確率的 推論에 관한 考察

An Overview of Probabilistic Reasoning

김 성 혁*
(Kim Sung-Hyuk)

抄 錄

本 硏究에서는 베이지안 理論을 利用한 確率的 추론方法을 도입하여 불확실한 情報에 그 不確實性을 고려해주고, 그러한 過程을 통하여 가설들에 대한 確實性의 程度를 評價해 주는 專門家 대체 시스템을 위한 일종의 지식습득 過程을 전개하였다.

ABSTRACT

The probabilistic reasoning method using Bayesian theory is studied to use uncertain or incomplete knowledge in ways that take the uncertainty into account. This method presented for knowledge acquisition process of expert system to evaluate certainty degree of input knowledge.

Ⅰ. 序 論

1. 不確實한 情報의 表現

수많은 實際狀況下에서 우리가 획득할 수 있는 情報(knowledge)는 不完全하거나 不正確하기가 쉽다. 이같은 경우에 그 情報(knowledge)는 우리가 원하는 論理的 추론을 뒷받침해 주기에는 부적합할 것이다. 그러나 비록 우리의 情報가

---

* 대신경제연구소

不完全하다고 하더라도 우리는 과거 經驗을 要約하여 우리가 아직은 알지 못하는 것에 대하여 豫測하는데 도움이 되는 一般理論이나 近似理論을 만들 수 있다.

確率的 推論方法은 專門家 시스템 1) 2) 에서 不確實하거나 不完全한 情報에 그 不確實性을 고려해주는 方法으로 利用되고 있다. 다시 말해서 確率的 方法論들은 假說들에 대한 증거를 축적하는데 도움이 될 수 있는 것이다.

本 論文에서는 不確實한 情報의 表現方法으로 베이즈 정리를 利用한 確率的 推論方法을 소개하고자 한 것이다.

2. 確率的 情報의 特性

다음과 같은 狀況을 생각해 보자.

한 서울市民이 내일 등산을 가려고 計劃을 세웠을 때 내일 날씨를 알고 싶어 한다고 가정해 보자. 또한 그는 確信하지는 못하지만 내일 비가 올 것이라는 느낌을 갖고 있다고 가정해 보자. 이 '느낌'이라는 것은 얼마나 「사실」과 연결되어 있을까? 이 '느낌'이 등산을 가려는 그의 意思決定에 어떻게 影響을 미칠 수 있을까? 이 '느낌'을 불러 일으킨 그의 마음속에 내재한 意識的 혹은 無意識的 要素는 어떤 것일까? 컴퓨터 프로그램은 이러한 要素들을 어떻게 고려할 수 있을까?

이러한 問題의 답을 얻기 위하여는 직관(혹은 느낌)을 補完해 주거나 實際로 직관의 基礎가 될 수 있는 정형화된 基準이 必要하게 되며, 나아가 정형화된 基準과 직관을 일치시키는 계산메커니즘을 必要로 하게 된다. 이러한 것에 도움이 될 수 있는 것이 바로 確率理論과 經驗的 증거인 것이다.

Ⅱ. 確 率

1. 確實性(Certainty)의 概念

어떤 사실의 진위에 대한 믿음의 程度를 0과 10 사이의 숫자로 表現하도록 하

1) Duda, Richard O., and Reboh, Rene, "AI and Decision Making: The PROSPECTOR Experience," *Artificial Intelligence Application for Business*, Norwood: Ablex Publishing Corporation, 1984, pp.111 ~ 147.

2) Shortliffe, Edward H., *Computer-Based Medical Consultations: MYCIN*, New York: American Elsevier, 1976.

는 것을 생각해 보자. 이때 0을 選擇하는 것은 그 사실이 틀리다는 것을 確信하는 경우이고 10을 選擇하는 것은 그 사실이 맞다는 것을 確信하는 경우이다. 그러나 이러한 경우의 確實性은 단지 그 사실에 대한 主觀的인 믿음을 나타내는 것이지 그 사실의 진위여부를 표현하는 것이 아니기 때문에 "6은 홀수이다"라는 사실에 10의 값을 매기는 것도 可能한 일이며, 또한 받아들여 질 수 있는 것이다(그러나 이때 0의 값이 '이상적인' 確實性의 값이 될 것이다).

이와 같이 어떤 한 사실에 어떤 確實性의 값을 부여하는 것이 可能하다고 할지라도 앞에서처럼 '이상적인' 確實性의 값이 存在하게 된다. 確率은 어떤 한 사실에 關係있는 環境에 대한 가정이 주어졌을 때 그 사실에 이상적인 確實性을 부여하는 方法이며 0과 1 사이의 값을 갖게 된다.[3)]

確率의 計算은 다음의 方式으로 한다.

$$確率 = \frac{\text{원하는 범주에 속하는 사상의 수}}{\text{전체 가능한 사상의 수}}$$

예를 들어 어느 國民學校의 한반은 60名인데 女子는 20名이고 男子는 40명이라고 하면 한 사람을 무작위(random)로 뽑을 때, 그 사람이 여자일 確率P는 다음과 같이 計算된다.[4)]

$$P = \frac{\text{여자의 數}}{\text{전체인원}} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$$

즉 위와 같은 環境下에서 "한 사람을 무작위로 뽑을 때 그 사람이 여자이다"라는 사실에 대한 이상적인 確實性의 값은 $\frac{1}{3}$이 되는 것이다.

2. 공리(Axiom)

다음에는 앞에서 說明한 確率을 이용하여 어떤 結論을 유추하고자 할 때 유용하리라 여겨지는 공리 몇가지를 소개해 보고자 한다.[5)]

---

3) 박정연, 윤영선, 「統計學概論」, 다산出版社, 1984, p.84.

4) 박정연, 윤영선, op. cit., pp.83 ~ 84.

5) Kreyszig, Erwin, *Introductory Mathematical Statistics: Principles and Method*, New York: John Wiley & Sons, 1970, pp.41 ~ 45.

(1) 덧셈의 法則

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

만약 A , B가 공유하는 부분이 없다면, 즉 $A \cap B = \phi$ 이라면

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(2) 곱셈의 法則

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B \mid A) = P(B)\,P(A \mid B)$

A , B가 서로 독립인 경우

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

여기서 A , B는 어떤 사건의 범주이다.

3 . 베이즈의 定理 (Bayes' Rule)

베이즈 정리를 說明하기 위하여 다음과 같은 例를 먼저 들어보자. 우리는 고열에 시달리고 있는 철수가 말라리아에 걸렸을 確率을 알고자 한다. 이때 다음과 같은 두가지 種類의 情報가 알려져 있다고 가정하자.

(1) 一般的인 情報 (Knowledge)

① 어떤 한사람이 말라리아에 걸릴 確率 (증상에 관계없이)

② 말라리아에 걸린 사람이 高熱에 시달릴 確率

③ 말라리아에 걸리지 않는 사람이 高熱에 시달릴 確率

(2) 어떤 사람 (分析對象者) 의 特定한 情報

예를 들면 그가 어떤 증상을 보이고 있는가 하는 따위로서 이들을 記號로 表示해 보면 다음과 같다.

1) 一般的인 情報

① $P(H)$: 어떤 사람이 말라리아에 걸릴 確率

② $P(E \mid H)$: 어떤 사람이 말라리아에 걸렸을 때 그 사람이 高熱에 시달릴 確率 (이와 같은 것을 條件附 確率이라고 한다).

