

# Total Lagrangian 문제형성에 의한 낮은 원호아치의 동적 비선형거동 해석

## A Geometrically Nonlinear Dynamic Analysis of Shallow Circular Arches Using Total Lagrangian Formulation

김 연 태\* · 김 문 검\*\* · 황 학 주\*\*\*  
Kim, Yun Tae · Kim, Moon Kyum · Hwang, Hak Joo

### Abstract

For shallow circular arches with large dynamic loading, use of linear analysis is no longer considered as practical and accurate. In this study, a method is presented for the dynamic analysis of the shallow circular arches in which geometric nonlinearity is dominant. A program is developed for analysis of the nonlinear dynamic behavior and for evaluation of the critical buckling loads of the shallow circular arches. Geometric nonlinearity is modeled using Lagrangian description of the motion and finite element analysis procedure is used to solve the dynamic equations of motion in which Newmark method is adopted as a time marching scheme. A shallow circular arch subject to radial step load is analyzed and the results are compared with those from other researches to verify the developed program. The critical buckling loads of shallow arches are evaluated using the non-dimensional parameter. Also, the results are compared with those from linear analysis.

### 요 지

큰 동하중을 받는 낮은 아치는 큰 변형이 발생하므로 선형해석으로는 실제적이고 정확한 해석이 어렵다. 따라서 본 연구에서는 낮은 원호아치의 동적 비선형 해석방법을 제시하였으며, 제시된 방법을 토대로 낮은 아치의 동적 비선형 해석을 수행하고 임계좌굴하중을 구할 수 있는 프로그램을 개발 하였다.

형상의 비선형성은 Lagrangian 운동좌표를 고려하여 해석하였으며 동적운동방정식을 풀기 위하여 유한요소법을 사용하였다. 이때 동적운동방정식의 시간적분으로 Newmark 해법을 채택하였다. 프로그램은 만재 방사형동분포하중을 받는 낮은 원호아치를 해석하여 그 결과치를 다른 연구결과와 비교하여 검증하였다. 모형해석을 통해서 큰동하중을 받는 원호아치는 기하학적 비선형 거동을 고려하여 해석 되어야 하며, 아치가 낮아질수록 좌굴발생가능성이 높아짐을 알았다. 또한 여러가지 형상의 아치에 대한

\* 정희원 · 연세대학교 대학원 박사과정  
\*\* 정희원 · 연세대학교 공과대학 부교수  
\*\*\* 정희원 · 연세대학교 공과대학 교수

좌굴 해석을 실시하여 임계좌굴하중을 구하였으며 기왕의 연구와 비교하여 정확성을 확인하였다.

## 1. 서 론

아치는 구조적으로 안정되고 미관상 아름답기 때문에, 오랜 옛날부터 사용되어 왔다. 최근에는 고강도 재료의 발달과 해석 및 설계기술의 발전으로 아치의 단면은 작아지는 반면, 길이는 더욱 길어지는 추세에 있다. 따라서 과거의 미소변형이론에 의하여는 그 거동을 정확히 구명할 수 없다. 더욱이 아치구조의 규모가 커지고 또한 충격하중, 지진하중 등을 받을 경우, 비선형해석은 필수적이며 동하중 작용에 따른 안정성 연구가 중요한 과제로 등장하게 된다.

기둥, 아치, 링, 판과 같은 구조요소의 안정성에 관한 연구는 오랜동안 수학자와 기술자들의 관심사가 되어왔는데, 1744년 Euler에 의한 기둥의 연구가 최초로 기록된 연구이다. 아치에 관한 동적 안정성의 연구로는 1952년 Bolotin<sup>[1]</sup>이 압축과 휨을 받는 대칭아치의 동적안정문제를 연구한 것이 최초로, 그 후 많은 진전이 있었다. Fung과 Kaplan<sup>[2]</sup>은 1952년 고전적인 임계기준과 급수해를 사용하여 여러가지 하중의 조합이 작용되는 낮은 포물선, 정현 및 원호아치의 정적임계하중을 연구하였다. 1962년 Budiansky와 Roth<sup>[3]</sup>은 양단 고정인 낮은 사각형 곡면판을 연구하는데 있어서, 하중의 증가에 대하여 응답이 최대로 증가할 때의 하중으로 snap-through하중을 정의하여 동적 임계기준을 제안하였다.

Humphreys<sup>[4]</sup>는 1966년 등분포 동하중이 작용하는 낮은 원호아치의 처짐을 Galerkin 방법에 의한 해석과 실험적 방법에 의하여 연구했다. Lock<sup>[5]</sup>는 1966년에 단순 지지된 정현 아치에 분포 step 하중이 작용하는 경우의 비선형 운동방정식을 Galerkin방법을 이용하여 동적 좌굴을 해석하였다. Hsu<sup>[6]</sup>는 1966년 탄성체의 동적 불안정 문제를 연구하였다. 그는 구조계의 초기 상태를 포함시켜 충격하중을 받는 탄성구조물의 동적 안정을 전체위치에너지에 근거를 두고 연구하였다. Fulton과 Barton<sup>[7]</sup>은 1971년 고정단 아치의 임의의 위치에 집중 경사하중이 작용하는 경우에 대하여 동적 snap-through

에 관하여 연구하였다.

1976년, Lo와 Masur<sup>[8]</sup>는 등분포 step하중을 받는 단순지지 원호 아치에 대하여, 운동을 지배하는 적분방정식을 유도하여 유한 요소계로 전환하고, 이를 Newmark- $\beta$ 방법으로 수치적분하므로써 대칭 좌굴형에 대하여 연구하였다. Fitzgerald와 Plaut<sup>[9]</sup>는 1980년에 3개의 독립적인 step하중 또는 충격하중을 받는 낮은 아치에 Welton<sup>[10]</sup>의 아치모형을 적용시켜 Lagrange운동방정식을 유도하고, 임계하중을 구하여 상관곡선을 작성하였고 정적인 경우와 비교하였다. Gyegory와 Plaut<sup>[11]</sup>는 1982년 양단 힌지 정현아치의 snap-through좌굴에 대한 여러가지 동하중의 상관적 관계를 연구했다. 또한 Ashwell과 Sabir<sup>[12]</sup>은 아치의 곡선부재에 적합한 형상함수를 연구, 제안하였다.

