

유한요소법을 이용한 천수방정식의 수치실험

Numerical Experiments of Shallow Water Eqs. by FEM

최 성 옥* · 이 길 성**
Choi, Sung Uk · Lee, Kil Seong

Abstract

Numerical experiments of shallow water equations are performed under various boundary conditions by finite element method to simulate the circulation in estuaries and coastal areas. Galerkin method is employed to discretize spatial domain, and for time integration, finite difference method (Crank—Nicolson scheme) is used. This method is tested in five problems, in which first four cases have analytic solutions. The computed values are well in agreement with the analytic solutions in four experiments and the result of the last 2—dimensional case is reasonable. Implicit and two step Lax—Wendroff schemes in time domain are compared, and the results when using four node bilinear and triangular elements are presented. Consequently it takes very long time for complex problems requiring many elements to integrate all the time steps using the implicit schemes. And the explicit scheme requires careful consideration in selecting the time step and the grid size to obtain the desired accuracy.

要 旨

하구나 연안에서 해수의 순환현상을 模寫하기 위해 淺水方程式을 여러가지 경계조건 하에서 수치해석하였다. 공간영역은 Galerkin방법으로 離散化하였으며 시간영역에 대해서는 유한차분법(Crank—Nicolson방법)을 사용하였다. 네 가지 검정실험이 해석적인 해가 있는 일차원 수로에서 행하여 졌으며, 해석해를 구할 수 없는 이차원 모형에도 적용되었다. 해석해가 있는 경우 수치모사 결과가 이와 잘 일치하였으며, 이차원 모형에서의 결과도 매우 합당함을 알 수 있었다. 또 일차원 문제에서 4점 bilinear요소와 삼각형 요소를 사용한 결과를 각각 비교하였으며 시간적분도 2단계 Lax—Wendroff방법을 사용하여 결과를 비교하였다. 음해법을 사용할 경우 비교적 정확한 결과를 얻을 수 있으나 요소의 갯수가 많아지면 구성되는 代數方程式이 커지기 때문에 각 시간마다의 계산량이 엄청나게 늘어나게 되며 양해법을 사용할 때는 원하는 만큼의 정확한 결과를 얻기 위하여 시간간격이나 공간격자 간격을 선정하는데 각별히

* 정희원 · 한국건설기술연구원 위촉연구원

** 정희원 · 서울대학교 공과대학 토목공학과 부교수

유의하여야 할 것이다.

1. 서 론

해안에 방파제, 발전소 등의 인공 구조물을 건설할 경우 물리학적, 화학적, 생물학적 환경이 변화하게 되므로 해안자원의 공학적 관리라는 측면에서 해수의 순환현상(Circulation Phenomena)을 규명하는 것이 필요하다. 어떤 과정을 통해 해수순환이 일어나며 왜 일어나는가, 부유물질이나 용존물질의 전달과정은 어떤 경로를 통해 일어나는가를 알기 위한 첫 단계로서 순환에 대한 연구가 필수적이다. 순환현상의 연구에 사용되는 지배방정식은 깊이 방향으로 모든 변수가 일정하다는 가정하에 복잡한 3차원의 Reynolds식을 수심 적분함으로써 2차원으로 단순화시킨 천수방정식 (Shallow Water Equation)이다. 본 식은 1960년도를 전후하여 제시된 식으로 순환현상의 규명에 이용되어 왔으며, 더 단순화된 식도 제안된 바 있으나 이러한 연구에 별 도움이 되지 못하였다. 순환현상을 일으키는 중요한 요인으로는 조석, 바람과 해저마찰 등을 들 수 있는데, 조석의 영향은 지배방정식의 외해 경계조건으로 주어지며 바람과 마찰은 지배방정식에 독립된 항들로 표현된다.

과거에는 천수방정식에 대한 수치해석이 주로 유한차분법(Finite Difference Method)을 사용하여 이루어 졌는데, 격자가 사각형이 되어야 한다는 단점을 가지고 있어 불규칙한 경계에 따른 계산치의 부정확성이 문제가 되어왔다. 근래에 들어 불규칙한 정의영역에 제약을 받지 않고 사용가능한 유한요소법(Finite Element Method)이 실제문제에 적용되고 있는데, Taylor와 Davis⁽¹⁾는 이 방법으로 천수방정식을 해석하여 유한차분법과 일치하는 결과를 얻었으며 안정조건이나 수렴도가 문제되지 않음을 보였다. 그러나 이 방법으로 구성된 행렬식은 그 규모가 상당히 크고 형태가 단순하지 않아 연립방정식의 해를 구함에 있어 정확도와 계산속도가 중요한 문제로 등장하게 되었다. Partridge와 Brebbia⁽²⁾는 이차의 여섯개 절점을 가진 삼각형 요소를 사용하여 천수방정식을 수치해석하였는데, 시간적분에는 음해법인 사다리꼴 공식과 양해법인

Runge-Kutta법을 사용하였다. 또한 Walters와 Cheng⁽³⁾은 이차의 삼각형 isoparametric 요소를 사용하여 천수방정식을 해석하였는데, 단순한 대상에 여러 경계조건을 대입함으로써 민감도를 분석하였다.

국내에서도 이 분야에 대한 연구가 근래에 활발하게 진행되고있어 서승원 등⁽⁴⁾은 흐름단면의 급변화에 의한 순환현상의 수치모형을 제시하였고, 윤태훈과 서승원⁽⁵⁾은 만에 적용되는 천수방정식의 개방 경계조건에 대해 연구한 바 있다. 그 밖에도 유한요소법을 이용한 수공학 관련분야의 연구로는 호수에서의 풍파로 인한 2차원 순환⁽⁶⁾과 쓰나미의 전파⁽⁷⁾, 오염물질의 대류 및 확산⁽¹⁾ 등에 관한 연구가 있다.