③ $P(E \mid \neg H)$: 어떤 사람이 말라리아에 걸리지 않았음에도 그 사람이 高熱에 시달릴 確率

2) 特定한 情報

철수가 高熱에 시달리고 있다는 사실 (여기서 H는 말라리아에 걸렸다는 가설이고 E는 高熱에 시달린다는 事件 (event) 이다)

우리가 알고자 하는 것은 高熱에 시달리고 있는 (event E, 증거, 증상) 철수가 말라리아에 걸렸을 (가설H) 確率, 즉 P (H | E) 이다. 이러한 問題를 해결하기 위하여 다음의 베이즈 定理를 利用하게 된다.[6]

$\{H_1, H_2, \cdots\cdots H_n\}$: 서로 독립인 가설들의 집합, $P(H_i) \neq 0$,
$i = 1, 2, \cdots\cdots n$

$$P(H_k \mid E) = \frac{P(E \mid H_k)\, P(H_k)}{P(E)}$$

$$= \frac{P(E \mid H_k)\, P(H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\, P(E \mid H_i)}$$

예를 들어 P (H) = 0.0001, P (E | H) = 0.75, P (E | ¬H) = 0.14 인 경우, 위에서의 確率은 다음과 같이 구해진다.

$$P(E) = 0.75 \times 0.0001 + 0.14 \times 0.9999 \approx 0.14006$$

$$P(H \mid E) = \frac{0.75 \times 0.0001}{0.14006} \approx 0.0005354$$ [7]

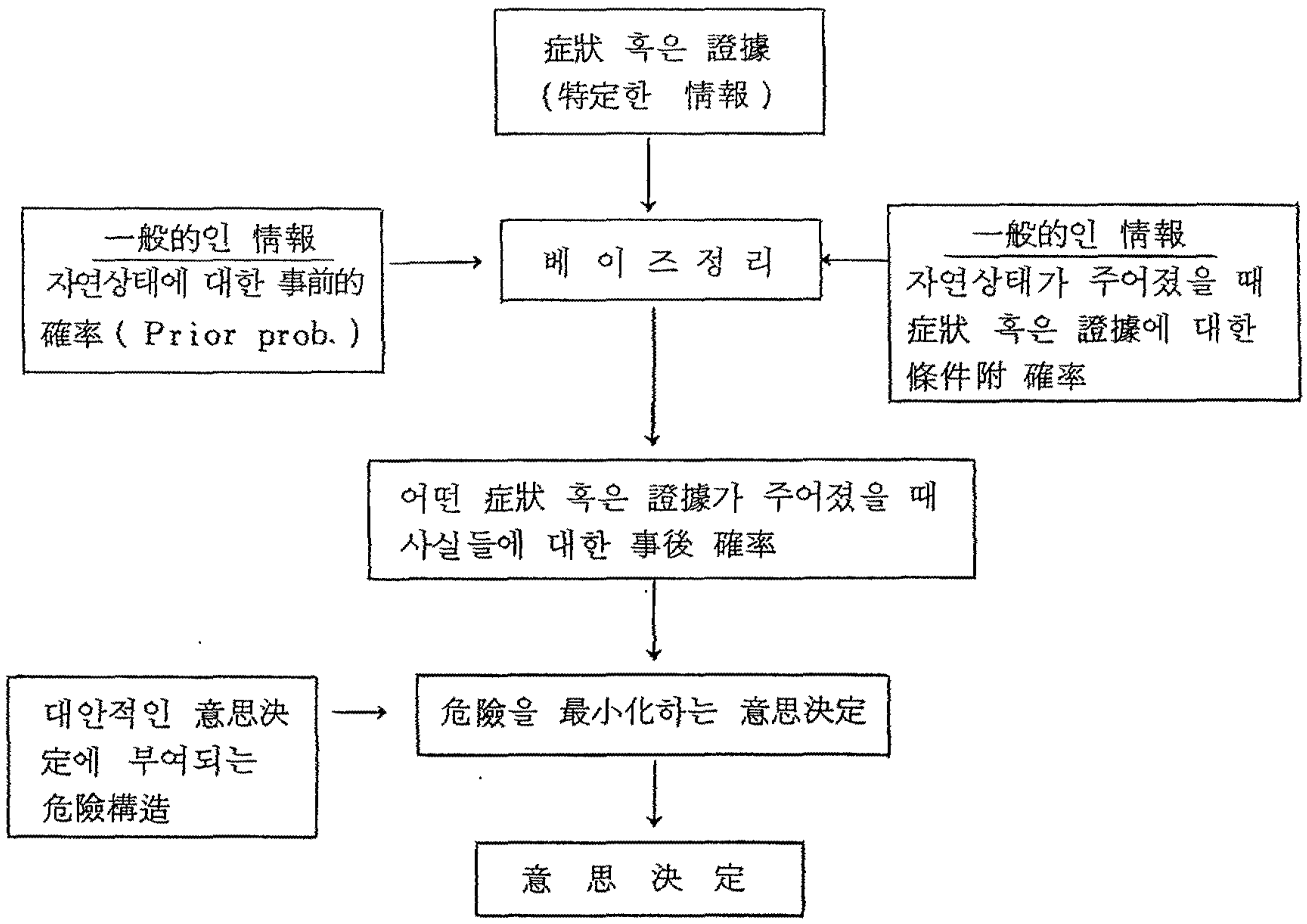
여기서 우리는 철수가 高熱에 시달리고 있다는 사실을 앎으로 해서 그가 말라리아에 걸렸을 確率이 5倍정도 增加되었음을 알 수 있다(P(H)=0.0001이므로).

만약 우리가 앞의 例에서와 같은 推論問題에서 항상 正確한 一般的인 情報 (knowledge) 를 얻을 수 있다면 모든 증거 (evidence) 를 고려하여 다양한 事件에 대한 確率을 제시할 수 있는 단순하고도 명백한 意思決定 體系를 構築할 수

6) Chernoff, Herman and Moses, Lincoln E., *Elementary Decision Theory*, New York : John Wiley & Sons, 1987, pp.166 ~ 194.

7) 베이즈 整理는 앞에서 說明한 공리에 의하여 유도될 수도 있다.
$P(H \cap E) = P(E)\,P(H \mid E)$: 곱셈의 법칙
$$\Rightarrow P(H \mid E) = \frac{P(H \cap E)}{P(E)}$$
$$= \frac{P(E \mid H)\, P(H)}{P(E)} \text{ : (베이즈의 定理)}$$

〈圖 1〉 이상적인 意思決定 體系의 形態



있을 것이다 (〈圖 1〉).

불행하게도 우리는 健康하다고 할 때 일단의 症狀들의 條件附 確率에 대한 正確한 情報를 갖고 있지 않기 때문에 위와 같은 이상적인 시스템을 성공적으로 構築할 수가 없다 (예를 들면 앞에서 $P(E \mid \neg H)$에 대한 正確한 確率을 얻는 것이 不可能하다는 것). 그러나 우리는 "確率的 推論網 (Probability Inference Network)을 利用하여 證據 (혹은 症狀)와 結論 (最終 意思決定 假說) 사이의 관계를 보다 간단하게 表現함으로써 앞에서의 問題를 解決할 수 있다.

Ⅲ. 確率的 推論網

1. 適 用 領 域

確率的 推論網의 構造는 意思決定體系를 나타내기 위한 典型的인 構造로서 제시

된다. 이들은 다음의 特性을 갖는 情報處理 業務를 다루는데 아주 유용하다.[8)]

① 일단의 情報들이 다양한 水準의 確實性과 完全性을 갖고 있다.

② 최적 혹은 거의 최적의 意思決定이 必要하다.

③ 主要한 代案을 옹호하는 주장을 정당화하는 것이 必要하다.