본 연구에서는 Lagrangian좌표계를 사용하여 아치의 거동을 수식화하고, 가상 일의 원리를 이용하여 Total Lagrangian 운동방정식을 유도한 후, Newmark 적분법에 의한 유한요소해석을 실시하여 원호아치의 동적 비선형거동을 구명하고자 한다. 또한, 이러한 거동해석을 낮은 원호아치의 좌굴 특성을 밝히는데 사용하도록 한다. 본 연구는 다음과 같은 가정 및 전제조건 하에서 실시한다. (1) 재료는 선형탄성체로 가정한다. (2) 아치는 변형전은 물론, 변형후에도 동일평면 내에 있고, 하중도 평면 내에 작용하는 것으로 한다. 즉, 면내거동에 한하여 해석을 실시한다. (3) 해석대상 아치는 평면응력 요소로 해석할 수 있는 아치로 제한한다. (4) 감쇠는 고려하지 않는다. (5) 모형해석에서는 구형단면을 갖는 아치를 대상으로 하였다. 따라서 해석결과도 구형단면 아치에 한하여 적용된다.

## 2. 동적 비선형거동

동적 하중을 받는 구조물에 있어서 그 변위가 과대할 경우, 형상의 변화에 따른 비선형성을 고려하여야 한다. 그러므로, 구조물의 운동을 지배하는 방정식은 변형된 형태에 기준한 운동방정식이 된다. 본 연구에서는 이 운동을 Lagrangian 좌표계에 의하여 묘사하도록 한다.

변형되지 않은 최초의 물체의 위치를  $x_i(i=1, 2, 3)$ , 시간  $t$ 에서의 변위를  $u_i$ 라하면 시간  $t$ 에서의 물체입자의 좌표  $\xi_i$ 는

$$\xi_i = x_i + u_i \quad (1)$$

과 같다. 그림1에 표시된 것과 같이 일정시간 경과 후 변형된 물체의 변형률을 변형되지 않은 상태의 좌표계를 기준으로 나타내면 다음과 같은 Green의 변형률을 표시 된다.

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) \quad (2)$$

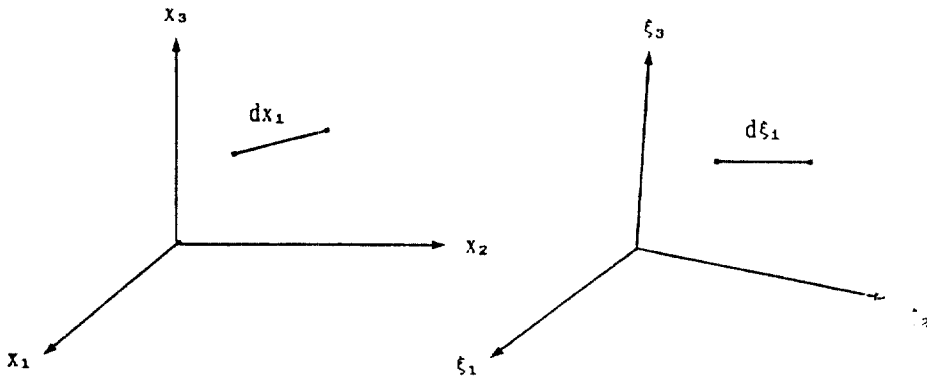


그림 1. 변형되지 않은 상태의 물체와 변형된 물체

$$\rho_0 \frac{D^2 u_i}{dt^2} = [(\delta_{ik} + u_{i,k}) s_{nk}]_{,n} + \rho_0 f_i \quad (4)$$

여기서  $\rho_0$ 는 시간  $t_0$ 의 단위체적당 질량,  $f_i$ 는 시간  $t$ 에서 단위 체적당 물체력  $D/Dt$ 는 시간미분이다. 가상변위  $\delta u_i$ 를 식 (4)에 곱한 후 물체전체에 걸쳐 적분하면 다음과 같은 초기 형상에 투영된 운동방정식을 유도할 수 있다.

$$\int_{\Omega_0} s_{ij} \delta \epsilon_{ij} d\Omega_0 = \int_{\Gamma_0} t_{\alpha i} \delta u_i d\Gamma_0 + \int_{\Omega_0} \rho_0 (f_i - \frac{D^2 u_i}{dt^2}) \delta u_i d\Omega_0 \quad (5)$$

여기서  $\delta \epsilon_{ij}$ 는  $\delta u_i$ 에 적합한 가상 Green 변형률,  $\Omega_0$ 와  $\Gamma_0$ 는 초기시간  $t_0$ 에서의 체적 및 표면적,  $t_{\alpha i}$ 는 변형 전 단위면적 당으로 치환된 표면력이다.

식 (5)를 이산화하여 한 유한 요소에 대한 임의의 시간에서의 운동방정식을 구성하면 다음식으로 표기된다.

$$[M] \{\dot{q}\} + ([K_L] + [K_{NL}]) \{q\} = \{F\} \quad (6)$$

여기서,  $[M]$ 은 consistent 질량행렬로서,

$$[M] = \int_{\Omega_0} [N]^T [N] \rho_0 d\Omega_0 \quad (7)$$

이에 대응되는 응력텐서는 Piola Kirchhoff의 제2 응력  $s_{ij}$ 로서

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_k} J \sigma_{ki} \quad (3)$$

이다. 식 (3)에서  $\sigma_{ki}$ 는 Cauchy 응력이고  $J$ 는 Jacobian 행렬이다. Newton의 제2법칙에 의하면, 선형운동량의 시간 미분 (material time derivative)은 작용력의 크기와 같으므로, 다음과 같은 비선형 운동방정식을 구할 수 있다<sup>[13]</sup>.

