

열박음축의 고유진동수에 關한 研究

A Study on Natural Frequency of Shrink Fit Shaft.

유 은 열*, 오 재 응**, 임 동 규**

(Eun Yul Yoo, Jae Eung Oh, Tong Kyu Yim)

요 약

본 논문에서는 열박음 부분을 모델링하여 그 부분에서의 단위길이당 스프링강성을 산정한다음 전달매트릭스를 구하였다. 여기에 MYKLESTAD 방법을 토대로 하여 축의 전달매트릭스를 구하였다. 열박음축에 대해서는 수축공차에 따른 고유진동수를 구하였으며, 열박음효과의 효율성을 규명하기 위하여 똑같은 크기의 열박음 하지 않은 축과 비교검토 하였으며 이를 실험으로 검토하였다.

연구결과 수축공차가 커지면 커질수록 단위길이당 스프링강성은 증가 하였고 고유진동수도 증가하였다. 그리고 열박음축은 열박음 하지 않은 축보다 고유진동수가 감소하였다.

ABSTRACT

A study is made on shrink fit shaft in which its part is modelled and spring stiffness per unit length is estimated, then obtained transfer matrix.

Transfer matrix of shaft is found by Myklestad's method and natural frequency is found by shrink fit tolerance on shrink fit shaft, too. In order to verify effectiveness of shrink fit effect, hollow shaft of the same size is compared with shrink fit shaft which will verified on experiment.

As a result of this study, the more shrink fit tolerance increases, the more spring stiffness per unit length increases. It is obvious from the above results that shrink fit shaft due to shrink fit tolerances decreases natural frequency.

I. 서 론

산업사회의 발달에 따라 항공기, 가스터빈 등에서 사용되는 대형축들은 산업현장에서 빠질 수 없는

필수요소가 되고있다. 그런데 축에 대한 진동을 많은 의문점을 야기시키 왔으며, 또 그것에 대한 연구도 상당히 진행되어왔다. 위에 열거한 연구의 목적은 축이 회전하여 그 구조물의 진동을 받을 때 불안전성을 일으킬수 없으므로 이러한 안전현상을 방지하기 위해 이 구조물 자체의 고유진동수를 알 수 있도록

*한양대학교 열및기계공학과 대학원 석사과정

**한양대학교 공과대학 열및기계공학과 교수

있기 때문이다. 특히 구조물 설계시 구조물의 강성도를 생각할때 낮은차수의 진동모드에 대한 고유진동수가 매우 중요하다. 전담어니스트는 HOLZER¹⁾가 비틀림 진동문제에 대해서 전달행렬을 발전시켰고 F.PORTSKY와 SLADE²⁾는 축강성의 비대칭 효과를 연구하였고 PESETEL과 LECKIE³⁾도 비정체의 전달행렬과 구조물에 대한 행렬의식들과 같은 여러복잡한 응용문제들을 해결하는데 필요한 정보로 제공해 주었다. 그리고 MYLESTAD와 PROHL⁴⁾도 여러가지의 형태의 구조물의 전달행렬을 연구하였다.

지금까지 열박음축이 그 효과가 무시되었는데, 본 논문에서는 일반적으로 열박음축이 큰 동력을 전달할때 쓰이게 되어 지지부에 상당한 굽힘강성을 받게된다는 점에 착안하여 열박음축의 비틀림 강성을 무시하는 것으로 모델링하였고 전달행렬법을 이용하여 열박음축체의 진동을 해석하였다. 열박음효과를 규명하여 열박음축도 순수축류축보다 더욱 유용하게 사용할 수 있음을 보여주고 또한 열박음효과가 고유진동수에 미치는 영향을 이까지 확립한 이론과 실험으로써 명확히 밝혀내었다.

II. 이론해석

II.1 열박음 부분의 모델연구

축이 처질때에는 축 개의 열박음조각 끝단에서 한부분은 압력을 받고 나머지 부분은 다소 완화되기에 때문에 상대적인 회전위각 가운데가 생긴다. 또한 작은저점인 경우 힘은 국부적인 상대회반위에 비해 하는것으로 가정할 수 있으므로 열박음 부분은 열박음단면축 방향을 따라서 균일하게 분포된 스프링력으로 모델화될 수 있다.

단위길이당 스프링강성(k)과 단위길이당 질량을, 두께, 수축공차, 재료에 좌우된다. 이(k)와 산것은 다음장에서 설명한다. 일반적으로 열박음단면의 길이 r은 수축공차에 비해서 작기 때문에, $\frac{dr}{r} < \frac{1}{10}$ 이므로, 단면적은 $A = \pi r^2$ 이고, 단위길이당 질량은 $m = \rho \pi r^2$ 이다. Fig. 1에서 부분파와 같이 각각 왼쪽과 오른쪽의 중심에 위치하였을 때 축의 재질과 열박음의 열박음단면길이(r)에 대해서 새로운 분포된 스프링에 의해

서 서로 연결된 질량이 없는 두개의 축단면으로 이루어진다.