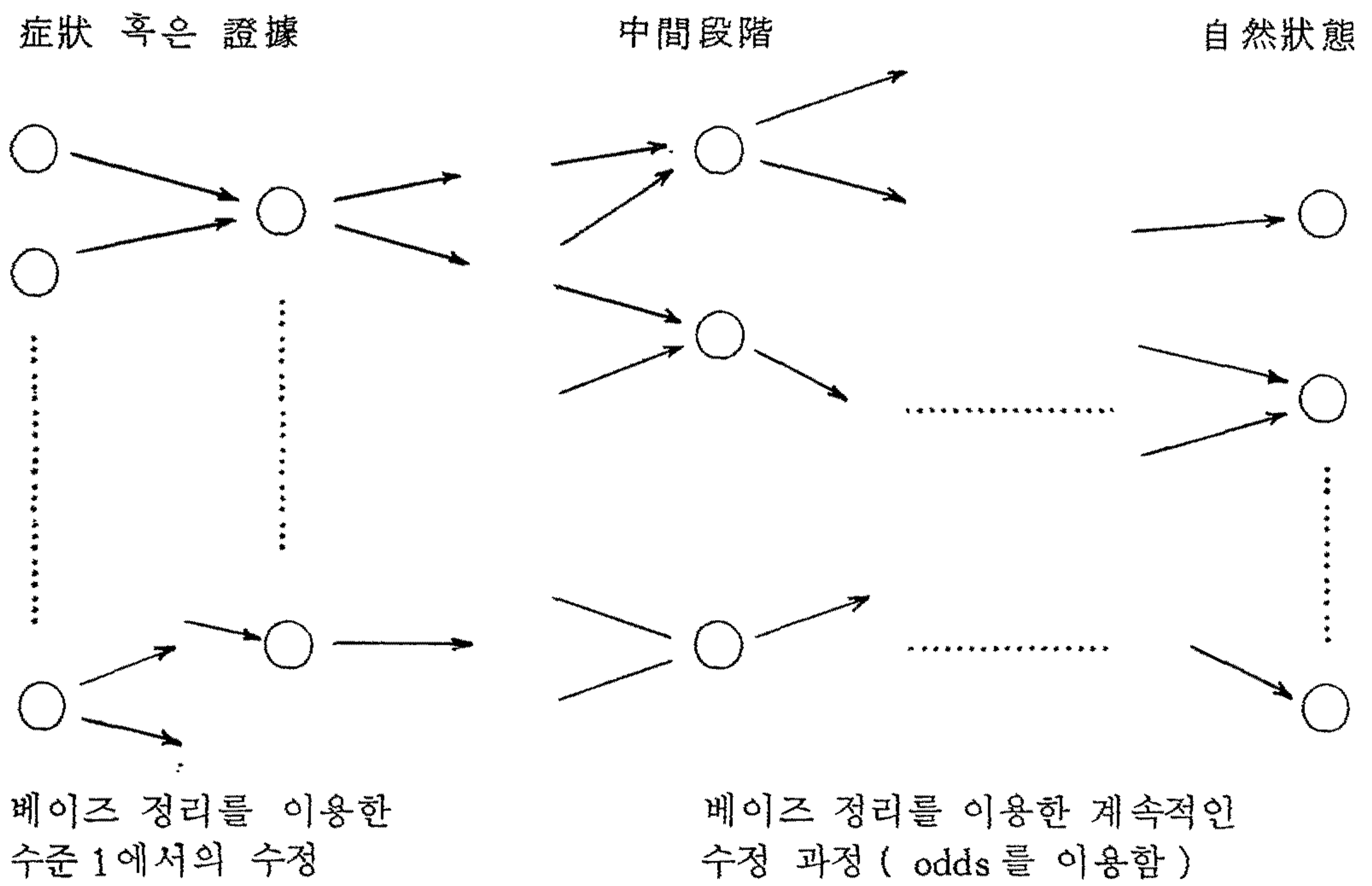
④ 一般的인 推論法則이 잘 알려져 있거나 發見될 수 있다.

2 . 推論網의 構成要素

다양한 자연상태 (state of nature, 例에서는 말라리아에 걸렸거나 안걸렸거나 하는 狀態) 가 주어졌을 때 여러가지 可能한 證據 (혹은 症狀) 에 대한 正確한 條件附 確率의 부재로 인하여 成功的인 推論網은 베이즈 定理로부터 직접적으로 開發될 수 없다. 이에 대한 합리적인 대안은 " Fuzzy assertions " 또는 여러가지 가설 (hypothesis) 들을 開發하여 水準 $k+1$ 에서의 가설들을 입증하기 위하여 k 水準에서의 입증된 가설들을 利用하는 것이다 (〈圖 2〉參照).

本論文에서는 베이즈 정리를 利用하여 가설들의 階層構造 (hierarchy) 를 開發

〈圖 2〉 確率的 推論網의 시스템



8) Tanimoto, S.L., *The Element of Artificial Intelligence : An Introduction Using LISP*, Computer Science Press, 1987, p.245.

하고 이것을 利用하여 推論을 해나가는 方式을 택하였다.

3. 推論網의 構成段階

推論網의 構成을 위한 基本的인 段階는 다음과 같다.[9)]

① 관계있는 모든 입력 (input) 의 決定 (例) 가능한 證據 (症狀) 의 집합)

② 自然狀態 (state of nature) 나 결정대안 (decision alternatives) 의 결정

③ 推論網에서 유용하리라 생각되는 中間段階 (intermediate assertions) 의 결정

④ 推論 고리 (link) 의 構成

⑤ 確率의 調整 (퍼지 論理를 利用할 경우에는 퍼지 推論함수의 調整)

이 段階들의 각각에 대하여 좀더 자세히 說明을 하면 다음과 같다.

① 關係있는 입력의 構成을 위한 方法

研究對象에 대한 모든 알려진 속성들을 나열하여 可能한 入力의 가장 큰 범주를 構成하고 관계가 깊다고 생각되는 것만 골라낸다 (特定한 속성이 研究對象과 관련이 있는 것 뿐만 아니라 이미 關聯이 있는 것으로 알려진 어떤 속성이 있는 것을 망라한다).

② 研究對象 (自然狀態 혹은 決定代案) 의 決定

③ 中間段階 (Intermediate assertions) 의 決定

직접적으로 관찰할 수는 없지만 어떤 合理的인 方法으로 研究對象이나, 입력과 確率的으로 연결되어 있는 속성들이 中間段階의 基礎를 形成하게 된다.

④ 推定고리의 構築

가장 간단한 論理的 關係에 대한 調査에서부터 점차 복잡하게 進行해 간다. 이와 같은 過程속에서 論理的인 關係가 찾아질 때마다 그들 사이의 연결고리가 더해지는 것이다.

⑤ 確率의 調整

本論文에서는 주관적 베이지안 (subjective Bayesian) 과 베이지안 수정 (Bayesian updating) 함수를 사용하였다.[10)]

---

9) Charniak, Eugene and McDermott Drew, Introduction to Artificial Intelligence, READING.: Addison-Wesley Publishing Co., 1984, pp.477 ~ 480.

10) Duba, R.O., Hart, P.E. and Nilsson, N.J., " Subjective Bayesian Methods for Rule-based Inference System," *Proceedings of the AFIPS National Computer Conference*, v.45, 1976, pp.1075 ~ 1082.

Ⅳ. 推論網에서의 修正過程

우리는 여기서 假說과 연결된 確率들을 수정하는 手段을 설명하게 된다. 통상적으로 "주관적인 베이지안" 修正規則이라 불리우는 일련의 그러한 手段은 "PROSPECTOR"[11], "MYCIN[12]" 같은 專門家 시스템에서 유용한 것으로 입증되어 있다.

1. Odds 와 베이즈 정리

앞에서 提示했듯이 베이즈 定理는 다음과 같이 公式化된다.

$$P(H \mid E) = \frac{P(E \mid H)\,P(H)}{P(E)}$$

한편 이것을 利用하여 가설의 부정에 대한 確率을 다음과 같이 表現할 수 있다.

$$P(\neg H \mid E) = \frac{P(E \mid \neg H)}{P(E)}$$

이제 우리는 이 두 가지의 公式을 나눔으로 해서 베이즈 定理에 대한 'Odds likelihood formulation'을 얻을 수 있는 데 이것은 다음 Odds의 定義에 의한 것이다.

- Odds (어떤 事件이 發生할 確率과 發生하지 않을 確率의 比率).
  發生確率 $P(X)$를 갖는 事件(event) X는 다음과 같은 Odds를 갖는다.

$$O(X) = \frac{P(X)}{1-P(X)} \quad \left(\Rightarrow P(X) = \frac{O(X)}{1+O(X)}\right)$$

따라서 $O(X)$가 1이라고 하는 것은 事件 X의 發生確率이 $\frac{1}{2}$이라는 것을 의미하는 것이다. 이러한 odds의 定義를 利用하여 우리는 베이즈 定理에 대한 odds

11) Duda, Richard O., Gasching, John G., and Hart, Peter E., "Model Design in the PROSPECTOR Consultant System for Mineral Exploration," *Expert Systems in the Microelectronic Age*, D. Michie, ed., Edinburgh: Edinburgh University Press, 1980, pp.153~167.

12) Shortliffe, Edward H., *op. cit.*

liklihood formulation 을 다음과 같이 간단히 表現할 수 있다.

$$O(H \mid E) = \lambda O(H)$$ [13]

여기서 O (H) 는 가설 H에 대한 사전적 odds 이며 λ는 likelihood ratio $\frac{P(E \mid H)}{P(E \mid \neg H)}$ 로 定義된다.