이며,  $[K_L] + [K_{NL}]$ 은 비선형 강성도행렬로서

$$[K_L] = \int_{\Omega_0} ([B_L] + [B_{NL}])^T [C] \cdot ([B_L] + [B_{NL}]) d\Omega_0 \quad (8)$$

$$[K_{NL}] = \int_{\Omega_0} [B']^T [s'] [B'] d\Omega_0 \quad (9)$$

이며,  $\{F\}$ 는 임의의 시간에서의 하중항으로

$$\{F\} = \int_{\Omega_0} [N]^T \{f\} \rho_0 d\Omega_0 + \int_{\Gamma_0} [N]^T \cdot \{t_{\alpha i}\} d\Gamma_0 \quad (10)$$

이다. 이들식에서  $[N]$ 은 형상함수행렬로서 본 연구에서는 평면요소에 대하여 8절기 등매개요소를 사용하여  $2 \times 16$ 행렬이 된다. 또한,  $[B_L]$ 과  $[B_{NL}]$ 은 각각 선형 및 비선형 Green 변형률-절점변위행렬,  $[C]$ 는 Piola-Kirchhoff 제 2 응력-Green 변형률행렬,  $[B']$ 는 변위경사-절점변위행렬,  $[s']$ 는 Piola Kirchhoff 제 2 응력들로 구성된 행렬이다. 식 (7)로부터 (10)의 적분은 Gauss-Legendre의 수치적분법에 의하여 각 요소 별로 계산될 수 있다. 적분된 행렬과 벡터는 전체 구조계에 적절하게 조립될 수 있다.

식 (6)과 같은 형태로 전체 구조계에 대하여 이산화된 운동방정식을 시간 단계별로 수치적분을 행하기 위하여 Newmark근사법을 이용한다. 임의의 시간  $t + \Delta t$ 에서 전체 구조계의 변위벡터를  $\{Q\}^{t+\Delta t}$ 라 하면, 속도 및 가속도는 식 (11), 식 (12)와 같이 가정할 수 있다.

$$\{\dot{Q}\}^{t+\Delta t} = \{\dot{Q}\}^t + [(1-\delta)\{\dot{Q}\}^t + \delta\{\dot{Q}\}^{t+\Delta t}] \Delta t \quad (11)$$

$$\{\ddot{Q}\}^{t+\Delta t} = \{\ddot{Q}\}^t + \{\ddot{Q}\}^t \Delta t + [(1/2-\alpha) \cdot \{\dot{Q}\}^t + \alpha\{\dot{Q}\}^{t+\Delta t}] \Delta t^2 \quad (12)$$

여기서  $\delta$ 는 0.5,  $\alpha$ 는 0.25를 취하였다. 식 (12)로부터 변위  $\{Q\}^{t+\Delta t}$ 의 항으로 가속도  $\{\ddot{Q}\}^{t+\Delta t}$ 을 구한 다음, 이 가속도를 식 (6)에 대입하여 시간  $t + \Delta t$ 에서의 변위  $\{Q\}^{t+\Delta t}$ 를 구할 수 있다.

이상에서 언급한 이론을 기초로 하여, 비선형 유한요소 프로그램을 개발하여 아치의 기하학적 비선형 거동을 검토하고, 또한, 좌굴 현상을 거동해석 방법에 의하여 검토하였다. 개발된 프로그램의 흐름도는 그림 2에 도시한 바와 같다.

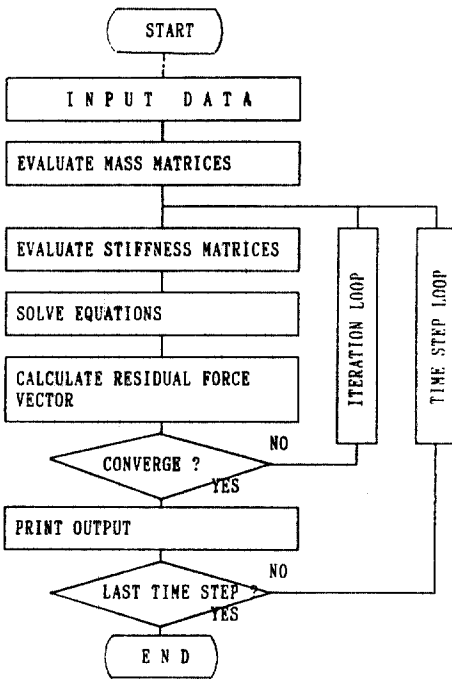


그림 2 프로그램의 흐름도

### 3. 아치의 동적 좌굴

낮은 아치에 하중이 가해져 어느 일정한 크기에 이르면 구조물은 좌굴현상을 일으켜 불안정하게 된다. 따라서, 좌굴이 일어나는 순간의 하중, 즉 임계하중을 구하는 것은 낮은 아치의 설계에 있어서 중요한 문제가 된다. 이러한 좌굴현상은 본 연구와 같은 비선형거동의 해석에 의하여 구명될 수 있다. 상기의 프로그램을 임계하중해석에 사용하기 위하여 먼저 동적좌굴의 기준을 정립하도록 한다.

