이산시간 불확정 시스템의 안정화 제어

이 정 문*

Stabilizing Control of Discrete−Time Uncertain Systems

Jung−Moon Lee*

ABSTRACT

This paper presents a linear state feedback control approach to the stabilization of discrete−time uncertain systems with bounded uncertain parameters. The approach is based on the LQ(linear quadratic) regulator theory and Lyapunov's stability analysis. Asymptotically stable behavior is guaranteed in the presence of parameter uncertainties, and the upper bound of the performance index is determined.

1. 서 론

불확정 파라미터를 갖는 시스템을 안정하게 제어하는 문제는 많은 제어응용 분야에서 매우 중요한 과제이다.[1] 불확정성에 관해서는 확률적인 정보가 주어질 수도 있지만, 보통은 불확정성의 범위만이 주어진다.

연속시간(continuous−time) 불확정 시스템을 안정화하는 제어방식에 관해서는 지금까지 많은 연구가 이루어져 왔다.[2−5] 그러나 그 결과들을 이산시간(discrete−time) 불확정 시스템에 바로 확장하는데는 어려움이 있다.[6]

본 논문에서는 이산시간 불확정 시스템을 안정화하는 제어방식을 제안한다. 여기서 불확정 파라미터는 미지의 값을 가지나, 그 값의 범위는 알고 있다고 가정한다. 이때 정합조건(matching condition)이 만족되면, 선형 상태귀환으로써 파라미터의 불확정성에도 불구하고 시스템을 항상 안정하게 제어할 수 있다. 또한 2차 형식(linear quadratic)으로 정의된 성능지수의 상한치(upper bound)를 구할 수 있다. 이러한 제어법칙은 LQ 제어문제의 해법에 따라 쉽게 유도되며 그 결과도 간단하다.

2. 문제의 설정

제어하고자 하는 시스템은 시불변 혹은 시변 불확정 파라미터를 갖는 이산시간 시스템으로서 다음의 상태방정식으로 표현된다.

* 강원대학교 제어계측공학과 조교수

$$x(k+1)=[A+\Delta A(r(k))]x(k) + [B+\Delta B(s(k))]u(k) \qquad (1)$$

여기서 $x(k)\in R^n$는 상태벡터이고, $u(k)\in R^m$는 입력벡터이다. $r(k)\in\Omega$와 $s(k)\in\Psi$는 불확정 파라미터 벡터이며, 집합 Ω와 Ψ는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\Omega=\{r\in R^k \mid -1\le r_i\le 1;\ i=1,2,\cdots,k\} \qquad (2)$$
$$\Psi=\{s\in R^l \mid -1\le s_i\le 1;\ i=1,2,\cdots,l\} \qquad (3)$$

한편, 식 (1)에서 $\Delta A(.)$와 $\Delta B(.)$가 모두 0인 경우를 명목 시스템(nominal system)이라고 정의한다. 성능지수는

$$J(r(.),\ s(.),\ u(.))= =\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}[x^T(k)Qx(k)+u^T(k)Ru(k)] \qquad (4)$$

으로 정의되며, Q는 양의 반정치(positive semidefinite) 대칭행렬이고, R은 양의 정치(positive definite) 대칭행렬이다.

이상과 같이 설정된 문제에서 다음 사항들을 가정한다.

가정 1. $\{A+\Delta A(r(k)),\ B+\Delta B(s(k))\}$는 $k\ge 0$에서 제어가능한 행렬의 짝이다.

가정 2. $\{A+\Delta A(r(k)),\ Q^{1/2}\}$는 $k\ge 0$에서 관측가능한 행렬의 짝이다.

가정 3. 다음의 정합조건을 만족하는 연속 행렬함수 $D(.)$와 $E(.)$가 존재한다.

$$\Delta A(r)=BD(r); \qquad \forall r\in\Omega \quad (5)$$
$$\Delta B(s)=BE(s); \qquad \forall s\in\Psi \quad (6)$$
$$RE(s)+E^T(s)R+2R>0; \qquad \forall s\in\Psi \quad (7)$$

여기서 가정 3이 성립한다면, 다음 식들을 만족하는 양의 반정치 대칭행렬 Γ와 상수 α가 항상 존재한다.

$$D^T(r)RD(r)\le\Gamma; \qquad \forall r\in\Omega \quad (8)$$
$$RE(s)+E^T(s)R\ge\alpha R; \qquad \forall s\in\Psi \quad (9)$$
$$\text{단, } \alpha>-2$$

