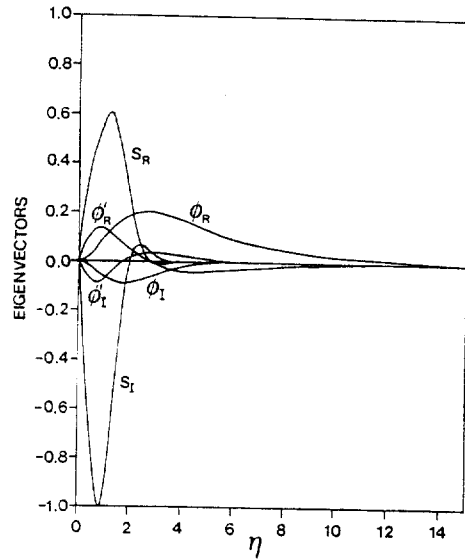


Fig. 8 Plots of eigenvector components vs. η corresponding to the solution at $R=0.0$, $\gamma=30^\circ$, $\alpha_R=0.3066$, $\beta_R=0.03$, and $G=42.599$

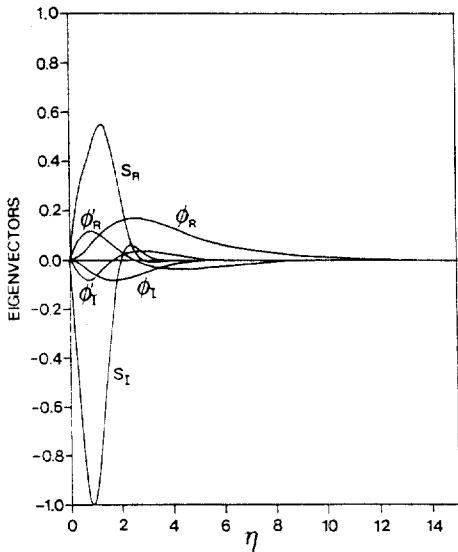


Fig. 7 Plots of eigenvector components vs. η corresponding to the solution at $R=0.0$, $\gamma=30^\circ$, $\alpha_R=0.3796$, $\beta_R=0.036$, and $G=37.109$

값이 1이 되도록 조절하여 도시하였다. 그림들은 경사각이 30° 일때 중립안정곡선상의 임계 Grashof 수 아랫부분에서 대표적으로 세점에 대하여 나타내었다. 이때 고유치 α_R , β_R 값이 커질수록 고유벡터성분중 $|S_R|$ 과 $|S_I|$ 값의 차이가 더 커지는 경향을 보인다. 이 값의 차이가 너무 커지게 되면 고유벡터의 형태가 매우 불규칙적으로 변하게 되어 대체로 큰 α_R , β_R 를 갖는 임계 Grashof 수 윗부분에서는 만족하는 고유벡터값을 구하기가 힘들었다.

경사진 등온벽면에서 경사각이 커질수록 경계층내에 작용하는 압력항과 Y방향의 속도성분 V_b 의 영향이 점점 크게 작용될 것이다. 비평행유동(nonparallel flow) 경우의 경사진 벽면에 대한 안정성 연구는 Haaland등¹⁴⁾과 Tzuoo 등¹⁵⁾에 의하여 연구되었는데, 본 연구도 속도 V_b 의 영향을 고려해야 할 필요성이 있다. 이 경우는 차후 연구되어질 과제이다.