좌굴하중을 해석하기 위한 많은 연구가 발표되었지만, 좌굴의 기준에 대해서는 토론의 여지가 있다. Hoff와 Bruce<sup>[5]</sup>는 운동의 미소 동요에 따른 위치 에너지 변화가 가장 급격한 경사에 따라 다른 평형 상태에 이른다는 snap-through형식의 기준을 설정하였다. 이 기준은 Hsu<sup>[6]</sup>에 의하여 위상 공간상에서 일반화되었다. 그러나, 이 기준은 충격하중에 제한되어 적용되고, 수치 해석에 적용하기 어려운 점이 있다. Budiansky와 Roth<sup>[7]</sup>는 하중과, 개개 하중에 대한 구조물의 응답변수 중 최대치와의 상관도에서 하중의 미소 증가에 따른 응답변수의 급격한 증가가 발생하는 하중을 동적 임계하중으로 정의하였다. 본 연구에서는 Budiansky의 기준에 따라 임계하중을 구하였으며 응답변수는 식 (13)과 같은 아치의 원래의 형상과 변위량과의 비를 나타내는 처짐비로 정하였다.

$$\Delta = \frac{\int_0^L [u^2(x, t) + v^2(x, t)]^{1/2} dx}{\int_0^L Y_0(x) dx} \quad (13)$$

여기서,  $u(x, t)$ 와  $v(x, t)$ 는 시간  $t$ 에서의 수평변위와 수직변위이며,  $Y_0(x)$ 는 위치에 따라 변하는 아치의 높이,  $L$ 은 아치의 지간이다. 따라서 Budiansky기준에 따라 하중을 점증시키며 아치의 힘-변위관계를 해석할 때 식 (13)의 처짐비가 급격히 증가하는 순간의 하중점을 임계하중으로 정의한다. 이와 같은 처짐비를 사용함에 따라 수직방향의 처짐만을 기준으로 하는 방법과는 달리, 비대칭 아치의 경우에 발생하는 수평처짐의 영향도 고려할 수 있게 된다.

### 4. 낮은 아치의 동적 비선형 거동해석

그림 3에 도시된 바와 같이 양단이 고정된 평면 원호아치에 방사형 만재등분포 하중이 step하중으로

로 재하되는 경우에 대하여 선형 및 비선형해석을 실시하였다. 이러한 경우, 구조의 기하학적 형상과 하중이 대칭성을 가지고 있으므로, 아치구조의 반을 대상으로 유한요소망을 형성할 수 있다. 이 때, 요소의 수는 6개, 요소당절점수는 8개인 등매개유한요소를 사용한다.

해석 결과는 재료의 물성과 하중의 크기, 기하학적 형상등에 따라 결정되는 무차원 매개변수를 이용하여 나타내었다. 본 연구에서 사용한 무차원 매개변수는 Budiansky, Roth등이 사용한 것으로서 식 (14), 식 (15), 식 (16)으로 표기되는 시간매개변수  $\tau$ , 하중매개변수  $p_0$ , 형상매개변수  $r$ 이다.

$$\tau = \sqrt{E/\rho} (t/R) \quad (14)$$

$$p_0 = (R/h)^2 (q/E) \quad (15)$$

$$r = \beta^2 (R/h) \quad (16)$$

위식들에서 E는 탄성계수,  $\rho$ 는 단위 질량, R은 아치의 반경, h는 아치단면의 높이, q는 하중강도,  $\beta$ 는 rad으로 표시되는 아치중심각의 반이다. 해석대상 아치는 그림 3에서 반경 R=100cm,  $\beta=0.209$ rad(12°)의 1cm×1cm의 정사각형단면을 가진 아치로 정한다. 이 아치는 식 (16)에 따라 형상매개변수로 환산할 경우  $r=4.382$ 이 된다.

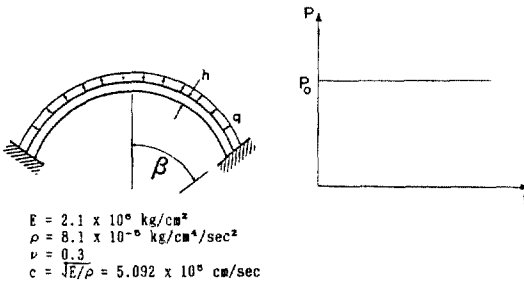


그림 3. 검증용 모형 및 제원

수치적분 방법으로는 Newmark방식을 사용하였다. 이 방식은 시간간격에 관계없이 안정한 해법으로 알려져 있으나, 좌굴현상을 찾는 문제에서 시간간격으로 큰 수치를 사용하면 동적 평형상태를 찾지 못하고 발산하는 경우가 많았다. 따라서 본 연구에서는 시간 간격으로  $3.315 \times 10^{-6}$ 초를 일정하게 사용하였다.

#### 4.1 NONSAP과의 비교

이상의 해석조건을 기초로 대상아치에  $q=42\text{kg/}$

cm의 등분포 방사하중이 재하된 경우에 대하여 선형 및 비선형해석을 실시하고 NONSAP에 의한 해석결과와 비교하였다. 여기서는 아치의 중앙에서의 시간에 따른 수직처짐값을 기준으로 비교하였다. 그림 4는 선형해석한 결과를 도시한 것이다. 그림에 따르면 아치는 최대처짐 0.66cm, 주기 0.0028초의 주기적인 진동을 하게 된다. 해석 결과를 검증하기 위하여, 동일한 경우에 대하여 NONSAP으로 해석한 결과를 같이 도시하였다. 해석조건은 모두 동일하게 하였다. 전체요소수, 요소당 절점수를 동일하게 하였고 수치해석방법도 같은 Newmark 방식을 사용하였으며, 시간간격과 적분상수를 동일하게 하였다. 단, 본 연구에서의 해석에서는 하중이 등분포된 것으로 해석한 반면, NONSAP의 경우에는 분포하중을 재하할 수가 없으므로 이를 집중하중으로 치환하여 재하하였다, 그림에서 보는 바와 같이 두 해석은 거의 동일한 결과를 줄 수 있다.