이와 같은 불확정 시스템에서는 불확정 파라미터 $r(.)$ 및 $s(.)$를 알 수 없으므로 식 (4)의 성능지수를 최소화하는 최적 제어법칙을 구하는 것은 불가능하다. 그러나 파라미터의 불확정성에도 불구하고 폐루우프 시스템을 항상 안정하게 하는 제어법칙이 존재한다면, 성능지수는 유한한 값을 갖는다. 따라서 성능지수는 유한한 상한치를 갖게된다. 다음 장에서는 폐루우프 시스템을 항상 점근적으로 안정하게 하는 안정화 제어기를 설계하고, 그에 따른 성능지수의 상한치를 구한다.

3. 안정화 제어를 위한 상태변수귀환

폐루우프 시스템의 안정도를 보장하는 제어기를 설계하기 위해서는 먼저 식 (1)의 상태방정식을 다음과 같이 변형한다.

$$x(k+1)=[F+\Delta F(r(k))]x(k) + [G+\Delta G(s(k))]u(k) \qquad (10)$$

시스템 행렬들을

$$F=A \qquad (11)$$
$$G=\frac{2+\alpha}{2+\mu}B \qquad (12)$$
$$\Delta F(r)=GS(r); \quad \forall r\in\Omega \qquad (13)$$
$$\text{단, } S(r)=\frac{2+\mu}{2+\alpha}D(r)$$
$$\Delta G(s)=GT(s); \quad \forall s\in\Psi \qquad (14)$$
$$\text{단, } T(s)=\frac{2+\mu}{2+\alpha}E(s)+\frac{\mu-\alpha}{2+\alpha}I_m$$

로 정의하면, 식 (10)은 식 (1)과 동일하다. 또, 식 (8)과 (9)로부터 다음 식들을 유도할 수 있다.

$$S^T(r)RS(r)\le\Lambda; \quad \forall r\in\Omega \qquad (15)$$
$$\text{단, } \Lambda=\left(\frac{2+\mu}{2+\alpha}\right)^2\Gamma$$
$$RT(s)+T^T(s)R\ge\mu R; \quad \forall s\in\Psi \qquad (16)$$

여기서 불확정 시스템의 명목 입력행렬을 식 (12)와 같이 변형한 것은 식 (9)로부터 식 (16)을 얻기 위해서이며, 이 식은 후에 폐루우프 시스템의 안정도를 증명하는데 사용된다.

이제 식 (10)의 이산시간 불확정 시스템과 식(4)의 선형 2차 성능지수에 의하여 규정되는 안정화 제어문제에 대해서 다음과 같은 최적 LQ 제어문제를 설정한다.

$$x_A(k+1) = Fx_A(k) + Gu_A(k) \tag{17}$$

$$J_A(u_A(.)) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}[x_A^T(k)Q_A x_A(k) + u_A^T(k)R_A u_A(k)] \tag{18}$$

단, $R_A = \gamma R$

$$Q_A = \sigma Q + \frac{\gamma}{\mu}\Lambda$$

여기서 μ, γ, σ는 설계변수로서 $\mu > 0$, $\gamma > 1$, $\sigma > 1$인 값으로 선정한다. 이때 다음 사항들이 성립한다고 가정한다.

가정 4. $\{F, G\}$는 제어가능한 행렬의 짝이다.

가정 5. $\{F, Q_A^{1/2}\}$는 관측가능한 행렬의 짝이다.

가정 4와 5가 성립한다면, 이 최적 LQ 제어문제의 해는 다음 식으로 표현된다.[7]

$$u_A^*(k) = -Hx_A(k) \tag{19}$$

단, $H = (R_A + G^T KG)^{-1} G^T KF$

행렬 K는 다음과 같은 대수 Riccati 방정식의 해이다.

$$K = Q_A + F^T KF - F^T KG(R_A + G^T KG)^{-1} G^T KF \tag{20}$$

또, 성능지수 J_A^*는

$$J_A^* = J_A(u_A^*(.)) = \frac{1}{2}x_A^T(0)Kx_A(0) = \frac{1}{2}x^T(0)Kx(0) \tag{21}$$

이다. 식 (19)의 제어법칙을 원래의 불확정 시스템에 그대로 적용하면

$$u^*(k) = -Hx(k) \tag{22}$$

이 되며, 이때 다음 정리가 성립한다.