따라서 우리는 가설 H에 대한 사전적 odds 에 λ를 곱함으로 해서 證據 E가 주어졌을 때 H에 대한 odds 를 수정할 수 있는 것이다 (推論網의 構成에서 專門家는 各 規則 (Rule) 에 대해서 λ값을 마련해 주어야 할 것이다. 이때 λ에 대한 信賴度를 높이기 위한 問題는 향후 좀더 補完되어야 할 것이다) . 이때 λ가 1보다 훨씬 크다면 證據 E의 存在가 가설 H의 事實性을 상당히 뒷받침해 주고 있다는 것을 지적하는 강도가 높다는 것을 의미하는 것이다. 한편 λ가 0에 가깝다면 그 證據 E의 存在는 가설 H의 사실성을 희박하게 하는 것이라 할 수 있겠다 (이 때문에 λ를 충분계수 (sufficiency coefficient) 라고도 한다) .

이제 證據 E가 잘못된 것이거나 存在하지 않는다고 가정해 보자. 그러면 우리는 다음의 odds likelihood formulation 을 얻을 수 있다.

---

13) O (H | E) = λO (H) 의 증명

$$O(H \mid E) = \frac{P(H \mid E)}{1 - P(H \mid E)} \quad (\text{odds의 정의})$$

$$= \frac{\dfrac{P(E \mid H)P(H)}{P(E)}}{1 - \dfrac{P(E \mid H)P(H)}{P(E)}} \quad (\text{베이즈 정리, 분자 분모에 } P(E)\text{를 곱함})$$

$$= \frac{P(E \mid H)P(H)}{P(E) - P(E \mid H)P(H)}$$

$$= \frac{P(E \mid H)P(H)}{P(E \mid H)P(H) + P(E \mid \neg H)P(\neg H) - P(E \mid H)P(H)}$$

$$= \frac{P(E \mid H)P(H)}{P(E \mid \neg H)P(\neg H)}$$

$$= \frac{P(E \mid H)P(H)}{P(E \mid \neg H)\{1 - P(H)\}}$$

여기서 $\frac{P(E \mid H)}{P(E \mid \neg H)} = \lambda$라 하면

$$= \lambda \frac{P(H)}{1 - P(H)}$$

$$= \lambda O(H)$$

$$O(H/\neg E)=\lambda' O(H)$$

여기서 $\lambda' = \dfrac{P(\neg E \mid H)}{P(\neg E \mid \neg H)} = \dfrac{1-P(E \mid H)}{1-P(E \mid \neg H)}$

이것은 證據 E가 存在하지 않는다는 情報가 주어졌을 때 가설 H에 대한 odds 를 수정하는 方法을 마련해 주는 것이다. 이때 λ'가 0보다 크고 1보다는 아주 작다면, 證據 E가 存在하지 않는다고 하는 것은 가설 H의 사실 可能性이 아주 희박하다는 것을 나타내는 것이라고 할 수 있겠다(이 때문에 λ'을 필요계수 (necessity coefficient)라고 부른다).

여기서 한 가지 지적하고 싶은 것은 一般的으로 λ'도 λ와 마찬가지로 專門家가 마련해 주어야 한다고 하는 旣存의 생각은 정정되어야 한다는 것이다. 왜냐하면 베이스 정리의 一般的인 情報 (Knowledge)들 — $P(H)$, $P(E \mid H)$, $P(E \mid \neg H)$ — 중 實質的으로 問題가 되는 것은 $P(E \mid \neg H)$, 즉 우리의 例에서는 말라리아에 걸리지 않았을 때 高熱의 確率이기 때문에 ($P(H)$, $P(E \mid H)$은 一般的으로 구할 수 있는 것으로 생각되고 앞에서도 지적되어 있다.) λ'은 λ에 의해서 充分히 誘導될 수 있기 때문이다.[14)]

앞에서의 例로 다시 돌아가 보자 (철수가 高熱로 시달리고 있을 때 말라리아에 걸렸을 確率에 대한 例).

여기서 $P(H) = 0.0001$이기 때문에 사전적 odds는 近似的으로 0.0001이다.

$$\left(O(H) = \frac{P(H)}{1-P(H)} \approx 0.0001 \right)$$

또 $P(E \mid H) = 0.75$, $P(E \mid \neg H) = 0.14$이기 때문에 $\lambda = \dfrac{0.75}{0.14} = 5.3571$, $\lambda' = \dfrac{1-0.75}{1-0.14} \approx 0.2907$이다. 우리는 철수가 高熱에 시달리고 있다는 것을 알기 때문에 사전적 odds를 λ에 의하여 수정할 수 있다.

---

14) $\lambda = \dfrac{P(E \mid H)}{P(E \mid \neg H)} \Rightarrow P(E \mid \neg H) = \dfrac{1}{\lambda} P(E \mid H)$

$$\lambda' = \frac{1-P(E \mid H)}{1-P(E \mid \neg H)} = \frac{1-P(E \mid H)}{1-\frac{1}{\lambda}P(E \mid H)}$$

$$= \frac{\lambda - \lambda P(E \mid H)}{\lambda - P(E \mid H)}$$

$$O(H \mid E) = \lambda O(H) \approx 5.3571 \times 0.0001 \approx 0.000536$$

어떤 한 證據(evidence)가 存在한다는 情報나 不在한다는 情報가 주어지면 우리는 앞에서와 같은 方法으로 가설 H에 대한 odds를 수정할 수 있게 된다. 즉 만약 證據가 存在하면 事前的 odds, $O(H)$에 λ를 곱하고 存在하지 않으면 λ'를 곱하여 수정하게 되는 것이다. 그러나 確率的 推論網에 있는 대부분의 推論 規則들은 不確實하거나 不完全하게 作動하기 때문에 지금까지 설명한 것보다 좀더 다양한 形態로 確率들을 수정해 나갈 수 있을 것이다.

2. 不確實한 證據를 다루는 方法

앞에서 설명한 證據 E가 어떤 觀測値 E′에 의하여 토대를 이루고 있는 경우에 대하여 생각해 보자. 이때 證據 E가 모호한 것일 때는 證據 그 자체를 베이즈정리에 직접 使用할 수 없다. 즉, 觀測値 E′을 利用하여 $P(E \mid E')$, $P(\neg E \mid E')$을 갖는 證據 E의 모호성을 補完해야 하는 것이다. 이것은 다음의 確率法則을 따르게 된다.

$$P(H \mid E') = P(H \mid E \cap E')\,P(E \mid E') + P(H \mid \neg E \cap E')\,P(\neg E \mid E')$$

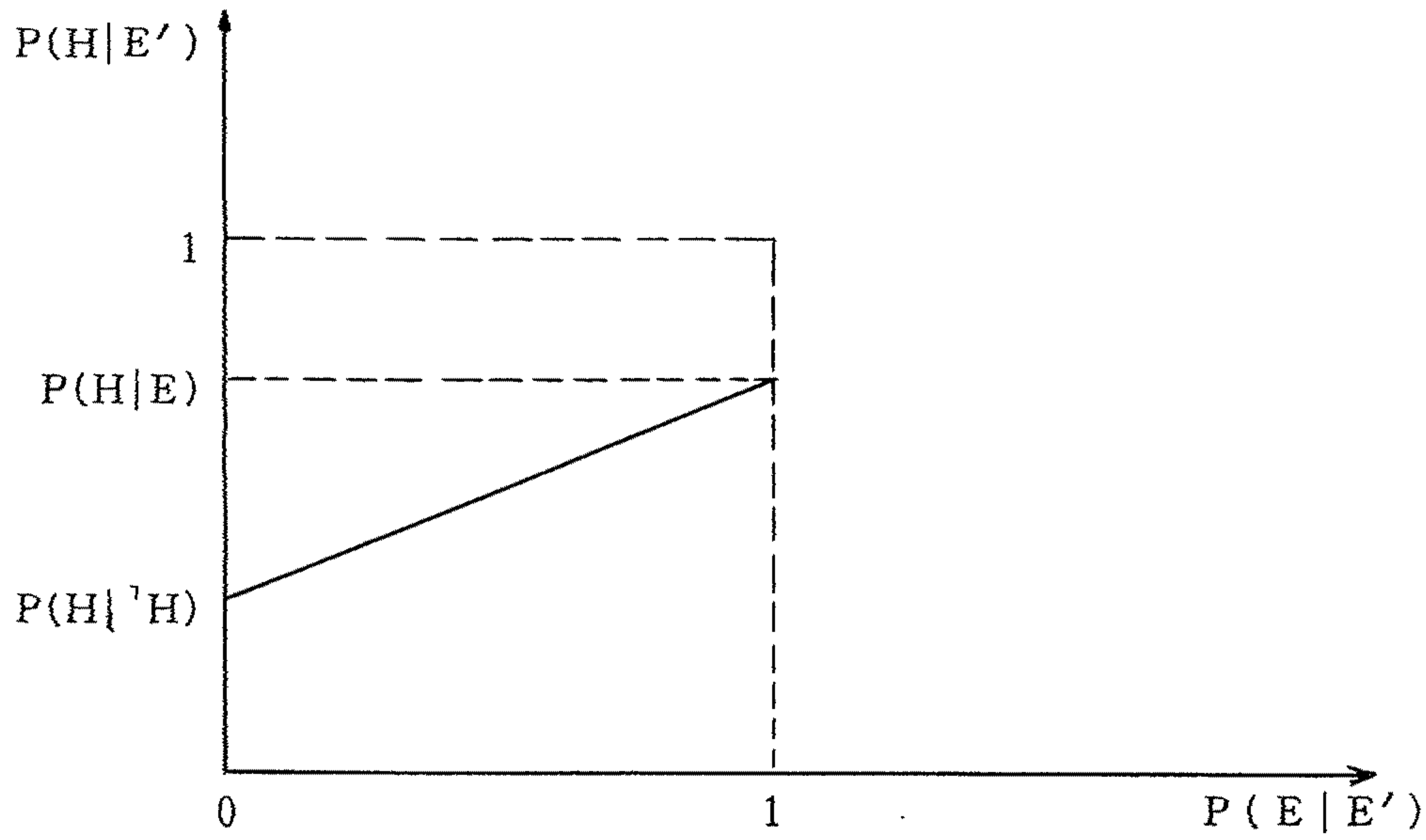
여기에서 가설 H에 E가 주어졌을 때 E′과 독립(conditional independent)이라고 가정하고 또 ¬E가 주어졌을 때 E′과 독립이라고 가정한다면 위의 식은 다음과 같이 단순화될 수 있다.