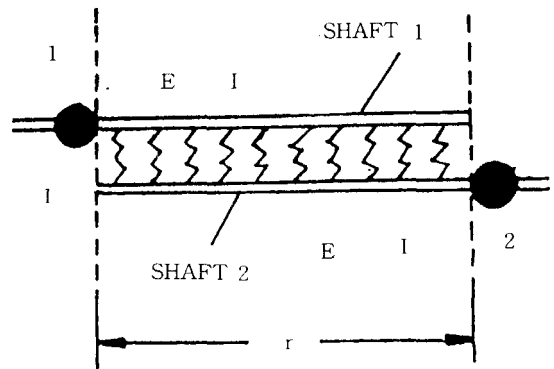


Fig 1. Diagram of shrink fit.

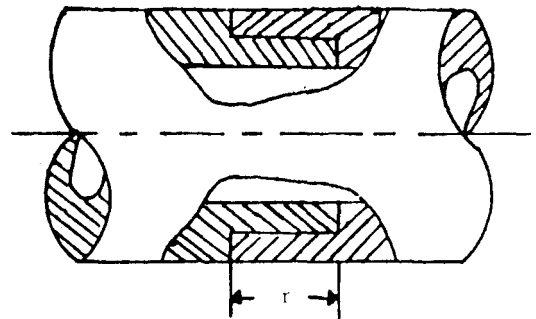


Fig 2 Diagram of shrink fitted shaft.

II.2 열박음 부분의 단위길이당 스프링강성의 산정

내부와 외부표면에 균일한 압력을 받는 두꺼운 실린더를 생각해 보면 내경과 외경을 a,b 그리고 내압과 외압을 P_i, P_o 라 하자.

경계조건은 $\sigma_r = -P_i$, at $r=a$ $\sigma_r = -P_o$, at $r=b$ 이다. (1)

용력함수 (Ψ)는 θ 에 관계가 없고 r만의 함수이므로 미분조건식은

$(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}) (\frac{\partial \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}) = 0$ 이다. (2)

새로운 변수 $\xi = \log r$ 를 도입하면

$\frac{d\Psi}{dr} = \frac{d\Psi}{d\xi} \frac{d\xi}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d\Psi}{d\xi}$ (3)

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left(\frac{d\Psi}{dr} \right) = \frac{1}{r^2} \left(\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} - \frac{d\Psi}{d\xi} \right) \quad (3-b)$$

$$\frac{d^3\Psi}{dr^3} = \frac{1}{r^3} \left(\frac{d^3\Psi}{d\xi^3} - 3 \frac{d^2\Psi}{d\xi^2} + 2 \frac{d\Psi}{d\xi} \right) \quad (3-c)$$

$$\frac{d^4\Psi}{dr^4} = \frac{1}{r^4} \left(\frac{d^4\Psi}{d\xi^4} - 6 \frac{d^3\Psi}{d\xi^3} + 11 \frac{d^2\Psi}{d\xi^2} - 6 \frac{d\Psi}{d\xi} \right) \quad (3-d)$$

(3-a)부터 (3-d)까지를 (2)식에 대입하면

$$\frac{d^4\Psi}{d\xi^4} - 4 \frac{d^3\Psi}{d\xi^3} + 4 \frac{d^2\Psi}{d\xi^2} = 0 \quad (4)$$

그 일반해를 구하면

$$\Psi = c_1 r^2 \log r + c_2 r^2 + c_3 \log r + c_4 \quad (5)$$

여기에 c_1, c_2, c_3, c_4 는 적분상수이다.

응력함수 (Ψ)에 대해서 응력성분을 구하면

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} = c_1(1+2 \log r) + 2 c_2 + \frac{c_3}{r^2} \quad (6-a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} = c_1(3+2 \log r) + 2 c_2 - \frac{c_3}{r^2} \quad (6-b)$$

$$\tau_{r\theta} = 0 \quad (6-c)$$

축대칭인 경우에, 원통좌표계에서의 응력과 변형률의 관계는 다음과 같다.

$$\epsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) = \frac{du}{dr} \quad (7-a)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) = \frac{u}{r} \quad (7-b)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{G} = \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \quad (7-c)$$

여기서, u, v 는 반경과 원주방향의 변위를 나타낸다. (6-a) 식과 (6-b)식을 (7-a)식과 (7-b)식에 대입하면 각각 (8-a), (8-b)식과 같다.

$$Eu = c_1[r(1-3\nu) + 2(1-\nu)(r \log r - r)] + 2 c_2(1-\nu)r - c_3(1+\nu) \frac{1}{r} + c_4 \quad (8-a)$$

여기서 c_4 는 적분상수이다.

$$Eu = c_1[r(3-\nu) + 2r(1-\nu) \log r] + 2c_2(1-\nu)r - c_3(1+\nu) \frac{1}{r} \quad (8-b)$$

여기서 반경변위가 똑같아지려면 $c_1=0, c_3=0$ 하므로

$$Eu = 2 c_2(1-\nu)r - c^3(1+\nu) \frac{1}{r} \quad (9)$$

이다.

c_2 와 c_3 를 결정하기 위해서 (1)식을 (6-a)식에 대입하면

$$2 c_2 = \frac{P_1 a^2 - P_0 b^2}{b^2 - a^2}, \quad c_3 = \frac{a^2 b^2 (P_0 - P_1)}{b^2 - a^2} \quad (10)$$

이다.