정 리

다음 조건이 만족되면 이산시간 불확정 시스템은 식 (22)의 제어입력에 의하여 항상 점근적으로 안정하다.

$$(1-\sigma)Q + (1-\gamma)H^T RH + 2S^T(r)G^T KGS(r) + 2H^T T^T(s)G^T KGT(s)H \le 0;\ {}^{\forall}r \in \Omega,\ {}^{\forall}s \in \Psi \tag{23}$$

이때 식(4)의 성능지수는 J_A^*를 넘지 않는다.

증 명

식(10)은 식(1)과 동일하므로, 식(10)에 식(22)를 대입하면 폐루우프 상태방정식은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \{[F + \Delta F(r(k))] - [G + \Delta G(s(k))]H\}x(k) \\ &= \{[F - GH] + G[S(r(k)) - T(s(k))H]\}x(k) \end{aligned} \tag{24}$$

이 폐루우프 시스템에 대한 Lyapunov 함수를

$$V(x(k)) = \frac{1}{2}x^T(k)Kx(k) \tag{25}$$

라고 정의하면, Lyapunov함수 차는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \Delta V(x(k)) &= V(x(k+1)) - V(x(k)) \\ &= \frac{1}{2}x^T(k)\{[F-GH]^T K[F-GH] \\ &\quad + 2[F-GH]^T KG[S(r(k)) - T(s(k))H] + [S(r(k)) - T(s(k))H]^T G^T KG[S(r(k)) - T(s(k))H] - K\}x(k) \end{aligned} \tag{26}$$

편의상 시간변수 k를 생략하고, 식(20)을 이용하여 이를 다시 정리하면

$$\begin{aligned} \Delta V = \frac{1}{2}x^T[&-Q_A - H^T R_A H \\ &- H^T(R_A T + TR_A)H + 2H^T R_A S \\ &- 2S^T G^T KGTH + S^T G^T KGS \\ &+ H^T T^T G^T KGTH]x \end{aligned} \tag{27}$$

이 된다. 그런데 R_A 및 K는 양의 정치 대칭행렬이므로 $R_A^{1/2}$ 및 $K^{1/2}$이 존재하며, 다음 부등식이 성립한다.

$$\begin{aligned} 2S^T G^T KGTH &= 2(S^T G^T K^{1/2})(K^{1/2} GTH) \\ &\ge -S^T G^T KGS - H^T T^T G^T KGTH \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} 2H^T R_A S &= 2[H^T(\mu R_A)^{1/2}][(R_A/\mu)^{1/2} S] \\ &\le \mu H^T R_A H + \frac{1}{\mu}S^T R_A S \end{aligned}$$

$$\le \mu H^T R_A H + \frac{\gamma}{\mu}\Lambda \qquad (29)$$

식(16), (28), (29)를 이용하여 식(27)을 정리하면 다음 식이 된다.

$$\Delta V \le \frac{1}{2} x^T \Big[-Q_A - H^T R_A H + \frac{\gamma}{\mu}\Lambda + 2S^T G^T K G S + 2H^T T^T G^T K G T H \Big] x \qquad (30)$$

따라서 식(23)의 조건이 성립한다면

$$\Delta V \le -\frac{1}{2} x^T [Q + H^T R H] x \qquad (31)$$

가 되어, Lyapunov 안정도 이론에 의해 이 페루우프 시스템은 r(.) 및 s(.)에 관계없이 항상 점근적으로 안정하다. 한편 식(31)의 양변을 k=0, 1,… 에서 모두 더하면

$$V(x(\infty)) - V(x(0)) \le -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\{x^T(k)[Q + H^T R H]x(k)\} \qquad (32)$$

이고, 점근적으로 안정한 시스템에서 $x(\infty)=0$ 이므로 식(32)를 다시 쓰면

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\{x^T(k)[Q + H^T R H]x(k)\} \le V(x(0))$$

또는

$$J(u^*(.)) \le J_A^* \qquad (33)$$

이 된다. 즉 성능지수는 J_A^*를 넘지 않는다.

4. 예제 및 검토

상태방정식과 성능지수가 각각 식(1)과 (4)로 규정되는 제어문제에서

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta A(r) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.25r & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Delta B(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.02s \end{bmatrix}$$

$$Q = I_3 \qquad R = 1$$

이라고 하면

$$D(r) = [0.25r\ 0\ 0] \qquad E(s) = 0.02s$$

이므로, 식(8)과 (9)를 만족하는 Γ 및 α는 각각 다음과 같다.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0.0625 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \alpha = -0.04$$

또, 시스템의 초기상태는 $x(0)=[1\ 1\ 1]^T$라고 가정한다.