$$\begin{aligned} P(H \mid E') &= P(H \mid E)\,P(E \mid E') + P(H \mid \neg E)\,P(\neg E \mid E) \\ &= t\,P(H \mid E) + (1-t)\,P(H \mid \neg E) \\ &\text{여기서}\quad t = P(E \mid E') \end{aligned}$$

t의 값과 $P(H \mid E')$의 관계를 그림으로 나타내 보면 〈圖 3〉과 같다.

앞에서의 例로 다시 돌아가 보자. 철수의 체온이 어떤 믿을 수 없는 간호사에 의하여 체크되었다고 가정해 보자. 그녀의 信賴度는 $P(E \mid E') = 0.8$이다($P(E \mid E')$: 그 간호사가 고열이라고 했을 때 철수가 정말로 高熱일 確率). 이때 철수가 말라리아에 걸려있을 確率 $P(H \mid E')$은 다음과 같이 구할 수 있다.

〈圖 3〉 가설 H를 수정하기 위한 함수



$$P(H \mid E') = 0.8 \times P(H \mid E) + (1 - 0.8)\,P(H \mid \neg E)$$
$$\doteqdot 0.8 \times 0.0005354 + 0.2 + 0.000029$$
$$= 0.0004341$$

이 確率은 그 간호사가 100% 信賴性이 있는 경우보다 약 20% 정도 철수가 말라리아에 걸렸을 確率을 낮춰주고 있는 것이다.

사실 앞에서 우리가 선택한 선형함수는 임의적인 것이며 몇몇 경우에는 그렇지 않은 경우도 存在할 수 있다.

3. 베이지안 딜레마

確率的 推論網에서 의미있는 方法으로 베이즈 정리를 利用하기 위하여는 推論網에 포함되는 사전적 確率들의 一致性 (consistency) 이 保障되어야 한다. 즉 觀測値 E′ 없이 만약 우리가 증상 E에 대한 事前的 確率을 利用하여 H에 대한 수정된 確率을 구하려고 한다면 그 수정은 H의 事前的 確率, 즉 P (H) 를 提供해야 하는 것이다. 그러나 실제로 專門家가 우리의 推論網에서의 다양한 情報에 대한 確率을 부여하고 위의 條件을 만족시키지 못하는 事前的 確率를 마련하는 것은 쉬운 일이다.

예를 들어 어떤 의사가 症狀 E의 確率을 0.3이라고 주장한다고 가정하자. 이때

$P(H \mid \hat{E} = 0.3)$은 앞에서의 선형함수를 利用하여 다음과 같이 계산된다.

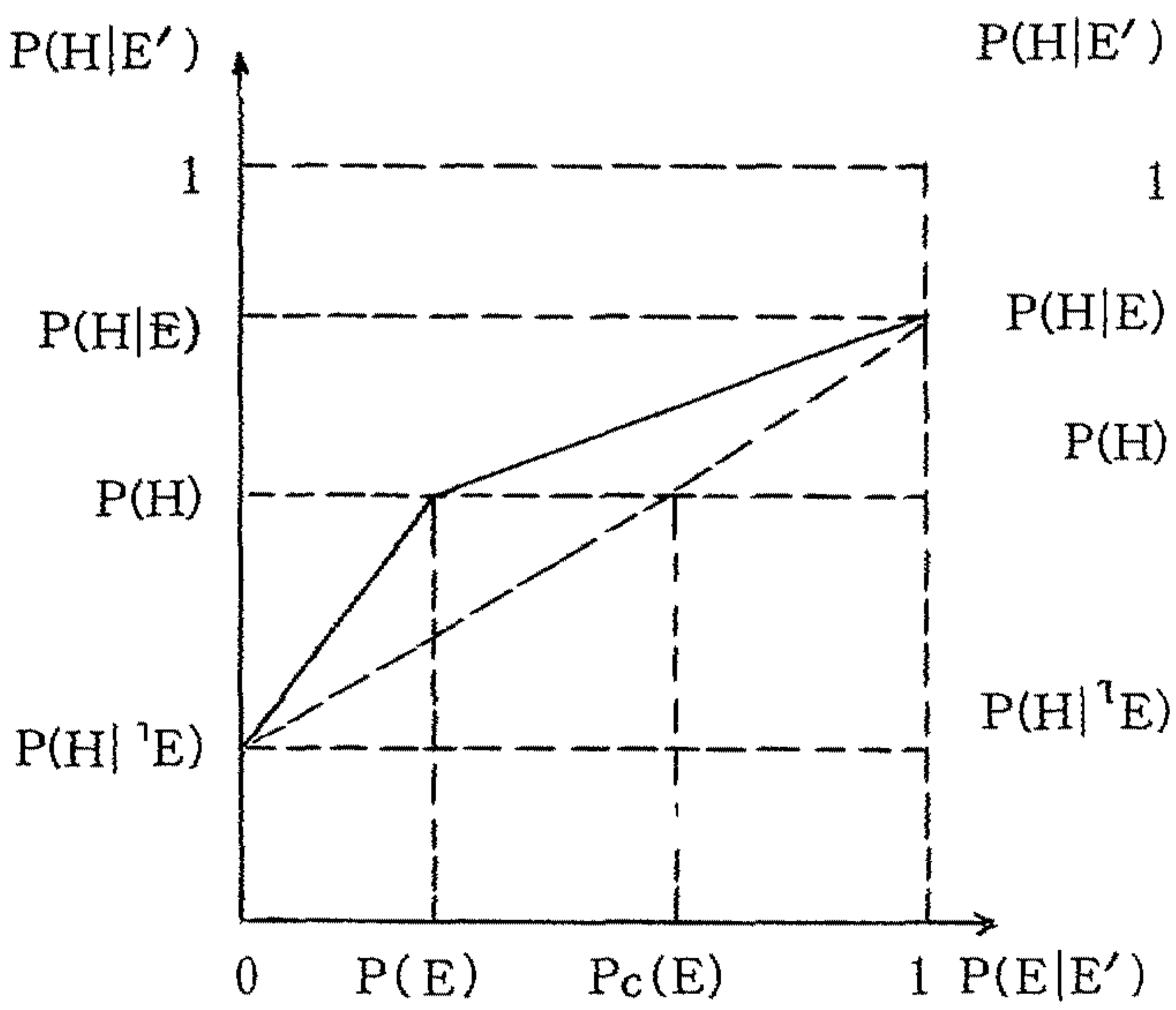
$$P(H \mid \hat{E}) = 0.3 \times 0.0005354 + 0.7 \times 0.000029 \approx 0.000181$$

이 값은 $P(H)$의 값보다 약 80% 정도 더 큰 값이다. 이러한 경우 事前的 確率의 집합은 不一致 (inconsistent)하다고 한다. 이러한 不一致性 (inconsistency)를 除去하기 위한 몇가지 方法들이 提示되어 왔는데 그것은 앞에서 보여준 것과 같은 가설 H의 確率을 수정하기 위하여 使用된 선형함수 대신에 piece-wise 선형함수를 利用하였다. 이 함수는 專門家에 의하여 주어진 證據 E에 대한 事前的 確率과 가설 H에 대한 事前的 確率을 좌표로 하는 점을 통과하도록 고안된 것이다.