그러면 열박음된 모양을 생각해 보면 다음과 같다.

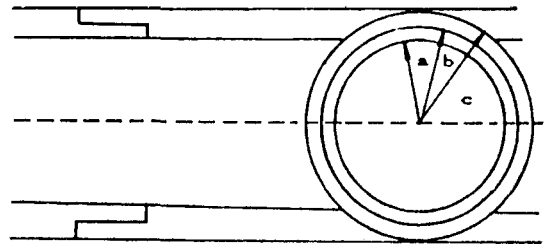


Fig 3. Shape of shrink fitt shaft.

외부실린더의 안지름과 내부실린더의 바깥지름은 약간의 차이가 있는데, 바로 이것이 수축공차가 된다. 결과적으로 내부실린더의 바깥지름을 약간 적게 하여 가열시킨 다음 냉각시킨다. 이렇게 만든 실린더를 분리시켰다고 가정하면 내부실린더는 팽창하고 외부실린더는 수축하게 된다. 이러한 중첩의 원리를 이용해서 경계조건 $P_1=0, P_0=P, R=b$ 를 (9)과 (10)식에 대입하면, 내부실린더의 바깥지름의 차이는

$$u_1 = \frac{bP}{E_1(b^2 - a^2)} [(1+\nu_1) a^2 + (1-\nu_1) b^2] \quad (11)$$

여기서 E_1, ν_1 은 내부실린더의 탄성계수와 포아송비이다. 그리고

$P_1 = -P, P_0 = 0, R = c$ 를 (9)의(10)식에 대입하면

$$u_2 = \frac{bP}{E_2(c^2 - b^2)} [(1 + \nu_2)c^2 + (1 - \nu_2)b^2] \text{ 이다. (12)}$$

여기서 E_2, ν_2 는 외부실린더의 탄성계수와 포아송비이다.

결과적으로 내부실린더는 $b+u_1$ 의 반지름을 가지며 외부실린더는 $(b+u_2)$ 의 반지름을 가진다. 반경방향의 압력 p 에 상응하는 직경차이 δ 은

$$\delta = 2(u_1 - u_2) = 2bP \left[-\frac{(1 + \nu_1)a^2 + (1 - \nu_1)b^2}{E_1(b^2 - a^2)} + \frac{(1 + \nu_2)c + (1 - \nu_2)b^2}{E_2(c^2 - b^2)} \right] \text{ 이다. (13)}$$

두 실린더가 똑같은 물질이라면

$$\delta = \frac{4b^2(c^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)E} \text{ (14)}$$

단위길이당 스프링상성을 구하기 위해서 압력 p 를 힘으로 등가변환시키면

$$k = \frac{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)Ed}{4b^3(c^2 - a^2)} \text{ (15)}$$

이다. 여기서 d 은 바깥면의 직경이다.

II.3 열박음 부분의 전달매트릭스의 유도

Fig 4에서 y_1, θ_1, M_1, V_1 와 y_2, θ_2, M_2, V_2 가 각 단면의 횡변위, 기울기, 굽힘모멘트, 전단력이라 하자.

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_1 + \theta_1 x + q_1 \Phi_1(x) \\ v_1(x) &= v_1 + \theta_1(x-r) + q_1 \Phi_2(x) \end{aligned} \text{ (16)}$$

여기서 $y_1 + \theta_1 x$ 와 $y_2 + \theta_2 x$ 는 이 축의 축변위이다. 나타내며 $\Phi_1(x)$ 와 $\Phi_2(x)$ 는 각각 단섬변형을 나타낸다.

$\Phi_1(x)$ 의 정확한 함수는 두개의 방정식을 동시에

해결함으로써 얻어질 수 있으나 그 절차가 너무도 복잡하기 때문에 사용하지 않는다. 그러나 Rayleigh-Ritz에 따르면, 열박음단면이 너무도 짧기 때문에 $\Phi_1(x)$ 의 정확한 함수에 두개의 함수를 가정해 줄 수 있다.