파라미터의 불확정성을 고려하지 않고 명목 시스템에 관하여 설계된 최적 LQ제어기는 그림 1 및 2에 보인 바와 같이, 불확정 파라미터 r 및 s의 값에 따라서 식(1)로 표현된 시스템을 불안정하게 만들 수도 있다.

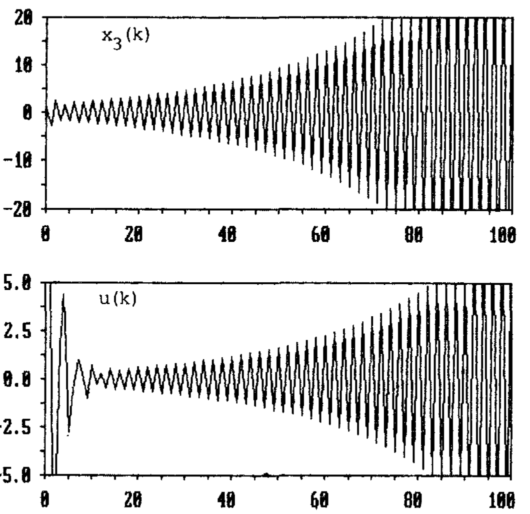

Fig. 1 x_3 and u of the nominal LQ regulator system for r=s=-1

이러한 문제점을 해결하기 위하여, 본 논문에 제시된 방법에 따라 μ=0.02, $\gamma=\sigma$=2로 정해서 안정

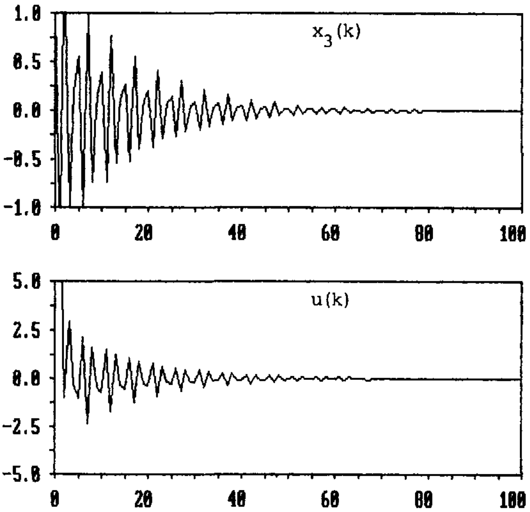

Fig. 2 x_3 and u of the nominal LQ regulator system for $r=s=1$

화 제어기를 설계해 보자. 우선 상태방정식을 식 (10)의 형태로 변형하면, 시스템 행렬들은

$$F=A \qquad \Delta F(r)=\Delta A(r)$$

$$G=\begin{bmatrix}0\\0\\0.9703\end{bmatrix} \quad \Delta G(s)=\begin{bmatrix}0\\0\\0.0297+0.02s\end{bmatrix}$$

이므로

$$S(r)=[0.258r \ 0 \ 0]$$

$$T(s)=0.0306+0.0206s$$

이고, 식(15)를 만족하는 행렬 Λ는 다음과 같다.

$$\Lambda=\begin{bmatrix}0.0664 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

따라서 식(17)과 (18)로 규정되는 최적 LQ 제어문제에서 대수 Riccati 방정식의 해를 구해보면

$$K=\begin{bmatrix}84.098 & 133.429 & 61.555\\133.429 & 297.988 & 174.225\\61.555 & 174.225 & 157.603\end{bmatrix}$$

이 되고, 이로 부터 안정화 제어법칙을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$u^*=[6.101 \ 10.789 \ 4.977]x$$

이 안정화 제어기는 불확정 파라미터 r 및 s가 주어진 범위내의 어떤 값을 갖더라도 시스템을 항상 점근적으로 안정하게 제어한다. 그림 3 및 4는 이러한 사실을 보여주는 상태변수 및 제어입력의 궤적이다. 또한 식(4)로 정의된 성능지수는