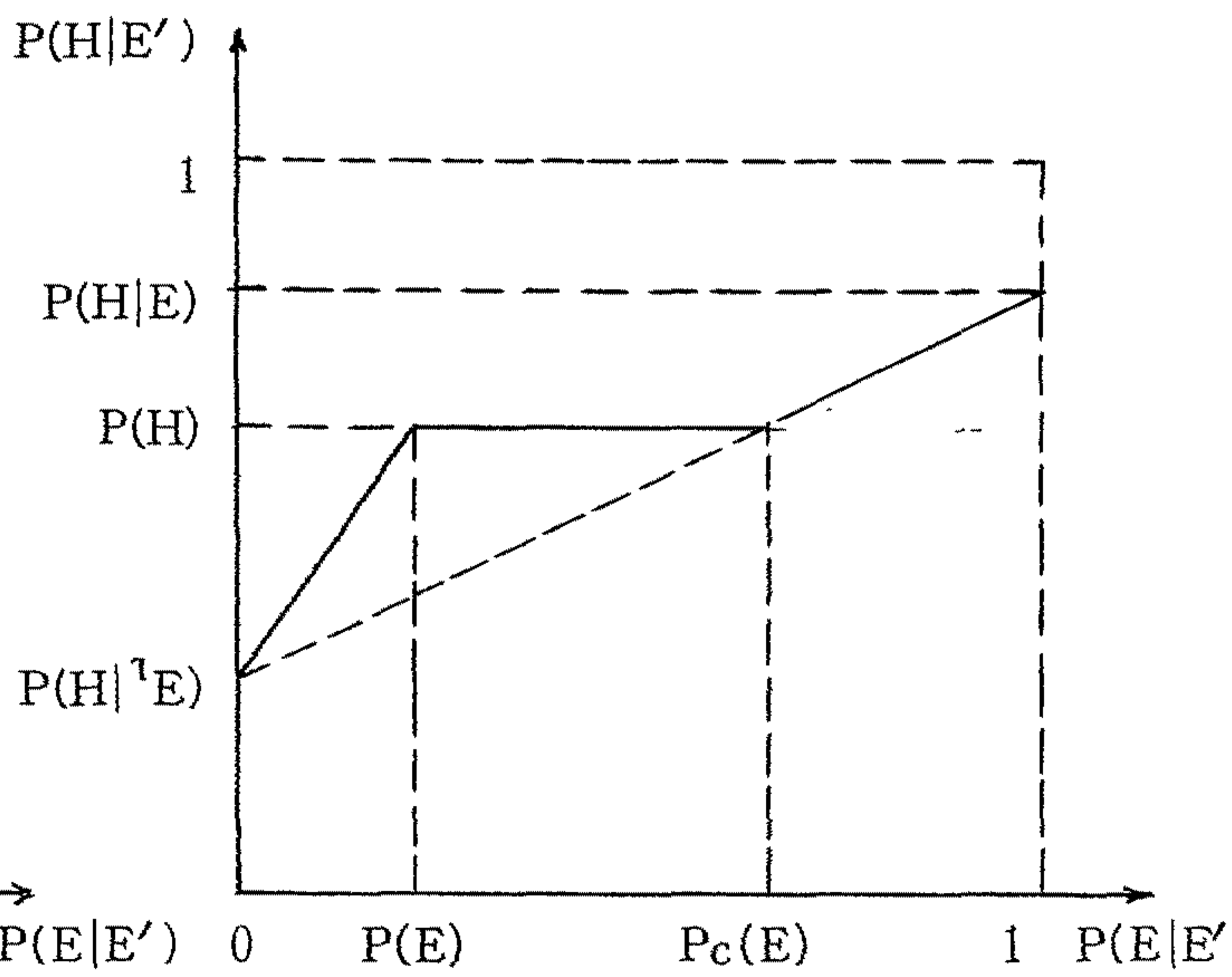
이러한 方法을 이용한 例가 〈圖 4〉와 〈圖 5〉에 있다.

두개의 또다른 piece-wise 선형함수가 〈圖 6〉과 〈圖 7〉에 나타나 있다. 〈圖 6〉은 證據 E가 存在하지 않을 때, 즉 E의 發生確率이 事前的 確率일 때와 비교하여 아주 작을 때는 가설 H에 대한 確率에 아무 影響도 주지 않았다는 것이고, 〈圖 7〉은 $P(E \mid E')$가 事前的 確率보다 작으면 작을수록 $P(H \mid E')$에 역方向으로 影響을 준다는 것이다.

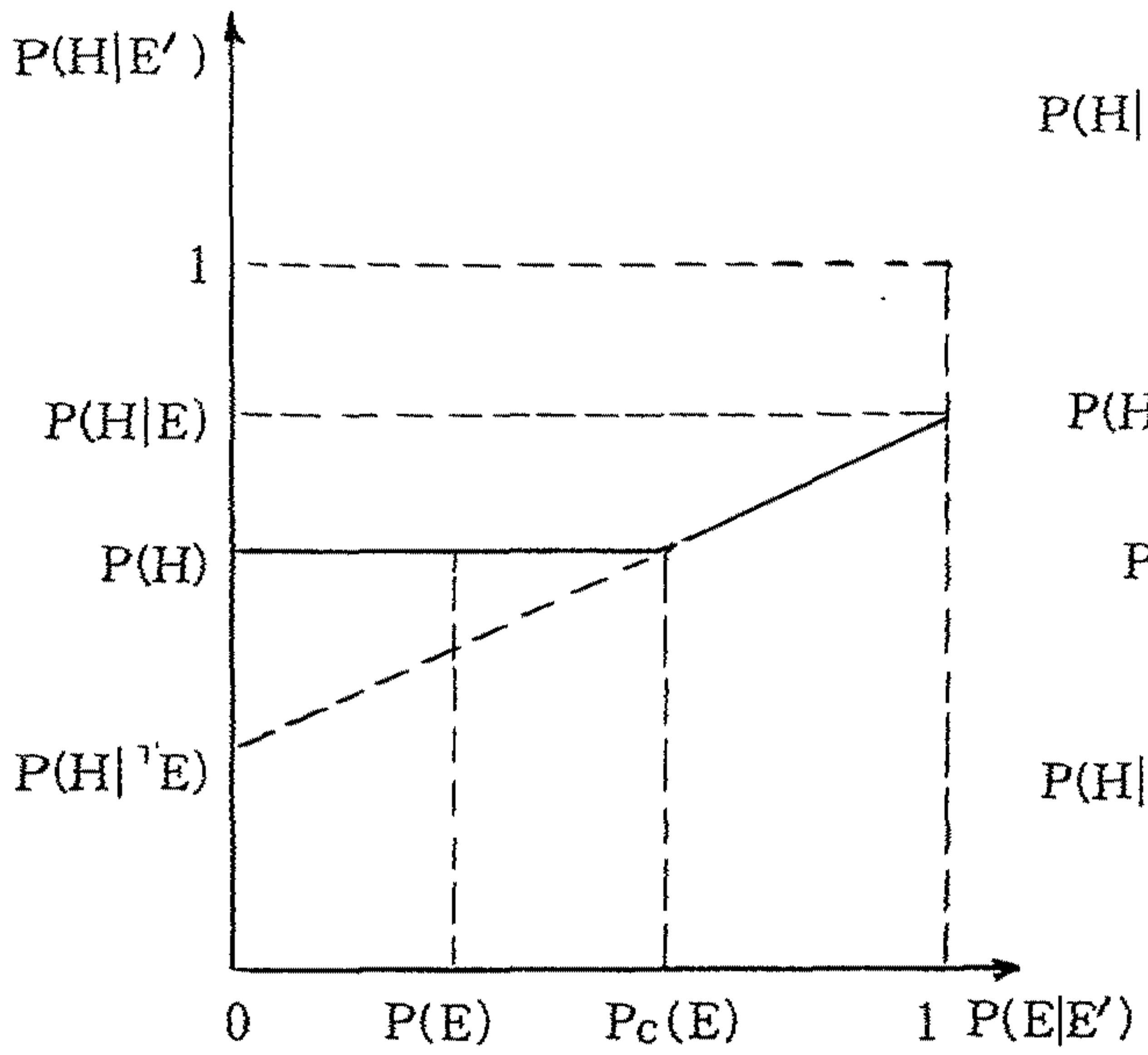
〈圖 4〉 가설 H의 確率을 수정하기 위한 Piecewise 선형함수 (1)