그림 5는 동일한 조건에 대한 비선형해석의 결과를 도시한 것이다. 본 연구에서의 해석결과에 의하면 최대처짐 3.65cm, 주기 0.0064초인 진동을 하게 된다. 비선형해석의 결과도 역시 NONSAP의 결과(최대처짐 3.77cm, 주기 0.0059초)와 비교하였다. 그림 5에서 보는 바와 같이 본 연구의 결과에 비하여 다소 NONSAP에 의한 진폭은 크게(본 연구기준 3.2% 차이), 주기는 작게(본 연구기준 8.5% 차이) 해석되었으나, 두 해석결과가 비교적 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 시간적분 상의 오차가 없다고 가정할 때, NONSAP과 본 연구는 모두 8절점 등매개요소를 사용한 변위법에 의한 해석이므로 인위적인 자유도의 구속에 의하여 구조의 강성을 과대평가하게 된다. 따라서, 두 해석의 결과는 모두 주기를 과대해석하였다고 사료될 수 있으므로, 본 해석에 의한 주기가 보다 실제 거동에 가깝다고 사료된다. 또한, 정점속도(그림 5곡선의 기울기)의 크기를 비교할 때, 본 연구의 결과가 더 유연한 구조로 해석한 것으로 보아 정당한 해석이라 사료될 수 있다. 이러한 내용은 선형인 경우에서도 그 차이는 미소하지만 동일한 양상으로 나타났다.

#### 4.2 기하학적 비선형성의 영향

상기된 바와 같이 검증된 프로그램을 이용하여 기하학적 비선형에 따른 영향을 미소변위 이론에

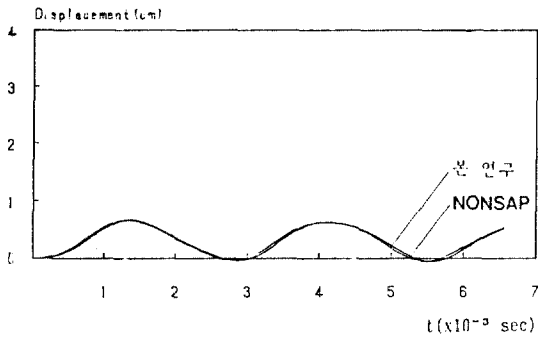


그림 4. 선형해석에 의한 정점변위

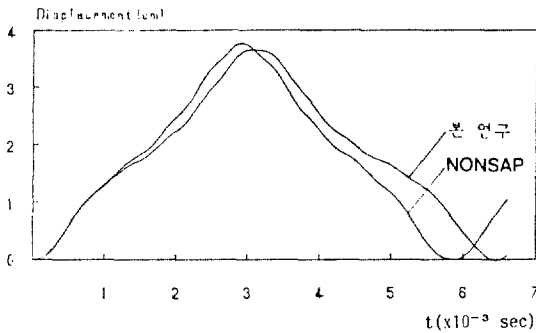


그림 5. 비선형해석에 의한 정점변위

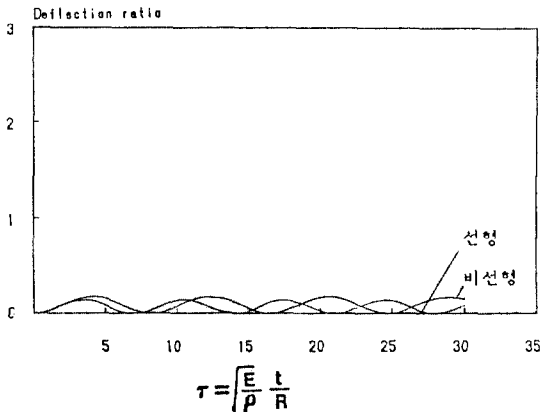


그림 6. 선형 및 비선형해석에 의한 처짐비와 시간 매개 변수와의 관계 ( $P_0=0.1$ )

기초한 선형해석의 결과와 비교하도록 한다. 이를 위하여 하중매개변수  $P_0$ 가 0.1, 0.2, 0.3인 경우에 대하여 해석을 실시하였다. 이 하중매개변수는 식 (15)에 따라 실제하중으로 환산할 경우 등분포하중

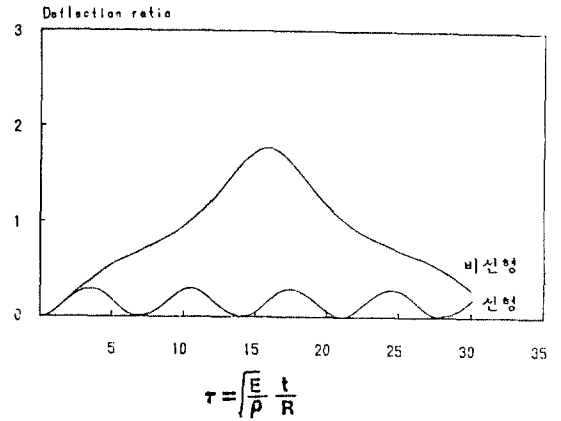


그림 7. 선형 및 비선형해석에 의한 처짐비와 시간매개 변수와의 관계

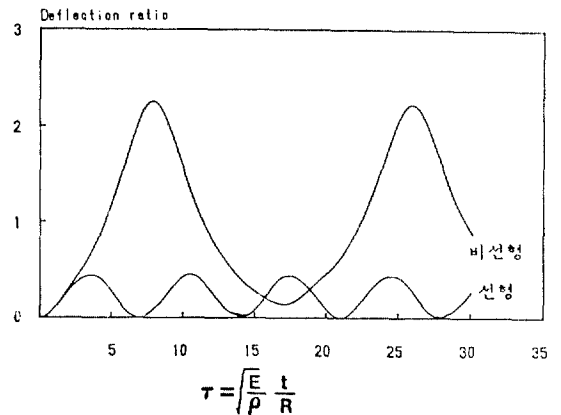


그림 8. 선형 및 비선형해석에 의한 처짐비와 시간매개 변수와의 관계 ( $P_0=0.3$ )

이 각각 21kg/cm, 42kg/cm, 63kg/cm의 크기로 재하되는 경우에 해당된다. 그림 6. 그림 7. 그림 8은 각 경우에 대한 식 (13)의 처짐비와 시간매개변수 사이의 관계를 도시한 것이다. 그림 6에서 보는 바와 같이 작은 동하중이 재하되는 경우에는 선형해석과 비선형해석의 결과는 그 차이가 미소하다. 그러나, 그림 7과 그림 8에서와 같이 동하중의 크기가 증가함에 따라, 그 결과는 크게 상이함을 알 수 있다. 따라서, 큰 동하중이 작용할 경우에는 비선형 해석을 실시하는 것이 타당함을 알 수 있다.