본 연구는 유한요소법을 사용하여 천수방정식에 여러가지 경계조건을 대입할 때 얻어지는 해의 거동과 정확도의 고찰 등 교육적인 측면에 중점을 두었으며 이를 통해 다양한 경계조건을 가진 문제영역에서 순환현상의 수학적해석을 위한 유한요소모델을 제시하고자 하였다.

2 지배방정식과 유한요소 방정식

2.1 지배방정식과 경계조건

그림 1에서 3차원 Reynolds 방정식을 깊이방향으로 적분하면 다음 식(1)과 같은 천수방정식을 얻는다.

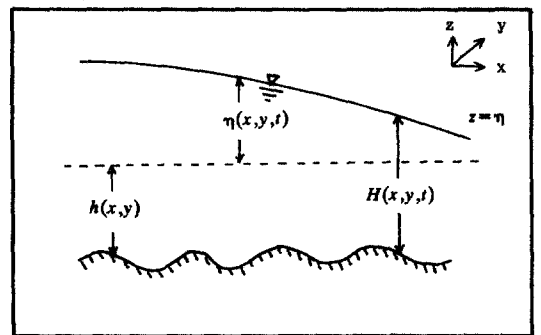


그림 1. Coordinates Description⁽⁸⁾

$$\partial u_i / \partial t + g \eta_{,i} + F_j - W_j = 0 \quad (1a)$$

$$\partial \eta / \partial t + \{ (h + \eta) u_i \}_{,i} = 0 \quad (1b)$$

윗 식에서 u_i 와 η 는 연직방향으로 평균된 유속과 평균해면(MSL)에서의 수면변위를 나타내며, g, h, W, F 는 각각 중력가속도, 평균해면으로 부터의 수심, 바람 그리고 바다마찰에 의한 항을 나타낸다. 여기서 Coriolis 힘, 확산에 의한 항은 무시하였다.

일반적으로 바다나 해안에서 닫힌경계(Closed or Fixed Boundary)와 열린경계(Open Boundary)의 두가지 형태의 경계조건이 존재하는데, 전자는 해안선 또는 구조물을 따라 주어지며 후자는 하구나 바다에 인위적 한계를 두어 경계로 삼게 된다. 따라서, 문제영역 V 의 전경계 S 에서 다음과 같은 네가지 형태의 경계조건이 주어질 수 있다^{9, 10}. 경계 S_1 에 유속 u_i 가 주어진다면

$$u_i = u_i \quad \text{on } S_1 \quad (2a)$$

여기서 윗 첨자는 경계에 주어진 특정한 값을 나타낸다. 경계 S_2 에는 수면 flux r_i 가 주어진다면

$$r_i \equiv -g \eta_{,i} = r_i \quad \text{on } S_2 \quad (2b)$$

여기서 n_i 는 경계에 수직한 단위벡터이다. 또한 경계 S_3 에는 선유량 q 가 주어진다면

$$q \equiv (h + \eta) u_{,i} n_i = q \quad \text{on } S_3 \quad (2c)$$

그리고 수위 η 가 경계 S_4 에 주어진다면

$$\eta = \eta \quad \text{on } S_4 \quad (2d)$$

여기서 경계 S_1 과 S_4 에 주어지는 조건은 필수 경계조건(Essential Boundary Condition)이 되며 경계 S_2 와 S_3 에서의 조건은 자연 경계조건(Natural Boundary Condition)이 된다.

2.2 유한요소 방정식

유한요소 방정식을 얻기위하여 공간영역에 대해서 Galerkin방법으로 다음과 같이 이산화한다. 지배방정식 (1a, b)에 각각 가중함수(Weighting Function) u^*_i 와 η^* 를 곱하여 전체영역 V 에서 적분하면

$$\int (u^*_i \frac{\partial u_i}{\partial t}) dV + \int (u^*_i u_{,j} u_{,j}) dV +$$

$$\int (u^*_i g \eta_{,i}) dV - \int (u^*_i W_i) dS = 0 \quad (3)$$

$$\int (\eta^* \frac{\partial \eta}{\partial t}) dV + \int [\eta^* (h + \eta) u_{,i} u_{,i}] dV = 0 \quad (4)$$

여기서 ϕ_α 를 α 번째 절점에서의 보간함수(Interpolating Function)라 하고 각 절점에 해당하는 유속성분을 $u_{\alpha i}$, 수위를 η_α , 그리고 가중함수의 값을 $u^*_{\alpha i}$, η^*_α 라 하면 전 절점에 정의되는 유속성분, 수위와 가중함수들의 값은 다음과 같다.

$$u_i = \phi_\alpha u_{\alpha i} \quad \eta = \phi_\alpha \eta_\alpha \quad (5a, b)$$

$$u^*_i = \phi_\alpha u^*_{\alpha i} \quad \eta^* = \phi_\alpha \eta^*_\alpha \quad (6a, b)$$

식 (5), (6)을 식 (3)과 (4)에 대입하면 다음과 같은 유한요소 방정식을 얻는다.

$$M_{\alpha\beta} \dot{u}_{\beta i} + K_{\alpha\beta r i} u_{\beta j} u_{\beta j} + N_{\alpha\beta i} \eta_\beta - F_{\alpha i} = 0 \quad (7a)$$

$$M_{\alpha\beta} \dot{\eta}_\beta + A_{\alpha\beta} (h_i + \eta_i) u_{\beta i} = 0 \quad (7b)$$

$$\begin{aligned} \text{여기서, } M_{\alpha\beta} &= \int (\phi_\alpha \phi_\beta) dV, \quad K_{\alpha\beta r i} = \int (\phi_\alpha \phi_\beta \phi_{r,i}) dV \\ N_{\alpha\beta i} &= \int g (\phi_\alpha \phi_{\beta,i}) dV, \quad F_{\alpha i} = \int (W_i \phi_\alpha) dS \\ A_{\alpha\beta} &= \int (\phi_\alpha (\phi_\beta \phi_{r,i})) dV \end{aligned}$$