그리고 단순화될 위해서 Taylor급수의 첫항을 적용하면

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_1 + \theta_1 x + q_1 x^2 \\ y_2(x) &= y_2 + \theta_2(x-r) + q_2(x-r)^2 \end{aligned} \text{ 이다. (17)}$$

두축단면사이의 상대회변위는

$$s(x) = y_1 - y_2 + \theta_1 x - \theta_2(x-r) + q_1 x^2 - q_2(x-r)^2 \text{ 이다. (18)}$$

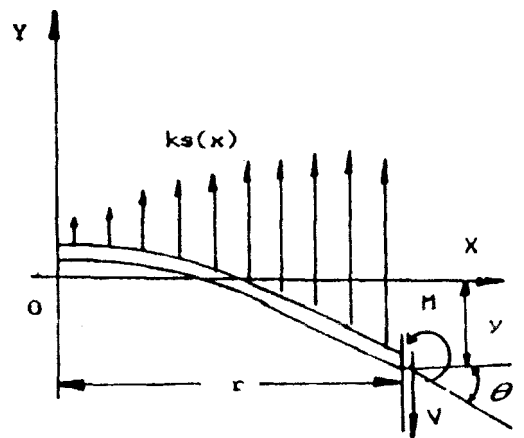
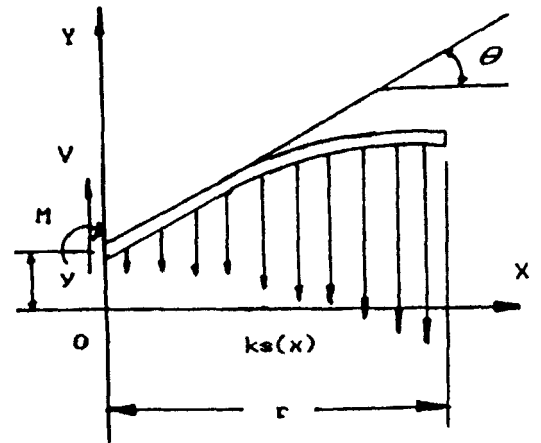


Fig 4. Force System on shaft section.

Fig 4.에서 각 축단면의 평형상태로부터

$$V_1 = k \int_0^r s(x) dx \quad (19)$$

$$M_1 = -k \int_0^r s(x)x dx \quad (20)$$

$$V_2 = k \int_0^r s(x) dx = V_1 \quad (21)$$

$$M_2 = k \int_0^r s(x)(r-x) dx = rV_1 + M_1 \quad (22)$$

일반좌표 q_1, q_2 에 가상일 (virtual work)의 원리를 이용하면

$$4EI_1 r q_1 = -k \int_0^r s(x)x^2 dx \quad (23)$$

$$4EI_2 r q_2 = -k \int_0^r s(x)(x-r)^2 dx = r^2 V_1 + 2r M_1 - 4EI_1 r q_1 \quad (24)$$

I_1 과 I_2 는 각각 축 단면 1과 2의 극부적 면적모우멘트이다. (18)식을 (19) (20) (23)식에 대입하면

$$V_1 = k(ry_1 - ry_2 + \frac{1}{2} r^2 \theta_1 + \frac{1}{2} r^2 \theta_2 + \frac{1}{3} r^3 q_1 - \frac{1}{3} r^3 q_2) \quad (25)$$

$$M_1 = k(-\frac{1}{2} r^2 y_1 + \frac{1}{2} r^2 y_2 - \frac{1}{3} r^3 \theta_1 - \frac{1}{6} r^3 \theta_2 - \frac{1}{4} r q_1 + \frac{1}{12} r^4 q_2) \quad (26)$$

$$q_1 = \frac{k}{4E I_1} (-\frac{1}{3} r^2 y_2 - \frac{1}{4} r^3 \theta_1 - \frac{1}{12} r^3 \theta_2 - \frac{1}{5} r^4 q_1 + \frac{1}{30} r^4 q_2) \quad (27)$$

이다.

(24)식에서

$$q_2 = \frac{r}{4 E I_2} V_1 + \frac{2}{4 E I_2} M_1 - \frac{I_1}{I_2} q_1 \quad (28)$$

(28)식을 (25) (26) (27)식에 대입하여 우변을 V_1, M_1, θ_1, y_1 항으로 만들면

$$\begin{bmatrix} -\frac{r}{2} & 1 & -\frac{r^2}{3} & (1 + \frac{I_1}{I_2}) \\ -\frac{r}{3} & 1 & -\frac{r^2}{2} & (1 + \frac{I_1}{3I_2}) \\ -\frac{r}{4} & 1 & r_{33} & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ y_2 \\ q_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ \theta_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} \quad (29)$$

$$r_{33} = -\frac{3r^2}{5} (1 + \frac{I_1}{6I_2} + \frac{20EI_1}{kr^4})$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{kr} - \frac{r^3}{12EI_2} & -\frac{r^2}{6EI_2} & \frac{r}{2} & 1 \\ -\frac{r}{24EI_2} & \frac{2}{kr} - \frac{r^2}{12EI_2} & \frac{2r}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} -\frac{r}{40EI_2} & -\frac{r^2}{20EI_2} & \frac{3r}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