#### 4. 3 만재 등분포 재하에 대한 임계하중 해석

같은 대상에 대하여 Budiansky기준에 따라 하

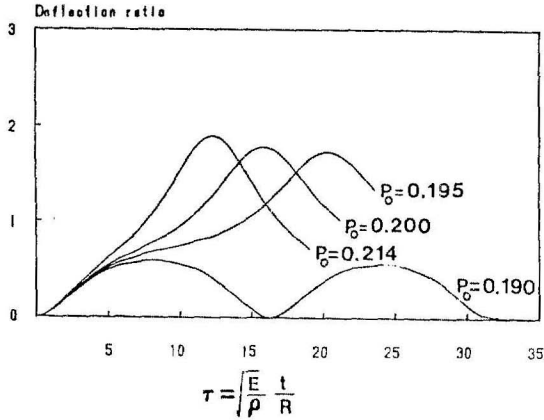


그림 9. 하중매개변수에 따른 일계좌굴하중

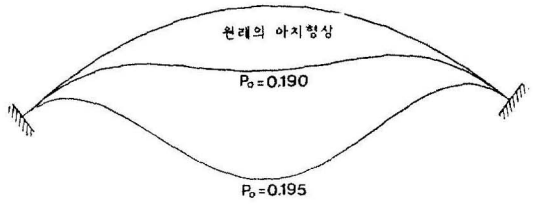


그림 11.  $P_0$ 가 0.190, 0.195인 만재등분포하중이 작용하는 경우의 처짐형상

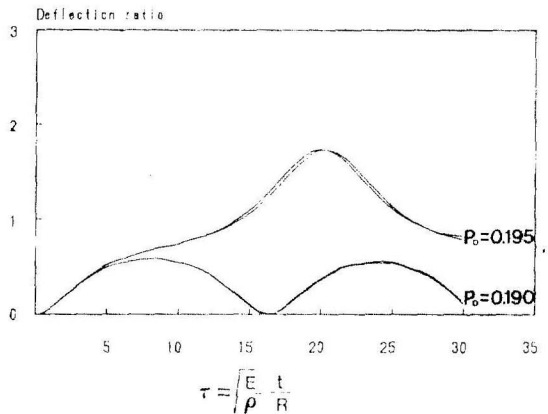


그림 12. 형상매개변수가 같은 아치의 처짐비 ( $\dot{r}=4.382$ )

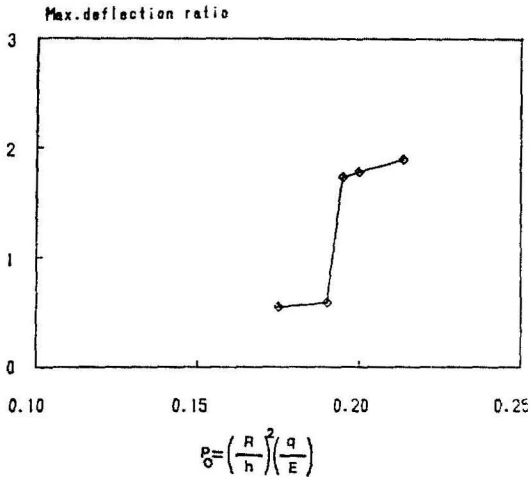


그림 10. 하중매개변수에 따른 최대처짐비

중매개변수를 점증시키며 비선형해석을 실시하여, 일계좌굴하중을 하중매개변수와 처짐비의 관계 곡선을 통하여 해석하였다. 그림 9에서 보는 바와 같이 하중매개변수  $P_0$ 가 0.190에 이르기까지는 처짐비가 0.6이하에서 진동하는 양상을 보이나, 하중이 그 이상으로 미소증가되면 급격하게 처짐비가 증가하는 것을 알 수 있다. 또한, 이 하중을 계속적으로 증가시켜 재하할 경우에는 그 증가에 비례하여 처짐비가 증가하지 않고 거의 비슷한 값을 보이며, 단지 그 현상이 빨리 나타남을 알 수 있다. 이 현상을 좀더 검토하기 위하여, 하중크기에 따른 최대처짐비의 변화를 그림 10에 도시하였다. 그림에서 보면 하중매개변수  $P_0$ 가 0.190까지는 최대 처짐비가 0.6을 넘지 않으나, 하중매개변수  $P_0=0.195$ 에서는

최대처짐비가 갑자기 증가하고 있다.

처짐비가 급증하는 현상을 확인하기 위하여 그림 11에 처짐비가 과대하게 나타나기 전후의 하중조건에서 최대처짐형상을 도시하였다. 즉 처짐이 과대하게 발생하기 직전의 하중  $P_0=0.190$ , 및 직후의 하중  $P_0=0.195$ 가 재하되어 최대의 변형이 발생했을 때의 처짐형상을 정규축적으로 그린 것이다. 이 그림에 따르면 하중 크기가  $P_0=0.190$ 에서는 처짐현상이 원래의 아치형상과 같은 형태이나 하중이 미소증가된  $P_0=0.195$ 에서는 아치의 모습이 전도된 형상으로 되어 처짐이 급증함을 알 수 있다. 이상의 검토를 종합해 볼 때, 본 연구에서 대상으로 한 아치는 하중매개변수  $P_0=0.190-0.195$ 사이에서 처음으로 좌굴이 발생함을 알 수 있다.

한편 위의 해석모형을 기초로 하여 반지름  $R$ , 중심 각  $\beta$ 를 변화시키면서 형상매개변수가 일정한 여러 아치를 해석하였다. 해석결과, 이들 아치에 대한 시간 변화에 따른 하중-변위관계를 매개변수로 치환하여 나타낼 때 형상매개변수  $\dot{r}$ 가 일정한 아치들은 같은 하중매개변수 재하시 시간 매개변수에 따라 같은 처

침비를 가짐을 확인할 수 있었다. 예를 들어 본 연구에서 대상으로 한  $R=100\text{cm}$ ,  $\beta=0.209\text{rad}(12^\circ)$ , 단면  $1\text{cm}\times 1\text{cm}$ 의 아치와 같은 형상매개변수 (4.382)를 갖는  $R=64\text{cm}$ ,  $\beta=0.262\text{rad}(15^\circ)$ , 단면  $1\text{cm}\times 1\text{cm}$ 의 아치를 해석하게 되면 그림 12와 같이 동일한 해석결과가 얻어진다.