또한 각각의 절점에 해당하는 수심을 h_α 라 하고 보간함수도 ϕ_α 로 하면 수심은 다음과 같이 표현된다.

$$h = \phi_\alpha h_\alpha \quad (8)$$

이상에서 이산화된 식을 전체공간 V 에서 모아쓰면 식 (9)와 같은 가중잔차 방정식(Weighted Residual Eq.)을 얻는다.

$$M_{\alpha\beta} \dot{V}_\beta + K_{\alpha\beta} V_\beta V_r + N_{\alpha\beta} Z_\beta - F_\alpha = 0 \quad (9a)$$

$$M_{\alpha\beta} \dot{Z}_\beta + A_{\alpha\beta} (h_r + Z_r) V_\beta = 0 \quad (9b)$$

여기서 V_β, V_r 와 Z_β, Z_r 는 각각 모든 절점에서 정의된 유속 u_i 와 수위 η 를 나타낸다. 상기 가중잔차 방정식과는 다르게 경계에서 수면 flux 혹은 선유량이 자연 경계조건으로 주어진다면 식(3) 또는 (4)에 Green 정리를 이용하여 새로운 형태의 방정식을 유도할 수 있다¹⁰.

3. 시간적분 방법

가중잔차 방정식을 풀려면 시간적분을 해야 하는데 통상 유한차분법을 사용하여 해결한다. 이를 위하여 식 (9a, b)를 결합하면 다음과 같은 시간에 대

한 1차의 행렬 미분방정식(Matrix Differential Equation)을 얻는다.

$$[P] \{dx/dt\} + [G] \{x\} = \{f\} \quad (10)$$

여기서, $[P] = \begin{bmatrix} M_{sp} & 0 \\ 0 & M_{sp} \end{bmatrix}$ $[G] = \begin{bmatrix} K_{sp} V_r & N_{sp} \\ A_{sp}(h_r + Z_r) & 0 \end{bmatrix}$

$$\{x\} = \begin{bmatrix} V_p \\ Z_p \end{bmatrix} \quad \{f\} = \begin{bmatrix} F_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.1 음해법(Implicit Method)

$\{x\}$ 를 시간 간격 θ 를 사용하여 다음과 같이 시간준위 n 과 $n+1$ 에서의 값으로 표현하면

$$\{x\} = (1-\theta)\{x\}^n + \theta\{x\}^{n+1} \quad (11)$$

본 연구에서는 $\theta=0.5$ 인 Crank-Nicolson (C-N) 방법을 사용하였는데, 이 차분법은 무조건 안정하다. 식 (11)을 식 (10)에 대입하여 다시 쓰면

$$\left(\frac{1}{\Delta t}[P] + \frac{1}{2}[G]\right)\{x\}^{n+1} = \left(\frac{1}{\Delta t}[P] - \frac{1}{2}[G]\right)\{x\}^n + \{f\} \quad (12)$$

식 (12)에서 각 시간준위에서 발생하는 행렬식은 Gauss-Seidel 방법을 이용해서 해결하였다.

3.2 양해법(Explicit Method)

식 (10)을 2단계 Lax-Wendroff (L-W) 방법을 써서 차분하면 다음과 같이 된다.

$$1\text{단계} : [\bar{P}]\{x\}^{n+1/2} = [P]\{x\}^n - \frac{\Delta t}{2}([G]\{x\}^n - \{f\}) \quad (13a)$$

$$2\text{단계} : [\bar{P}]\{x\}^{n+1} = [P]\{x\}^n - \Delta t([G]\{x\}^{n+1/2} - \{f\}) \quad (13b)$$

여기서 $[\bar{P}]$ 는 질량행렬 $[P]$ 의 질량집중행렬(Lumped Mass Matrix)로서, 완전한 양해법을 쓰기 위해 대각요소만의 행렬(Diagonal Matrix)로 바꾸어 준 것이다⁽¹⁾. 또한 차분법의 안정을 위해 다음식 (14)와 같은 CFL조건을 만족하여야 한다.

$$\Delta t / \Delta x \leq \sigma / \sqrt{gh} \quad (14)$$

시간간격 Δt 를 결정하기 위하여 일반적으로 가장 짧은 공간격자의 길이를 Δx 로 식 (14)에 대입한다. Kawahara 등⁽²⁾은 대개변수 σ 에 대해서 여러 값들을 제시하였으나 본 연구에서는 $\sigma=1/\sqrt{2}$ 로

잡아 가능한 시간간격을 크게했다. 왜냐하면 시간간격이 한계값에 가까울수록 계산치가 수치감쇠(Numerical Damping)의 영향을 덜받아 정확해지기 때문이다.

4. 일차원 모형의 검증

개발된 이차원 수치전산 프로그램의 검증을 위해 아래 그림 2와 같이 10개의 절점과 4개의 사각형 또는 8개의 삼각형 요소로 이루어진 수심 $h(x)$ 의 직사각형 개수로 대상을 4가지 경우를 수치실험하였다.

4.1 수치실험 1: 사각형과 삼각형요소의 비교

대상모형은 공간격자의 길이 $\Delta x = \Delta y = 5m$ 인 직사각형 고정수심 수로이며 그 단면은 다음 그림 3과 같다.