(27)과 (28)식에서 얻은 q_1 은

$$q_1 = -\frac{X_1}{3X_9} r^2 y_1 + \frac{X_1}{3X_9} r^2 y_2 - \frac{X_1}{4X_9} r^3 \theta_1 - \frac{X_1}{12X_9} r^3 \theta_2 + \left| \frac{X_1 X_2}{X_9} V_1 + \frac{X_1 X_6}{X_9} M_1 \right. \quad (30)$$

(30)식을 (29)식에 대입하면

$$\begin{bmatrix} \frac{X_1 X_3}{12X_9} r^3 - \frac{r^3}{2} & 1 - \frac{X_1 X_3}{3X_9} r^2 \\ \frac{X_1 X_4}{12X_9} r^3 - \frac{r}{3} & 1 - \frac{X_1 X_4}{3X_9} r^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} X_7 + \frac{X_1 X_2 X_8}{X_9} & -(\frac{X_1 X_2 X_8}{X_9} + \frac{r^2}{6EI_2}) \\ \frac{X_1 X_2 X_4}{X_9} & -\frac{r_3}{24EI_2} X_8 - \frac{X_1 X_4 X_5}{X_9} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ \theta_1 \\ y_1 \end{Bmatrix}$$

이다. (31)

여기서

$$X_1 = \frac{k}{4EI_1} \quad X_2 = \frac{r^3}{120EI_2}$$

$$X_3 = \frac{r^2}{3} (1 + \frac{I_1}{I_2}) \quad X_4 = \frac{r^2}{2} (1 + \frac{I_1}{3I_2})$$

$$X_5 = \frac{r^4}{60EI_2} \quad X_6 = \frac{r^4 I_1}{30I_2}$$

$$X_7 = \frac{1}{kr} - \frac{r^3}{12EI_2} \quad X_8 = \frac{2}{kr} - \frac{r^2}{12EI_2}$$

$$X_9 = \frac{7kr^4 + 120EI_1}{120EI_1} \quad \text{이다.}$$

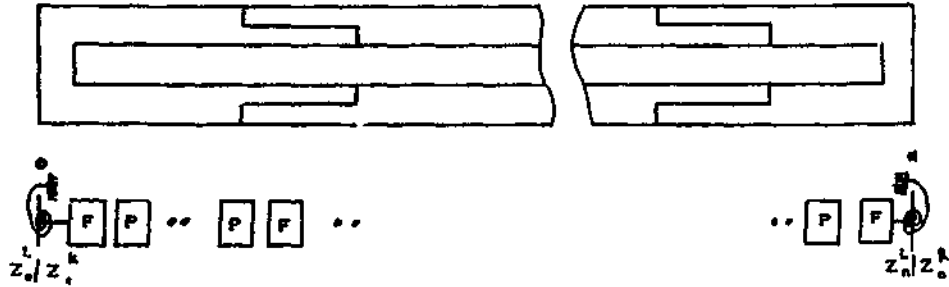


Fig 5. ideal model of the system for transfer matrix method.

(31)식에 (21)과 (22)식을 적용하고, 좌변에서 역행렬을 구하면

$$\begin{Bmatrix} V_2 \\ M_2 \\ \theta_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ r & 1 & 0 & 0 \\ \frac{6}{kr^2}(1+t_{11}) & \frac{12}{kr^3}(1+t_{12}) & 1 & 0 \\ \frac{2}{kr}(1+t_{21}) & \frac{6}{kr^2}(1+t_{22}) & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ \theta_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} \quad (32)$$

$$t_{11} = \frac{300UV}{t} \quad t_{12} = \frac{1+180U+180UV}{t}$$

$$t_{21} = \frac{1+100U+100UV}{t} \quad t_{22} = \frac{1+300U+60UV}{t}$$

$$t = 12U(1+V+720UV), \quad U = \frac{EI_2}{kr}, \quad V = \frac{I_1}{I_2} \text{ 이다.}$$

여기서 $EI(i=1, 2)$ 는 굽힘강성 (flexural rigidity) 이고 kr 은 스프링강성 (spring rigidity)이다. 이식이 바로 열박음 부분의 필드매트릭스(field matrix)이다.

II.4 전달매트릭스법에 의한 축의 해석

진동해석에 전달매트릭스법을 이용하면 계를 이상화하지 않고도 집중질량계로 해석할 수 있다는 장점이 있다. 지지조건에서 양단지거나 고정은 잘 알려져 있다. 그러나 대부분의 실제적인 경우에 양단지지점에서 상당한 굽힘강성을 받는 점에 착안하여 비틀림 스프링으로 처리하여 다음과 같은 이상적인 모델을 제시하였다.