#### 4.4 동일한 지간을 갖는 아치의 높이 변화에 따른 임계하중

지간이 같은 3개의 아치를 선정하여 높이에 따른 임계하중변화를 확인하였다. 대상아치는 (a)  $R=100\text{cm}$ ,  $\beta=0.206\text{rad}(12^\circ)$  (b)  $R=80.3\text{cm}$ ,  $\beta=0.262\text{rad}(15^\circ)$  (c)  $R=67.28\text{cm}$ ,  $\beta=0.314\text{rad}(18^\circ)$ 의 동일한 지간을 갖는 아치들이다. 이 아치들은 식 (16)에 따르면  $\gamma=4.382, 5.5, 6.634$ 의 형상매개변수를 갖는 아치들로서 지간대 높이의 비로 나타내면 각각 0.05, 0.066, 0.08이 된다. 각 형상의 아치에 대하여 임계하중을 구하여 그림 13에 그 결과를 도시하였다. 그림에 따르면 형상매개변수가 작을수록 작은 하중에서 좌굴이 일어남을 알 수 있다. 즉, 예상되는 바와 같이 높이가 낮아질수록 아치가 지지할 수 있는 하중은 감소함을 확인할 수 있다. 그림 13과 같은 자료는 설계에 유용하게 사용될 수 있을 것으로 사료된다.

본 연구에서 구한 임계하중을 Humphreys가 수직처짐만을 자유도로 하여 Galerkin근사해법으로 구한 임계하중과 비교하여 그림 14에 함께 도시하였다. 그림에는 비교대상을 늘리기 위하여 위에서 선정한 3개의 아치외에  $\gamma=7.79, 8.96$ 의 두 아치를 추가로 해석하여, 그 결과를 같이 실었다. 아울러 Humphreys에 의하여 계산된 정하중 재하시에 대

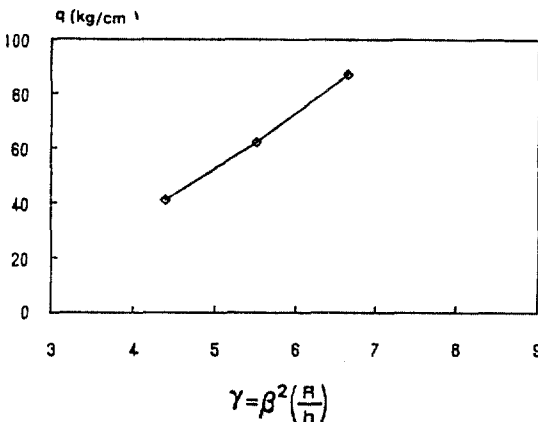


그림 13. 형상매개변수에 따른 좌굴임계하중

한 임계하중 결과도 같이 도시하였다. 그림에 따르면 동하중재하시 Humphreys의 임계하중값이 다소 큰값을 보이고 있다. 그러나 두 연구의 접근방법이 다르고 또한 좌굴은 특정한 하중점에서 발생하는 것이 아니라 일정한 하중폭에 걸쳐서 발생하는 것으로서, 이때 어느값을 취하느냐에 따라 약간의 오차는 있을 수 있기 때문에 전체적으로 그 차이나 경향을 감안 할 때 잘 일치하고 있다고 사료된다. 정하중 재하시에 대한 결과를 같이 도시한 것은 같은 크기의 하중이 재하됐을 때의 동적인 영향을 확인하기 위한 것으로서, 그림에 따르면 정하중 재하시의 임계하중이 동하중 재하시 보다 훨씬 큰 것을 알 수 있다. 즉, 예상되는 바이기는 하나 동하중 재하시는 좌굴 지지능력이 크게 저하되는 현상을 확인할 수 있다.

#### 4.5 부분 등분포 재하에 대한 임계하중 해석

앞에서 설명한 바와 같이 식 (13)과 같은 처짐비는 비대칭거동을 하는 아치에 대해서도 유용하게 사용될 수 있다. 이를 입증하기 위하여 아치의 반에만 방사형 등분포하중이 작용하는 경우를 해석한다. 이 경우에 요소망은 전체 아치에 대하여 구성하였고, 따라서 요소는 12개, 절점은 63개이다. 그림 15는 하중매개변수의 증가에 따른 최대처짐비의 증가양상을 도시한 것이다. 그림 10과 비교하면 처짐비가 급증하는 양상은 완화되었지만  $P_0=0.31$ 과  $P_0=0.357$  사이에서 처짐비가 +다른 증가에 비하여 큼을 알 수 있다. 그림 16은  $P_0=0.31$ 과  $P_0=0.357$ 에 대한 변형형상을 그린 것이다. 대칭아치에 대한 그림 11