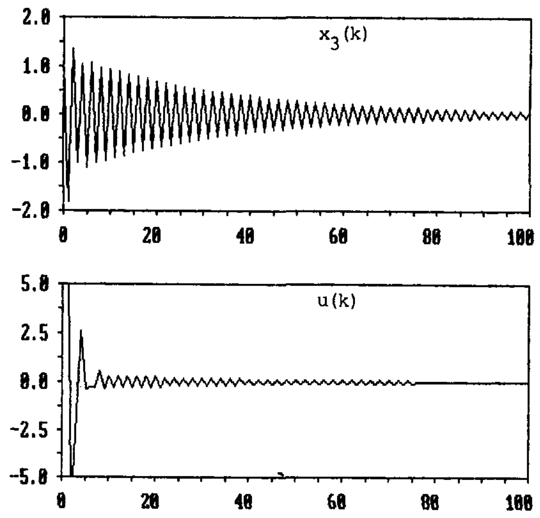

Fig. 3 x_3 and u of the stabilizing control system for $r=s=-1$

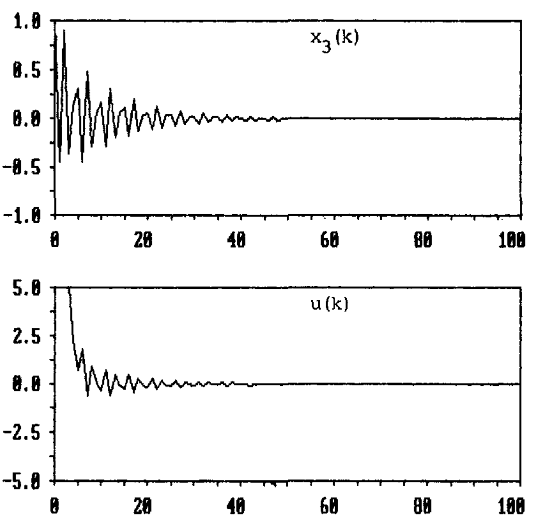

Fig. 4 x_3 and u of the stabilizing control system for $r=s=1$

Table 1. Calculated values of performance index for some cases

	r=−1	r=0	r=1
s=−1	342.962	302.466	321.722
s=0	326.361	311.834	338.534
s=1	331.621	342.595	388.487

$$J \leq \frac{1}{2} x^T(0) K x(0) = 639.053$$

을 만족하도록 보장되는데, 표 1은 몇 가지 경우에 대해 실제로 계산된 성능지수의 값을 나타낸다.

5. 결 론

본 논문에서는 크기가 한정된 불확정 파라미터를 갖는 이산시간 불확정 시스템을 안정화하기 위하여 선형 상태귀환 제어방식을 제안하였다. Lyapunov의 안정도 이론을 사용하여, 파라미터의 불확정성에도 불구하고 폐루우프 시스템이 항상 점근적으로 안정하게 되도록 제어법칙을 유도하였다. 또한 선형 2차 형식으로 정의된 성능지수의 상한치를 결정하였다.

예제를 통하여 알아 본 결과 안정화 제어기의 특성은 설계변수인 μ, γ, σ 등에 의해서 크게 좌우된다. 이 변수들의 값은 최적화 기법을 사용하여 가장 적절하게 선정하는 것이 좋겠다. 또 연속시간 시스템에서와는 달리 시스템의 안정성을 보장하기 위한 충분조건으로 식(23)이 제시되었는데, 이는 파라미터의 불확정성에 매우 엄격한 제한을 가하게 되므로 이 식을 충족시키기는 쉽지 않다. 그러나 예제에서와 같이 이 조건에 크게 위배되지 않는 한 시스템의 안정성은 보장된다.

참 고 문 헌

1. M. S. Mahmoud and M. G. Singh, Discrete Systems, Analysis, Control, and Optimization, Springer−Verlag, 1984.
2. G. Leitmann, "Guaranteed asymptotic stability for some linear systems with bounded uncertainties," J. Dynamic Syst. Meas. Contr., vol. 101, pp.212−216, 1979.
3. I. R. Petersen, "Structural stabilization of uncertain systems : necessity of the matching condition," SIAM J. Contr. Optimiz., vol. 23, pp.286−296, 1985.
4. M. J. Corless and G. Leitmann, "Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 26, pp.1139−1144, 1981.
5. W. E. Schmitendorf and B. R. Barmish, "Guaranteed asymptotic stability for systems with constant disturbances," Proc. 1985 Amer. Contr. Conf., pp.778−781, 1985.
6. M. S. Mahmoud and A. A. Bahnasawi, "Asymptotic stability for a class of linear discrete systems with bounded uncertainties," IEEE Trans. Automat. Contr., vol.33, pp.572−575, 1988.
7. B. C. Kuo, Digital Control Systems, HRW, 1980.