5. 결 론

온도와 밀도의 관계가 비선형적인 Non-Boussinesq의 경우에서 최대밀도변수 R 이 0일 때 경사진 등온벽면 주위의 자연대류에 대하여 안정성 문제를 다루었다. 이때 구하여진 중립안정곡선은 경사각이 ‘+’방향으로 기울어질수록 보다 작은 임계 Grashof 수를 가졌고, 또한 보다 넓은 범위의 무차원화한 파수 (wave number)와 무차원화한 교란 주파수를 갖는 경향을 보였다. 반면 ‘-’방향으로 기울어질수록 큰 임계 Grashof 수와 좁은 범위의 무차원화한 파수, 무차원화한 교란 주파수를 갖는 경향을 보였다. 즉 경사각이 ‘+’ 방향으로 기울어질수록 보다 넓은 범위의 파수와 교란 주파수에서 불안정해진다는 것을 알 수 있다. 따라서 예상했던 바와 같이 경사각이 ‘+’ 방향으로 기울어질 경우 낮은 밀도가 높은 밀도의 아랫부분에 놓이게 되므로 경사각이 커지면 커질수록 불안정한 유동현상이 일어났고, 반면 경사각이 ‘-’ 방향으로 기울어질 경우 낮은 밀도가 높은 밀도의 윗부분에 놓이게 되므로 유동이 안정되었다.

참 고 문 헌

- Carey, V.P., and Gebhart, B., "Visualization of the Flow Adjacent to a Vertical Ice Surface Melting in Cold Pure Water", *J. Fluid Mech.* 107, pp. 37-55, 1981.
- El-Henawy, I., and Gebhart, B., and Hassard, B., and Kazarinoff, N., and Mollendorf, J. "Numerically Computed Multiple Steady States of Vertical Buoyancy Induced Flows in Cold Pure Water", *J. Fluid Mech.* Vol. 122, pp. 235-250, 1982.
- Wilson, N.W., and Vyas, B.D., "Velocity Profiles Near a Vertical Ice Surface Melting into Fresh Water", *Trans. ASME J. Heat Transfer*, Vol. 101, pp. 313-317, 1979.
- Lloyd, J.R., and Sparrow, E.M., "On the Instability of Natural Convection Flow on Inclined Plates", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 42, pp. 465-470, 1970.
- Haaland, S.E., and Sparrow, E.M., "Wave Instability of Natural Convection on Inclined Surfaces Accounting for Nonparallelism of the Basic Flow", *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 96, pp. 405-407, 1973.
- Chen, T.S., and Tzuoo, K.L., "Vortex Instability of Free Convection Flow over Horizontal and Inclined Surfaces", *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 104, pp. 637-643, 1982.
- Haaland, S.E., and Sparrow, E.M., "Vortex Instability of Natural Convection Flow on Inclined Surfaces", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 16, pp. 2355-2367, 1973.
- Qureshi, Z.H., "Stability and Measurements of Fluid and Thermal Transport in Vertical Buoyancy Induced Flows in Cold Water", Doctoral Dissertation, State University of New York, Buffalo, NY., 1980.
- Higgins, J.M., "Stability of Buoyancy Induced Flow of Water Near the Density Extremum, Adjacent to a Vertical, Isothermal Surface", Doctoral Dissertation, State University of New York, Buffalo, NY., 1981.
- Hwang, Y.K., "The Stability of Some Multiple Steady States and the Effect of Motion Pressure in Vertical Natural Convection Flows in Cold Water", Ph. D. Thesis, State University of New York, Buffalo, NY., 1984.
- Gebhart, B., and Mollendorf, J.C., "A New Density Relation for Pure and Saline Water", *Deep Sea Res.* 24, pp. 813-848, 1977.
- Plapp, J.E., "Laminar Boundary Layer Stability in Free Convection", Doctoral Dissertation, Calif. Instit. Tech. Pasadena, Calif. 1957.

13. Ascher, U., and Christiansen, J., and Russell, R.D., "COLSYS-A Collocation Code for Boundary-Value Problem. Codes for Boundary-Value Problem in Ordinary Differential Equation, (Ed. G. Goos & J. Hartmanis)", Lecture Notes in Computer Science, No. 76, pp. 164-185, 1978.
14. 황영규, "차가운 물에 잠겨있는 수직 등온벽면 주위의 부력 영향으로 인한 자연 대류에 관한 Hydrodynamic Stability 고찰", 1985년도 전반기 한국과학재단 지원 신진연구, 최종 보고서, 1986.
15. Tzuoo, K.L., and Chen, T.S., and Armaly, B.F., "Wave Instability of Natural Convection Flow on Inclined Surfaces", Journal of Heat Transfer, Vol. 107, pp. 107-111, 1985.