운동방정식 (1a)에서 대류항과 바람에 의한 영향을 무시하고 다음 식 (15)와 같은 가상의 경계조건(물리적 의미를 가질 수 없고 단순한 수학적 의미만 갖는 경계조건)하에서 해석적 해를 구하면 식 (16)을 얻을 수 있다⁽²⁾.

$$\eta = \sin(t) \quad \text{at } x=0 \quad (15a)$$

$$u = \sin(t) \quad \text{at } x=0 \quad (15b)$$

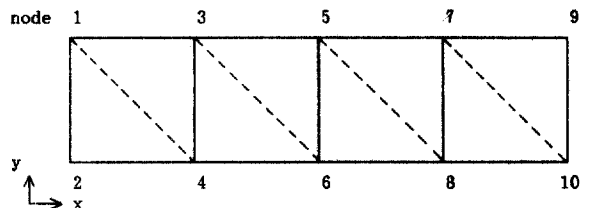


그림 2. Finite Element Mesh (Numerical Experiment 1, 2, 3, 4)

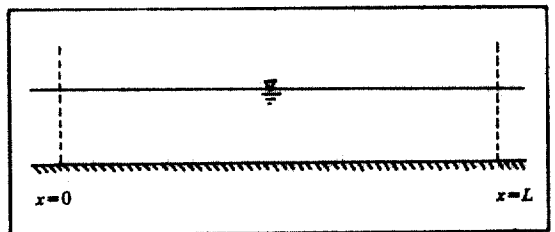


그림 3. Channel Configuration (Numerical Experiment 1, 2, 3)

$$\eta = \frac{1+\beta}{2\beta} \sin(t-x/\alpha) - \frac{1+\beta}{2\beta} \sin(t+x/\alpha) \quad (16a)$$

$$u = \frac{1+\beta}{2} \sin(t-x/\alpha) + \frac{1-\beta}{2} \sin(t+x/\alpha) \quad (16b)$$

여기서 $\alpha = \sqrt{gh}$, $\beta = \sqrt{g/h}$ 이다.

수치모형에서 시간적분은 C-N방법을 사용하였으며 수심 $h=10\text{m}$, 시간간격 Δt 는 0.1sec 로 하였다. 초기조건으로 Cold Start(초기상태에서 전 문제영역의 수위와 유속을 영으로 함)를 하고, bilinear 사각형 isoparametric 요소를 사용하여 수치모사를 한 결과 $x=20\text{m}$ 에서의 수위는 다음 그림 4와 같다.

동일한 조건에서 선형의 삼각형 isoparametric 요소를 사용하였을 때 유속에 대한 수치실험 결과는 다음 표 1과 같다. 두 요소의 정확도를 비교하기 위해 RMS(Root Mean Square)오차를 계산하였는데, 삼각형 요소를 사용했을 경우 요소의 갯수가 두배로 증가했음에도 불구하고 사각형 요소가 더 정확함을 알 수 있다. 이는 사각형 요소의 bilinear 보간함수가 단순히 선형으로 근사시키는 삼각형 요소의 보간함수보다 bilinear항을 더 포함하고 있기 때문이다.

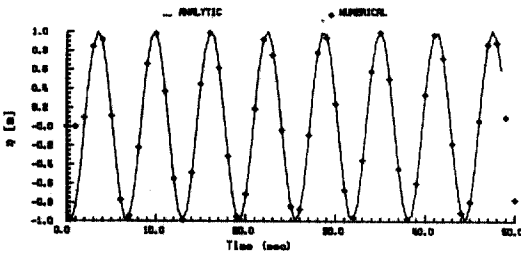


그림 4. Water Surface Elevation at $x=20\text{m}$ (Rectangular Element)

표 1. Numerical Experiment 1 : Velocity (m/s) at $t=30\text{ sec}$.

	node1	node3	node5	node7	node9	RMS error
exact soln.	-0.9880	-0.9410	-0.6636	-0.2238	0.2709	
rec. element	-0.9880	-0.9149	-0.6856	-0.2141	0.2320	0.0527
tri. element	-0.9880	-1.0094	-0.7142	-0.1944	0.2994	0.0944

42 수치실험 2: 음해법과 양해법의 비교

대상모형은 $\Delta x = \Delta y = 50\text{m}$ 인 isoparametric 요소로 이루어진 직사각형 수로이며, 단면은 그림 3에서 $X=L$ 인 지점에 고정단(Reflecting Boundary)을 갖은 것과 같다. 경계조건을 다음 식(17)과 같이 수로의 시작점에서 진폭 a 가 0.1m 이고 주기 T 가 200초 인 파를 보냈을 때 끝점에서의 유속을 영으로 하면 해석하는 식 (18)과 같다.

$$\eta = a \sin(\omega t) \quad \text{at } x=0 \quad (17a)$$

$$u=0 \quad \text{at } x=L \quad (17b)$$

여기서, $\omega = 2\pi/T$ (sec^{-1})이다.

$$\eta = \frac{a}{\cos \alpha} \cos[\alpha(x/L-1)] \sin \omega t \quad (18a)$$

$$u = -\frac{a\sqrt{gh}}{h \cos \alpha} \sin[\alpha(x/L-1)] \cos \omega t \quad (18b)$$

여기서, $\alpha = \omega L / \sqrt{gh}$ 이다.

해석해를 초기조건으로 대입하고 수심 $h=4\text{m}$, 시간간격 Δt 를 1sec 로 할 때 사각형 요소의 C-N방법에 의한 수치실험 결과는 다음 그림 5, 6과 같다. 한쪽끝이 고정단인 수로에서 유속의 위상이 수위와 $T/4$ 만큼 차이 나는 파를 보낼 경우 파가 고정단에 반사되어 파고가 두배로 됨을 알 수 있으며, 수치모사 결과와 해석해가 아주 잘 근사함을 알 수 있다.