Fig 5.은 n 개의 요소로 분할하여 전달매트릭스로 나타낸 그림이다. 이때 i 점의 연결부와 질량요소의

전달매트릭스를 F_i, P_i 라하면 열박음하지 않은 한 요소의 전달매트릭스는 다음과 같다.

$$T_i = P_i F_i \quad (33)$$

한편

$$\{Z\}_i = \begin{Bmatrix} V \\ M \\ \Phi \\ Y \end{Bmatrix} \begin{matrix} V_i & M_i & \Phi_i & Y_i \\ i\text{점의 전단력} \\ i\text{점의 굽힘모멘트} \\ i\text{점의 기울기} \\ i\text{점의 변위} \end{matrix}$$

(33)식에서 D'Alembert의 관성하중 J 을 무시하여 매트릭스로 표시하면 다음과 같다.

$$T_i = P_i F_i =$$

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{w^2 mL^3}{6EI} & -\frac{w^2 mL^2}{2EI} & -w^2 mL & -w^2 m \\ -L & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{L^3}{2EI} & \frac{L}{EI} & 1 & 0 \\ -\frac{L^2}{6EI} & \frac{L^2}{2EI} & L & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

이것은 열박음 부분이 하나인 요소의 전달매트릭스이다. 다음과 같다.

$$T_{i+1} = P_{i+1} F_{i+1} \quad (35)$$

$$T_{i-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -w^2 m \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ r & 1 & 0 & 0 \\ \frac{6}{Kr^2}(1+t_{11}) & \frac{12}{Kr^2}(1+t_{21}) & 1 & 0 \\ \frac{2}{Kr}(1+t_{12}) & \frac{6}{Kr^2}(1+t_{22}) & r & 1 \end{bmatrix}$$

여기서 t_{11} , t_{12} , t_{21} , t_{22} 는 (32)식과 같다.

$$\begin{bmatrix} 1-w^2 m \frac{2}{Kr}(1+t_{12}) & -w^2 m \frac{6}{Kr^2}(1+t_{22}) & -rw^2 m & -w^2 m \\ r & 1 & 0 & 0 \\ \frac{6}{Kr^2}(1+t_{11}) & \frac{12}{Kr^2}(1+t_{21}) & 1 & 0 \\ \frac{2}{Kr}(1+t_{12}) & \frac{6}{Kr^2}(1+t_{22}) & r & 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

(34)과 (36)식의 전달매트릭스에서 필드매트릭스를 살펴보면 같은 차원임을 알 수 있다. 그리고 비틀림스프링의 지지점에서 전단력, 기울기, 처짐은 연속적이나 굽힘모멘트는 스프링의 비틀림때문에 불연속점이 생긴다. 그러므로 $M_n^R = M_n^L - K\theta_n^L$ 을 매트릭스로 나타내면 다음과 같다.

$$\{Z\}_n^R = \begin{bmatrix} V \\ M \\ \theta \\ Y \end{bmatrix}_n^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -K & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ M \\ \theta \\ Y \end{bmatrix}_n^L \quad (37)$$

(37)식은 비틀림스프링의 포인트매트릭스이다.

Fig 5.로 부터 순차적인 연산을 행하면 각 요소의 상태벡터(state vector)는 다음과 같다.

$$\{Z\}_0^R = [P]^{sp} [F] [T]_i [T] [T]^{shrink_{j-1}} [T]^* [T]^{**_{j+1}} [T]^{shrink_{n-2}} [T]^{***_{n-1}} [T] [T] [P]^{sp}_n [Z]_n^L \quad (38)$$

여기서

$[P]^{sp}$: 스프링의 포인트매트릭스 (point matrix)

$[F]$: 필드매트릭스 (field matrix)

$[T]_i$: i 점에서 열박음 하지않은 부분의 전달매트릭스

$[T]^*$: $[T]_i$ 와 비교해서 질량과 길이가 다른 전달매트릭스

$[T]^{**_{j+1}}$: $[T]^*$ 와 비교해서 질량만 다른 전달매트릭스

$[T]^{***_{n-1}}$: $[T]^*$ 와 비교해서 길이만 다른 전달매트릭스

$[T]^{shrink_{j-1}}$: $(j-1)$ 점에서 열박음 부분의 전달매트릭스

한편, 양단의 상태벡터(state vector) $[Z]_0^R$, $[Z]_n^L$ 은 전달매트릭스의 경계조건으로 부터

$$\begin{matrix} Y^R \\ \theta \\ M \\ V \end{matrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix} \begin{matrix} Y^L \\ \theta \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \quad (39)$$