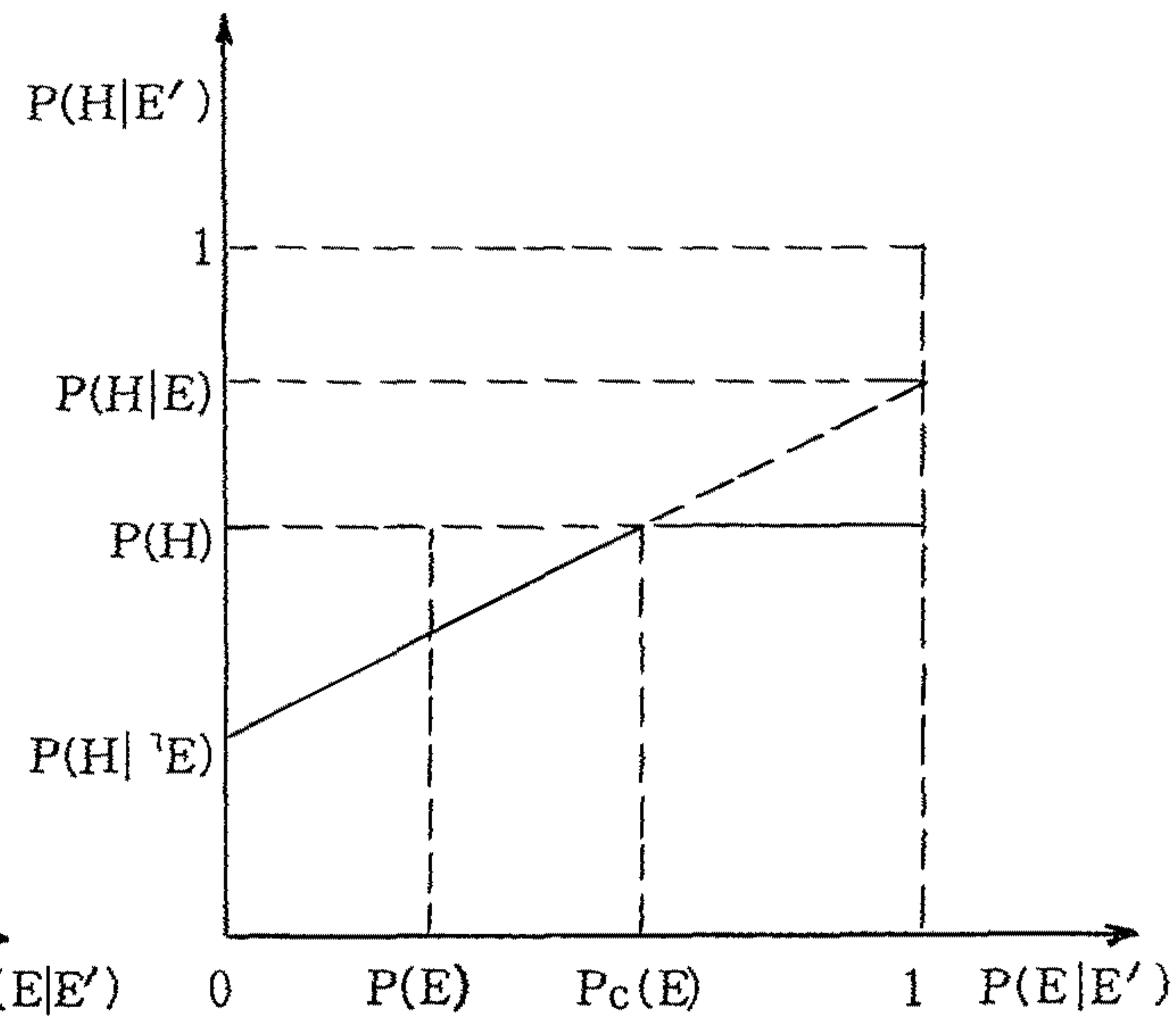
〈圖 5〉 가설 H의 確率을 수정하기 위한 Piecewise 선형함수 (2)



〈圖 6〉"Sufficiency-only" 수정 함수



〈圖 7〉"Necessity-only" 수정 함수



* C : Consistency

4. 確率들의 修正過程

〈圖 3〉의 함수는 대부분의 狀況에서 가설 H에 대한 確率을 수정하기 위한 훌륭한 도구를 提供해 주고 있다. 이 함수를 利用한 수정과정은 다음의 단계를 거치게 된다.

단계 1. P(H | E)를 계산한다.

$$P(H \mid E) = \frac{O(H \mid E)}{1+O(H \mid E)} = \frac{\lambda O(H)}{1+\lambda O(H)}$$

단계 2. P(H | ㄱE)를 계산한다.

$$P = (H \mid \neg E) = \frac{O(H \mid \neg E)}{1+O(H \mid \neg E)} = \frac{\lambda' O(H)}{1+\lambda' O(H)}$$

단계 3. 〈圖 3〉에서의 함수를 利用하여 P(E | E′)으로부터 P(H | E′)

를 계산한다.[15)]

$$P(H|E')=\begin{cases}\dfrac{P(H)-P(H|\urcorner E)}{P(E)}\cdot P(E|E')+P(H|\urcorner E), & P(E|E')\le P(E)\text{일때}\\ P(H)+\{P(E|E')-P(E)\}\{P(H|E)-P(H)\} & \\ \times\ \dfrac{1}{1-P(E)}, & P(E|E')>P(E)\text{일때}\end{cases}$$

5. 서로 獨立인 證據들을 結合하는 方法

證據 E는 一般的으로 다음과 같이 복합된 사건 (event) 으로 構成된다.

$$E=E_1\ \&\ E_2\ \&\ \cdots\cdots\cdots\ \&\ E_k$$

그래서 구하고자 하는 確率은 症狀들의 결합분포 (joint distribution)에 依存하게 되는데 이것은 아주 복잡하거나 거의 알려져 있지 않다. 따라서 이러한 問題를 극복하기 위하여 E_i들의 독립성이 必要하게 된다. 즉,

$$P(E_1\cap E_2\cap\cdots\cdots\cap E_k\mid H)$$
$$=P(E_1\mid H)\times P(E_2\mid H)\times\cdots\cdots\times P(E_k\mid H)$$

---

15) 〈圖 3〉의 함수.

i) $P(E\mid E')>P(E)$일 때

$$\underbrace{P(H\mid E')}_{y}=\underbrace{\frac{P(H\mid E)-P(H)}{1-P(E)}}_{a\ (\text{기울기})}\cdot\underbrace{P(E\mid E')}_{x}+\underbrace{\frac{P(H)-P(E)P(H|E)}{1-P(E)}}_{y\text{절편}}$$