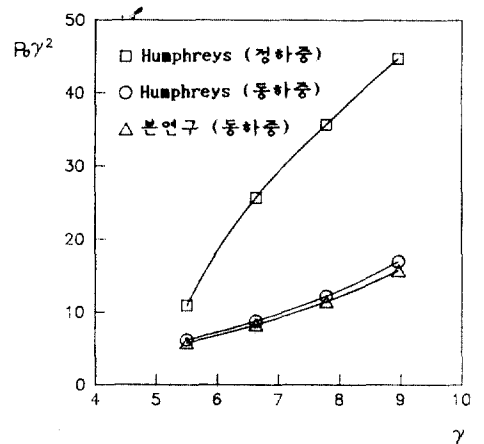


그림 14. 형상매개변수에 따른 좌굴임계하중 비교



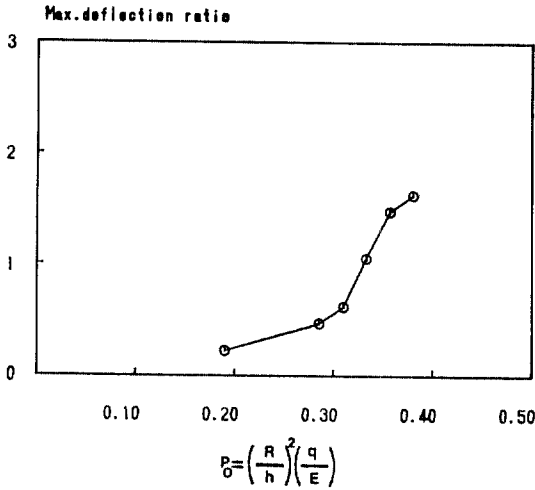


그림 15. 하중매개변수에 따른 최대처짐비

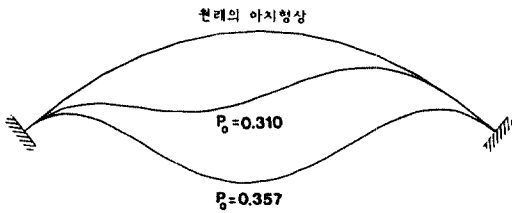


그림 16.  $P_0$ 가 0.310, 0.357인 반재동분포하중이 작용하는 경우의 처짐형상

과 마찬가지로 두 하중매개변수 사이에서 snap-through좌굴이 일어남을 쉽게 알 수 있고, 식 (13)의 기준이 이 경우에도 유용함을 알 수 있다.

## 5. 결론

본 연구에서는 낮은 아치에 대하여 기하학적 비선형성을 고려한 동적해석방법을 연구하였으며, 이를 좌굴해석에 적용하였다. 본 연구를 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) Lagrangian 좌표를 사용하여 기하학적 비선형성을 고려하고, 유한요소에 의한 운동방정식을 Newmark법에 의하여 해석하는 프로그램을 개발하여 낮은 원호아치의 동적비선형해석방법으로 사용할 수 있음을 입증하였다.

(2) 아치의 거동을 무차원 매개변수를 이용하여 해석한 결과, 동일한 형상 매개변수를 가진 아치들은 같은 하중 매개변수를 재하했을 때 시간 매개변

수에 따라 처짐비를 기준으로 같은 거동을 함을 확인하였다.

(3) 큰 동하중을 받는 낮은 원호아치의 경우, 비선형 해석 결과는 선형해석 결과와 큰 차이를 보이므로 비선형해석을 실시하여야 아치의 실제적인 거동을 구명할 수 있을 것으로 판단된다.

(4) Budiansky좌굴기준을 비선형 동적 거동해석에 반영하여, 아치의 동적 좌굴현상을 해석할 수 있는 방식을 제안하였고 이를 예로써 증명하였다.

(5) 동일한 조건 하에서 아치의 높이가 낮아지면 작은 하중에 의해서도 좌굴이 발생하게 되므로, 낮은 아치의 설계시에는 좌굴에 따른 안정성 문제를 고려해함을 알았다.

## 참고 문헌

1. Bolotin, V. V., *The Dynamic Stability of Elastic System*, Holden-Day Inc. 1952, pp. 1-5.
2. Fung, Y. C. and Kaplan, A., *Buckling of Low Arches of Curved Beams of Small Curvature*, National Advisory Committee for Aeronautics, TN 2840, November, 1952, pp. 1-75.
3. Budiansky, B. and Roth, R. S. *Axisymmetric Dynamic Buckling of Clamped Shallow Spherical Shells*, NASA TN D-1510, 1962, pp. 597-606.
4. Humphreys, J. S., "On Dynamic Snap Buckling of Shallow Arches," *AIAA Journal*. Vol. 4, No. 5, May, 1966, pp. 878-886.
5. Lock, M. H., "Snapping of a Shallow Sinusoidal Arch under a Step Pressure Load", *AIAA Journal*, Vol. 4, No. 7, July, 1966, pp. 1249-1256.
6. Hsu, C. S., "On Dynamic Stability of Elastic Bodies with Prescribed Initial Conditions", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 4, No. 1, 1966, pp. 1-21.
7. Fulton, R. E. and Barton, F. W., "Dynamic Buckling of Shallow Arches", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 97, No. EM3, June, 1971, pp. 865-877.
8. Lo, M. L. C. and Masur, E. F., "Dynamic of

- Shallow Arches", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 102, No. EM5, October, 1976, pp. 901-917.
9. Fitzgerald, H. M. and Plaut, R. H., "Snap-Through of a Shallow Arch under the Interaction of Multiple Dynamic Loads", *Developments in Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 10, Stoneking, J. E. ed., Proceedings of the Tenth Southeastern Conference on Theoretical and Applied Mechanics, University of Tennessee, 1980, pp. 495-503.
  10. Welton, R. H. D., "Snap-Through of Arch Model under Multiple Loads", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 104, No. EM4, August, 1978, pp. 964-967.
  11. Gregory, W. E. and Plaut, R. H., "Dynamic Stability Boundaries for Shallow Arches", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 108, No. EM6, December, 1982, pp. 1036-1050.
  12. Sabir, A. B. and Ashwell, D. C. "A Comparison of Curved Beam Finite Elements when used in Vibration Problems", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 10, 1979, pp. 499-503.
  13. Malvern, L. E., *Introduction to the Mechanics of a Continuous Media*, Prentice-Hall, 1969.
  14. Bathe, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, 1982, pp. 351-358, pp. 511-514.
  15. Hoff, N. J. and Bruce, V. G., "Dynamic Analysis of the Buckling of Laterally Loaded Flat Arches", *Journal of Mathematics and Physics*, Vol. 32, 1953, pp. 276-288.

(接受: 1990. 4. 10)