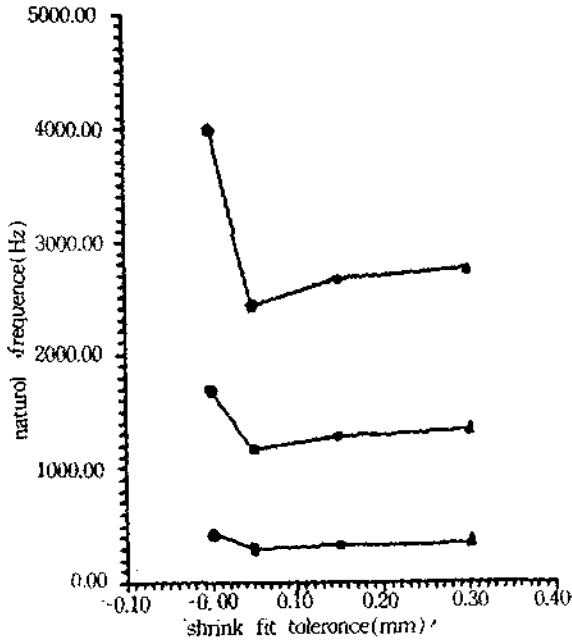
$$\begin{matrix} M_0^R=0 \\ V_0^R=0 \end{matrix} = \begin{matrix} T_{31} & T_{32} \\ T_{41} & T_{42} \end{matrix} \begin{matrix} Y_n^L \\ \theta_n^L \end{matrix} \quad (40)$$

이 방정식이 유용해 (nontrivial solution)를 갖기 위한 조건으로부터 고유진동수에 관한 n 차 방정식이 구해진다. 따라서

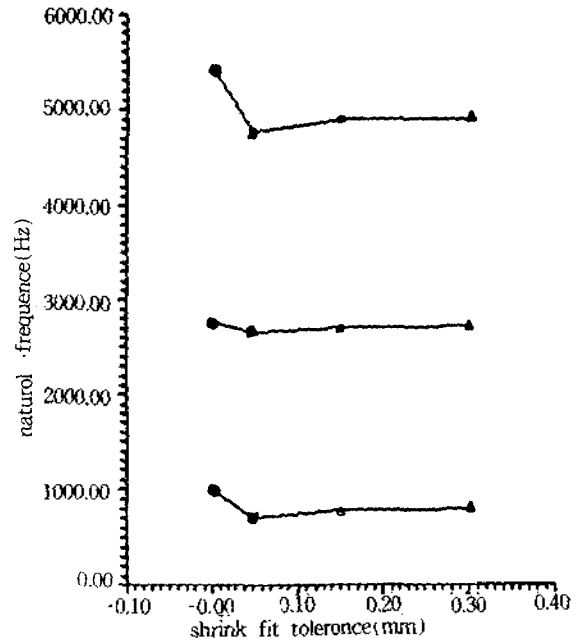
$$\begin{vmatrix} T_{31} & T_{32} \\ T_{41} & T_{42} \end{vmatrix} = 0 \quad (41)$$

III. 수치해석에 의한 검토

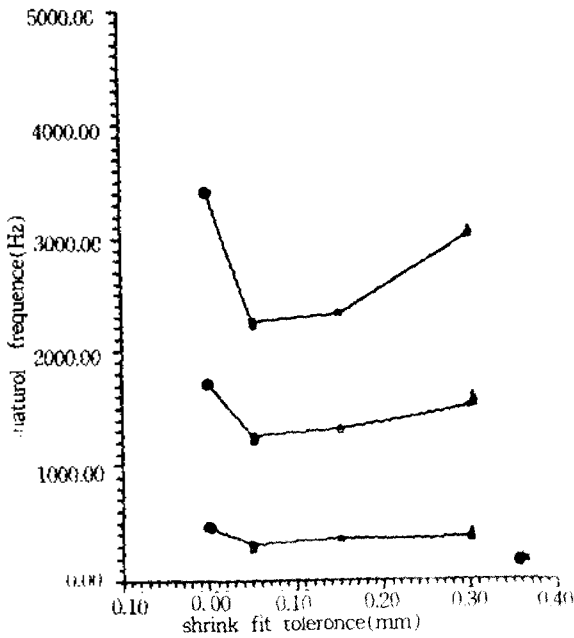
본 수치해석의 주목적은 열박음효과를 규명하는 것이기 때문에, 그 고유진동수를 구하기 위해서 식 (41)의 COMPUTER (VAX 8700 한양대학교 전자계산소)를 이용해서 처음 3개의 근을 MYCLESTAD법을 바탕으로 하여 PESTEL과 LECKIE가 제시한 이분법을 적용하여 수치해석하였다. 수치계산에 사용된 축의 제원은 연강(SM45C)에 대하여 바깥지름 $d_0=5.88\text{cm}$, 안지름 $d_1=4.3\text{cm}$, 길이 $l=57.5\text{cm}$, $E=$