동일한 조건하에서 시간적분으로 2단계 L-W 방법을 사용하였을 때 그림 7, 8과 같은 결과를 얻었다. 절점에서의 질량집중으로 인해 파의 주기가 길어졌으며 파고에 있어서는 감쇄현상이 두드러짐을 알 수 있다.

따라서 이러한 영향을 줄이기 위해 요소를 40개

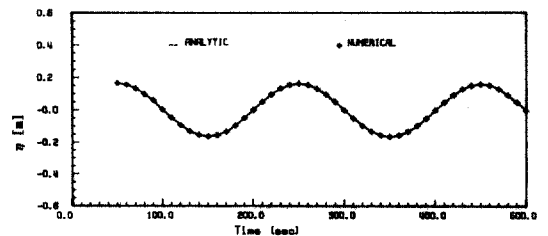


그림 5. Water Surface Elevation at $x=100\text{m}$ (Crank-Nicolson)

표 2. Numerical Experiment 2 : Water Surface Elevation (m) at x=50m

time	anal. soln.	L-W	abs. error	C-N	abs. error
210	0.0420	0.0398	0.0022	0.0429	0.0009
220	0.0798	0.0814	0.0016	0.0807	0.0009
230	0.1099	0.1145	0.0046	0.1108	0.0009
240	0.1292	0.1355	0.0063	0.1310	0.0018
250	0.1358	0.1430	0.0072	0.1375	0.0017
260	0.1292	0.1366	0.0074	0.1306	0.0014
270	0.1099	0.1164	0.0065	0.1111	0.0012
280	0.0798	0.0842	0.0044	0.0802	0.0004
290	0.0420	0.0439	0.0019	0.0419	0.0001
300	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0001	0.0001
310	-0.0420	-0.0433	0.0013	-0.0429	0.0009
320	-0.0798	-0.0824	0.0026	-0.0810	0.0012
330	-0.1099	-0.1132	0.0033	-0.1108	0.0009
340	-0.1292	-0.1324	0.0032	-0.1306	0.0014
350	-0.1358	-0.1384	0.0026	-0.1369	0.0011
360	-0.1292	-0.1313	0.0021	-0.1296	0.0004
370	-0.1099	-0.1119	0.0020	-0.1105	0.0006
380	-0.0798	-0.0819	0.0021	-0.0803	0.0005
390	-0.0420	-0.0440	0.0020	-0.0421	-0.0001
400	0.0000	-0.0021	0.0021	-0.0002	0.0002
410	0.0420	0.0396	0.0024	0.0425	0.0005
420	0.0798	0.0774	0.0024	0.0805	0.0007
430	0.1098	0.1082	0.0016	0.1099	0.0001
440	0.1291	0.1289	0.0002	0.1298	0.0007
450	0.1358	0.1371	0.0013	0.1373	0.0015
460	0.1291	0.1322	0.0031	0.1303	0.0012
470	0.1098	0.1147	0.0049	0.1109	0.0011
480	0.0798	0.0861	0.0063	0.0806	0.0008
490	0.0420	0.0489	0.0069	0.0426	0.0006
500	0.0000	0.0064	0.0064	0.0010	0.0010

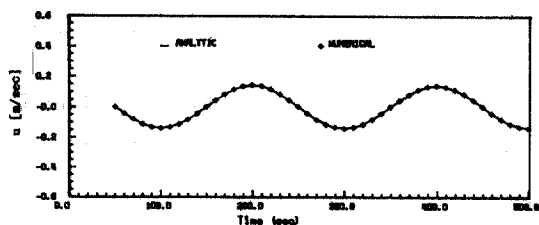


그림 6. Variation of Velocity at x=100m (Crank-Nicolson)

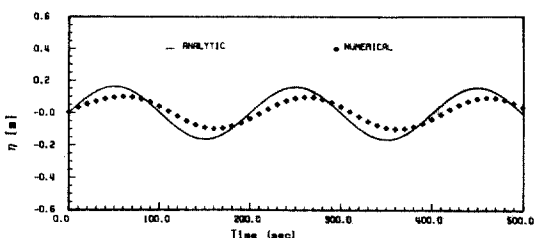


그림 7. Water Surface Elevation at x=100m (Lax-Wendroff)

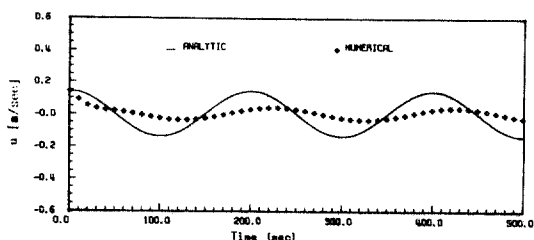


그림 8. Variation of Velocity at x=100m (Lax-Wendroff)

로 증가시켜 ($\Delta x=5m, \Delta y=50m$) 격자를 더 세밀하게 구성하고 시간간격 Δt 를 0.5sec로 줄였을 때 해석해와 근사한 수치해를 얻을 수 있었다. 다음의 표 2, 3은 C-N방법을 사용하였을 경우와 절대오차를 비교한 것인데, 감쇄현상은 현저하게 줄어들었으나 정확도면에서는 C-N 방법보다 좋지 않음을 알 수 있다.