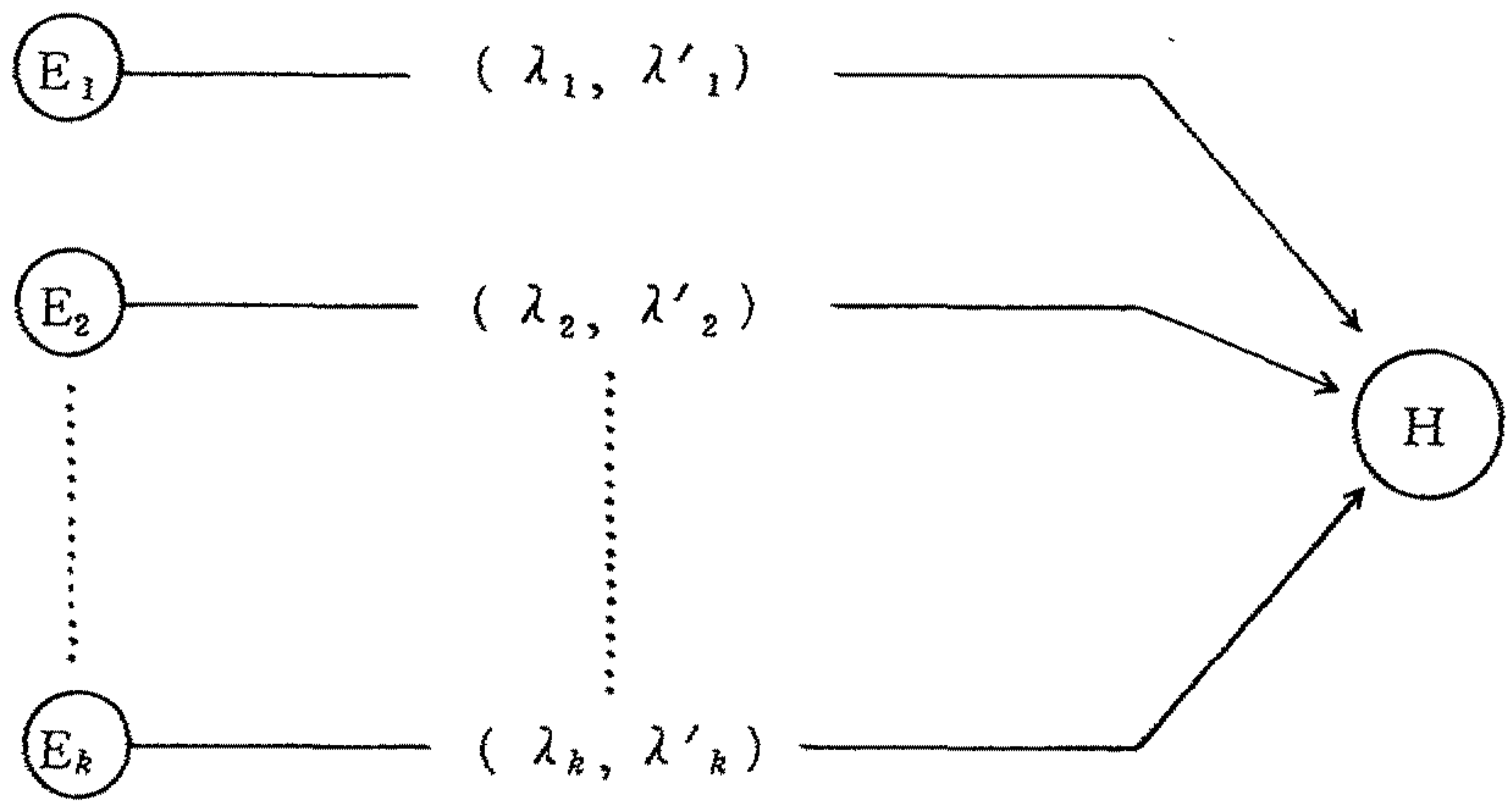
$$=\frac{\{P(H|E)-P(H)\}\{P(E|E')-P(E)\}+P(H)-P(H)P(E)}{1-P(E)}$$

$$=P(H)+\frac{1}{1-P(E)}\{[P(H|E)-P(H)][P(E|E')-P(E)]\}$$

ii) $P(E\mid E')\le P(E)$일 때

$$\underbrace{P(H\mid E')}_{y}=\underbrace{\frac{P(H)-P(H\mid\urcorner E)}{P(E)}}_{a\ (\text{기울기})}\cdot\underbrace{P(E\mid E')}_{x}+\underbrace{P(H\mid\urcorner E)}_{y\text{절편}}$$

〈圖 8〉　　서로 獨立된 證據의 集合



이러한 證據들을 利用한 가설 H의 修正은 다음과 같이 단순화 될 수 있다(〈圖 8〉參照).

$$O(H \mid E_1, E_2, \cdots\cdots E_k) = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \cdots\cdots \times \lambda_k O(H)$$

$$\text{여기서 } \lambda_i = \frac{O(H \mid E_i)}{O(H)}, \quad i = 1, 2, \cdots\cdots k$$

이와 같은 단순화는 計算過程에서 커다란 오류를 불러 일으킬 수 있으며 그 오류는 證據의 數가 增加할수록 增加하게 될 것이다. 또 症狀 E_i 와 E_j 는 가설 H에 커다란 影響을 미치지 못한다고 하더라도 E_i 와 E_j 가 결합되면 가설 H와 깊은 관계를 갖을 수도 있을 것이다. 이와 같은 證據들 간의 依存性과 重複性은 앞으로 確率的 推論網에서 해결되어야 할 重要한 課題이다.

Ⅴ. 結　　論

지금까지 우리는 베이지안 推論方法을 利用하여 不確實한 情報들을 정제하고 우리의 目標인 '自然狀態'에 接近하는 方法을 살펴보았다. 베이지안 理論은 많은 專門家시스템에 成功的으로 적용되어 온 것이 사실이지만 아직도 다음과 같은 몇가지 補完되어야 할 問題가 있는 것으로 생각된다.

① 서로 獨立이 아닌 證據들을 結合하는 問題(제Ⅳ장 4절)

② 베이즈 정리에서는 서로 獨立인 가설들을 가정하고 있는데 實際로 그와 같이 假說들을 細分化할 수 있는가 하는 問題 (제Ⅱ장 3절)

③ 不確實한 證據의 觀測値를 통한 補完時 假說과 觀測値의 條件附 獨立 (conditional independent) 性의 가정 (제Ⅳ장 2절)

④ 中間段階 (intermediate assertion) 에 어떤 새로운 知識 혹은 情報를 揷入하고자 할 때 시스템內의 모든 確率들을 다시 計算하여야 하는 問題

⑤ 專門家에 의하여 주장된 事前的 確率의 테스트 問題(제Ⅳ장 1절)

그러나 이러한 問題點에도 불구하고 베이즈 理論은 단순한 모델의 무차별 利用보다는 다소 엄밀한 數學的分析을 要求하는 것이기 때문에 向後보다 强力한 모델 (推論시스템) 이 開發될 때 이 베이즈 理論은 새로운 시스템 開發의 훌륭한 도구로써 利用될 수 있을 것으로 생각된다.

〈參 考 文 獻〉

1. 박정연, 윤영선, 「統計學槪論」, 서울 : 다산出版社, 1984.
2. Chernoff, Herman and Moses, Lincoln E., *Elementary Decision Theory*, New York : John Wiley & Sons, 1967.
3. Charniak, Eugene and McDermott Drew, *Introduction to Artificial Intelligence*, Reading: Addison-Wesley Publishing Co., 1984.
4. Dempster, A.P., " A Generalization of Bayesian Inference," vol.30, *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, 1968, PP.205 ~ 247.
5. Duda, Richard O., and Reboh, Rene, " AI and Decision Marking : The Prospector Experience ", *Artificial Intelligence Application for Business*, Norwood : Ablex Publishing Corporation, 1984, pp.111 ~ 147.
6. Duba, Richard O., Gaschnig John G., and Hart, Peter E., " Model Design in the PROSPECTOR Consultation System for Mineral Exploration ", *Expert System in the Microelectoronic Age*, D, Miche, ed, Edinburgh : Edinburgh University Press, 1980, pp.153 ~ 167.
7. Duda, Richard O., Hart, P.E. and Nilsson, No J., " Subjective Bayesian Methods for Rule-Based Inference System ", *Proceedings of the AFIPS National Computer Conference*, vol.45, 1976, pp.1075 ~ 1082.
8. Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, 3 rd ed, New York : John Wiley & Sons, 1968.
9. Kreyszig, Erwin, *Introductory Mathematical Statistics : Principles and Method*, New York : John Wiley & Sons, 1970.

10. Raiffa, H., *Decision Analysis : Introductory Lectures on Choices under Uncertainty*, Reading : Addison-Wesley Publishing Co., 1968.
11. Shafer, G., *A Mathematical Theory of Evidence*, Princeton : Princeton University Press, 1976.
12. Shortliffe, Edward H., *Computer-Based Medical Consultations : MYCIN*, New York : American Elsevier, 1976.
13. Tanimoto, S.L., *The Element of Artificial Intelligence : An Inrroduction Using LISP*, Computer Science Press, 1987.