4.3 수치실험 3 : 바람의 영향

대상모형은 (수치실험 2)와 동일하고 운동방정식 (1a)에서 바람에 의한 항 $W_i=W_x=9.8/gh$ (m/sec^2) 일때, 다음 식 (19)와 같은 경계조건하에서 해석적

해는 식(20)과 같다⁽³⁾.

$$\eta = 0 \quad \text{at } x = 0 \quad (19a)$$

$$u = 0 \quad \text{at } x = L \quad (19b)$$

$$\eta = \frac{W_x L}{g} - \frac{h}{c} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin\left[\left(\frac{1}{2} + n\right) \frac{\pi x}{L}\right] \cos\left[\left(\frac{1}{2} + n\right) \frac{\pi c t}{L}\right] \quad (20a)$$

표 3. Numerical Experiment 2 : Variation of Velocity (m/s) at x=50m

time	anal. soln.	L-W	abs. error	C-N	abs. error
210	0.1892	0.2163	0.0271	0.1909	0.0017
220	0.1610	0.1868	0.0258	0.1639	0.0029
230	0.1170	0.1374	0.0204	0.1194	0.0024
240	0.0615	0.0738	0.0123	0.0617	0.0002
250	0.0000	0.0030	0.0030	-0.0017	0.0017
260	-0.0615	-0.0675	0.0060	-0.0636	0.0021
270	-0.1170	-0.1304	0.0134	-0.1181	0.0011
280	-0.1610	-0.1790	0.0180	-0.1623	0.0013
290	-0.1892	-0.2080	0.0188	-0.1921	0.0029
300	-0.1990	-0.2155	0.0165	-0.2015	0.0025
310	-0.1892	-0.2015	0.0123	-0.1894	0.0002
320	-0.1610	-0.1681	0.0071	-0.1596	0.0014
330	-0.1170	-0.1189	0.0019	-0.1155	0.0015
340	-0.0615	-0.0594	0.0021	-0.0611	0.0004
350	0.0000	0.0042	0.0042	0.0004	0.0004
360	0.0615	0.0658	0.0043	0.0632	0.0017
370	0.1170	0.1201	0.0031	0.1186	0.0016
380	0.1610	0.1626	0.0016	0.1605	0.0005
390	0.1892	0.1896	0.0004	0.1876	0.0016
400	0.1990	0.1990	0.0000	0.1980	0.0010
410	0.1892	0.1904	0.0012	0.1894	0.0002
420	0.1610	0.1649	0.0039	0.1615	0.0005
430	0.1170	0.1244	0.0074	0.1167	0.0003
440	0.0615	0.0723	0.0108	0.0611	0.0004
450	0.0000	0.0130	0.0130	0.0015	0.0015
460	-0.0615	-0.0483	0.0132	-0.0591	0.0024
470	-0.1170	-0.1061	0.0109	-0.1157	0.0013
480	-0.1610	-0.1550	0.0060	-0.1612	0.0002
490	-0.1892	-0.1902	0.0010	-0.1902	0.0010
500	-0.1990	-0.2078	0.0088	-0.1998	0.0008

결과는 다음 그림 9, 10과 같다. 수로에 풍력이 고르게 작용할 경우 수면이 진동함을 알 수 있으며

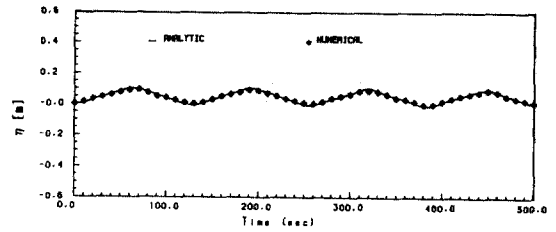


그림 9. Water Surface Elevation at x=100m (Wind Effect)

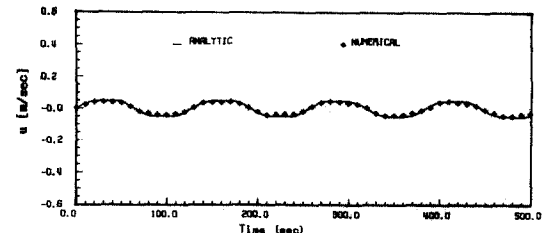


그림 10. Variation of Velocity at x=100m (Wind Effect)

같은 경우에도 수치실험 결과는 해석해와 잘 일치함을 알 수 있다.

4.4 수치실험 4 : 경사수로

대상모형은 (수치실험 2)와 동일한 직사각형 요소이며 경사진 수로단면의 형태는 그림 11과 같다.

경계조건이 식 (17)과 같을때 (단, 진폭 a가 0.001m이고 주기 T가 200초) 우측에 또 다른 임의의 좌표축을 설정하여 수심 h를 거리에 대한 선형 함수로 놓으면 (즉 $h=ax$ 에서 $a=0.02$ 이므로 우측 단의 좌표 $x_0=500m$ 가 된다) 식 (21)과 같은 해석해를 얻을 수 있다⁽¹³⁾.

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left[\left(\frac{1}{2} + n\right) \frac{\pi x}{L}\right] \sin\left[\left(\frac{1}{2} + n\right) \frac{\pi ct}{L}\right] \quad (20b)$$

여기서 $c = \sqrt{gh}$, $a_n = (-1)^n \frac{W_0 c L}{gh} \frac{1}{(1+2n)^2}$ 이다.

초기조건으로 Cold Start를 하고 사각형 요소의 C-N 방법($\Delta t = 1.0 \text{sec}$)으로 수치모사를 시행한

$$\eta = -\frac{a}{D} \left[Y_1(2\omega\sqrt{\frac{x}{ag}}) J_0(2\omega\sqrt{\frac{x}{ag}}) - J_1(2\omega\sqrt{\frac{x_0}{ag}}) Y_0(2\omega\sqrt{\frac{x}{ag}}) \right] \quad (21a)$$

$$u = \frac{a}{D} \sqrt{\frac{g}{\alpha x}} \left[J_1(2\omega\sqrt{\frac{x_0}{ag}}) Y_1(2\omega\sqrt{\frac{x}{ag}}) - Y_1(2\omega\sqrt{\frac{x_0}{ag}}) J_1(2\omega\sqrt{\frac{x}{ag}}) \right] \quad (21b)$$

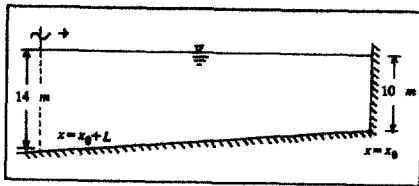


그림 11. Channel Configuration (Numerical Experiment 4)

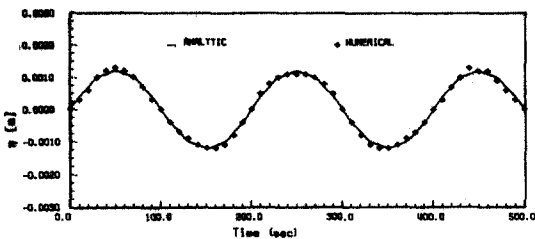


그림 12. Water Surface Elevation at x=200m (Sloping Channel)

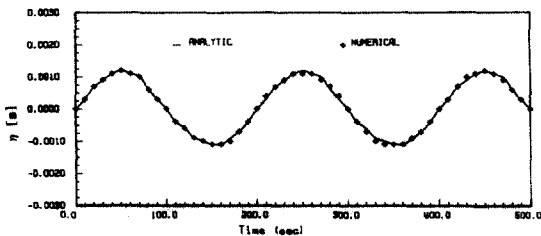


그림 13. Water Surface Elevation at x=100m (Sloping Channel)

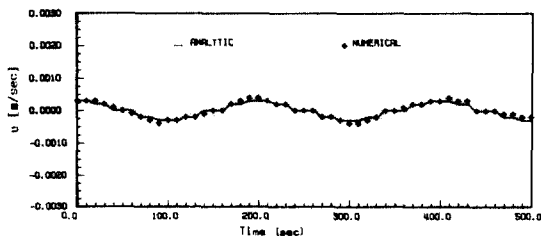


그림 14. Variation of Velocity at x=100m (Sloping Channel)

여기서, J_0 와 J_1 은 각각 0차와 1차의 제 1종 Bessel 함수이고 Y_0 와 Y_1 은 역시 각각의 0차와 1차의 제 2종 Bessel 함수이다. 또

$$D = Y_0(2\omega\sqrt{\frac{(x_0+L)}{ag}})J_1(2\omega\sqrt{\frac{x_0}{ag}}) - Y_1(2\omega\sqrt{\frac{x_0}{ag}})J_0(2\omega\sqrt{\frac{(x_0+L)}{ag}})$$

초기조건으로 해석해를 대입하고 C-N방법 ($\Delta t = 1.0\text{sec}$)에 의해 수치실험한 결과는 다음 그림 12, 13, 14와 같다.

일반적으로 심해파가 수심이 얇은 곳으로 이동할 때 전달되는 파는 처음의 파보다 파고가 높아진다. 이 현상을 일정하게 경사진 수로에서 수치모사 하였는데 결과가 해석해와 잘 일치하였다.

5. 이차원 모형에의 적용

개발된 전산 프로그램을 그림 15와 같은 상자형

1	10	19	28	37	46	55	64	73
2	11	20	29	38	47	56	65	74
3	12	21	30	39	48	57	66	75
4	13	22	31	40	49	58	67	76
5	14	23	32	41	50	59	68	77
6	15	24	33	42	51	60	69	78
7	16	25	34	43	52	61	70	79
8	17	26	35	44	53	62	71	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81

그림 15. Finite Element Mesh (Model Application)

수로에 적용하였다. 지배방정식은 선형화된 Hydrodynamic 모델을 사용하였고 바람과 바닥마찰에 의한 항은 무시하였다. 격자는 $\Delta x = \Delta y = 5000\text{m}$ 인 사각형요소 81개로 구성되어 있으며 수심 $h=10\text{m}$ 이다. 격자망 상단의 좌우측에 열린 경계 (Open Boundary)로 유속이 지정되었으며 그외의 닫힌 경계 (Closed Boundary)에서는 직각방향의 유속을 영(zero)으로 하였다. 즉

$$u(\text{좌}) = 0.5, u(\text{우}) = 0.5(\text{m/s}) \quad \text{on open boundary}$$

$$u_n = 0 \quad \text{on closed boundary}$$

위와같은 경계조건을 대입하여 C-N방법($\Delta t = 2\text{sec}$)으로 수치모사를 하였고 40초 후에는 더 이상의 큰 변화가 없어 수치모사를 중단하였다. 이때 형

성된 유속 벡터장은 그림 16과 같고 수위는 그림 17과 같다.

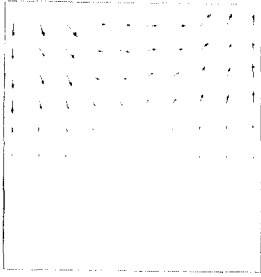


그림 16. Velocity Field at t=40 sec.

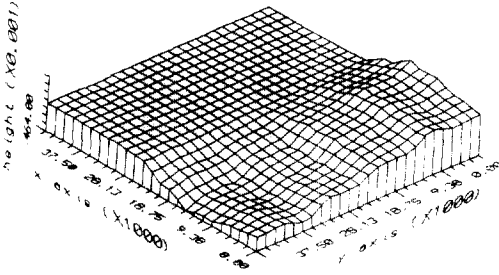


그림 17. Surface Profile at t=40 sec.

시간의 경과에 따라 유속 벡터장이 서서히 형성되어 유입부와 유출부 사이의 순환현상을 뚜렷하게 관측할 수 있었다. 유속이 양인 지점의 수위가 처음보다 높아지고 음인 지역은 낮아져 물의 유입과 유출이 일어나고 있음을 알 수 있으며, 시간이 지남에 따라 수위의 차도 적어져 정상상태에 가까워짐을 알 수 있었다.

6. 맺는 말

Galerkin의 유한요소법으로 천수방정식을 여러 가지 경계조건 하에서 수치실험한 결과, 해석적인 해가 있는 경우 비교적 정확한 결과를 얻을 수 있었고 해석해가 없는 경우도 적용결과가 매우 합당함을 알 수 있었다. 본 연구를 통하여 얻은 결론은 다음과 같이 요약될 수 있다.

가. 삼각형 요소와 비교해본 결과 예상대로 bilinear 항을 포함하는 4점 isoparametric 요소가 더 정확하게 근사해 값을 알 수 있었는데, 요소

의 수나 형상적인 측면을 고려해 볼때 4점 요소가 더 우수함을 알 수 있다.

나. 수리현상을 수치모사할때 경계조건 뿐만아니라 초기조건도 매우 중요하다. 합당하지 않은 초기조건이 주어질 경우 해가 수렴하지 않을 수 있기 때문에 Cold Start를 할 때에는 해의 진동에 유의해야 한다. 그러나 시간적분시 양해법을 쓸 경우 해법자체가 감쇄기능(Damping Property)을 가지고 있으므로 이점이 크게 문제되지 않는다.

다. 시간적분에서 완전한 양해법을 사용하려면 Lumping 과정을 거쳐야 하는데 이 또한 상당한 근사이므로 격자간 거리를 작게 할수록 정확해진다. 한편 격자간격이 줄어들면 시간간격도 CFL 안정조건에 의하여 줄어들어야 하므로 적절한 시간간격이나 격자간격을 선정하는 데에도 유의하여야 한다.

라. 일차원 문제에서 바람의 영향을 고려할 경우와 경사진 수로의 경우 수치해석 결과와 해석해가 잘 일치하였으므로 대상을 가상의 이차원 수역으로 확장시켜 적용해 보았다. 이차원 문제에서도 시간이 지남에 따라 형성된 유속벡터장과 수위의 변화도 합당하였으므로 수치실험의 결과나 현장실측치 등의 실제문제에 적용하여도 좋은 결과가 기대된다 하겠다.

유한요소법은 유한차분법에 비해 구성되는 행렬식이 크므로 각 시간단계마다 계산량이 상당히 많다. 시간적분시 음해법을 쓰면 정확성과 안정성의 장점은 있으나 계산시간이 많이 소모되며 양해법을 쓸 경우 계산시간은 줄어드나 수치감쇄(Numerical Damping)의 영향으로 계산값의 부정확성이 문제되어왔다. 근래에 이러한 점은 극복하고자 여러가지 방법¹⁰⁾이 제시되고 있으나 아직까지는 미흡한 실정이므로 정확도와 신속성을 겸비한 시간적분기법에 관한 연구가 절실히 요구된다 하겠다.

또한 개발된 모형을 이용하여 와도의 분포(Vorticity Distribution)와 수치해의 유일성(Uniqueness of Numerical Solution)에 관한 문제도 앞으로의 연구과제라 하겠다.

참고 문헌

1. Taylor, C. and Davis, J. M. "Tidal Propagation and Dispersion in Estuaries", *Finite Elements in Fluids*, Vol. 1 (ed. R. H. Gallagher et. al.), Wiley, London, pp. 95-118, 1975.
2. Partridge, P. W. and Brebbia, C. A., "Quadratic Finite Elements in Shallow Water Problems", *ASCE*, Vol. 102, No. HY9, Sep. 1976.
3. Walters, R. A. and Cheng, R. T., "Accuracy of an Estuarine Hydrodynamic Model using Smooth Elements", *W. R. R.*, Vol. 16, No. 1, pp. 187-195, 1980.
4. 서승원, 박정웅, 윤태훈, "흐름단면의 급변화에 의한 순환의 수치모형", *대한토목학회논문집*, 제3권 제4호, 21-31, 1983.
5. 윤태훈, 서승원, "만에 적용되는 천수방정식의 개방경계조건", *한국수문학회지*, 제20권 제3호, pp. 219-228, 1987.
6. Gallagher, R. H., Liggett, J. A., and Chan, S. T. K., "Finite Element Shallow Lake Circulation Analysis", *ASCE*, Vol. 99, No. HY7, Jul., 1973.
7. Kawahara, M., Takeuchi, N., and Yoshida, T., "Two Step Explicit Finite Element Method for Tsunami Wave Propagation Analysis", *Int. J. Num. Meth. Engng*, 12, pp. 331-351, 1978.
8. Pinder, G. F. and Gray, W. G. *Finite Element Simulation in Surface and Subsurface Hydrology*, Academic Press, 1977, pp. 262-288.
9. Kawahara, M., Hirano, H., and Tsubota, K., "Selective Lumping Finite Element Method for Shallow Water Flow", *Int. J. Num. Meth. in Fluids*, 2, pp. 89-112, 1982.
10. Kawahara, M., Nakazawa, S., Ohmori, S. and Tagaki, T., "Two Step Explicit Finite Element Method for Storm Surge Propagation Analysis", *Int. J. Num. Meth. Engng*, 15, pp. 1129-1148, 1980.
11. Akin, J. E., *Application and Implementation of Finite Element Methods*, Academic Press, 1982, pp. 323-326.
12. Farlow, S. J., *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Wiley, 1982, pp. 223-231.
13. Wang, J. D. and Connor, J. J., *Mathematical Modeling of Near Coastal Circulation*, *Rep. No. 200, R. M. Parsons Laboratory*, MIT, Cambridge, Mass., April 1975, pp. 128-149.

(接受 : 1990. 7. 11)