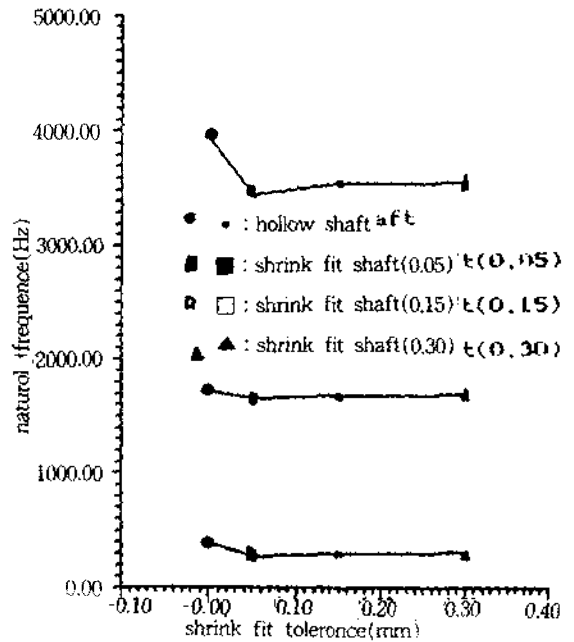
(a) $K_1=K_2=1$



(c) $K_1=K_2=\infty$

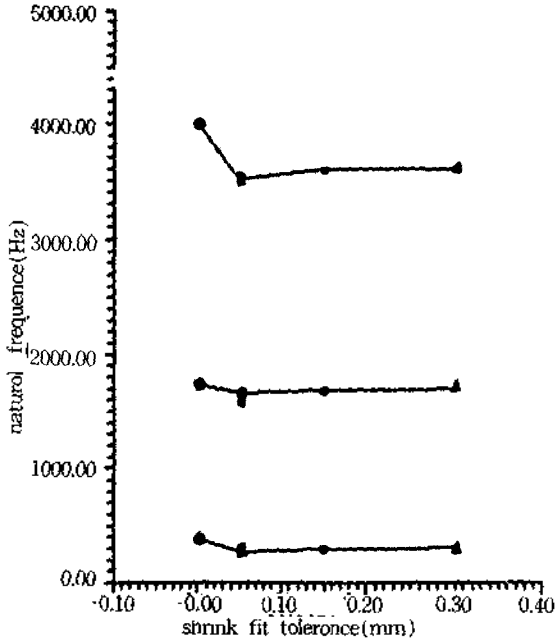


(b) $K_1=K_2=0$

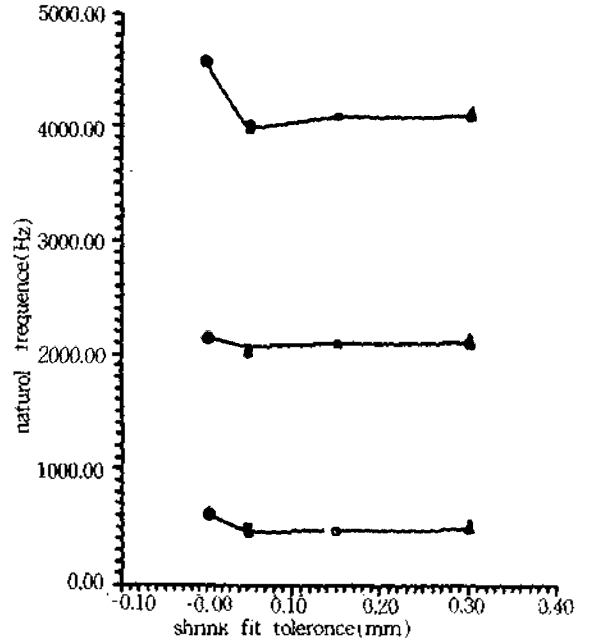


(d) $\frac{k_1}{EI}=0.01, \frac{K_2}{EI}=1.0$

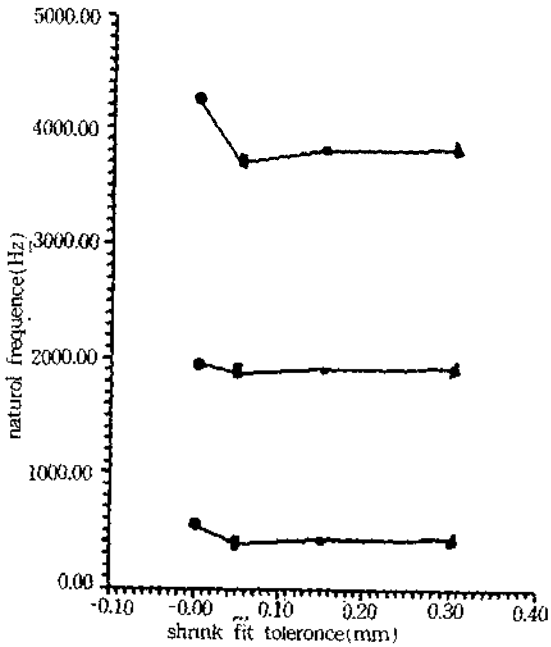
Fig 6. Graph of natural frequency of a shrink fit shaft with a shrink fit tolerance.



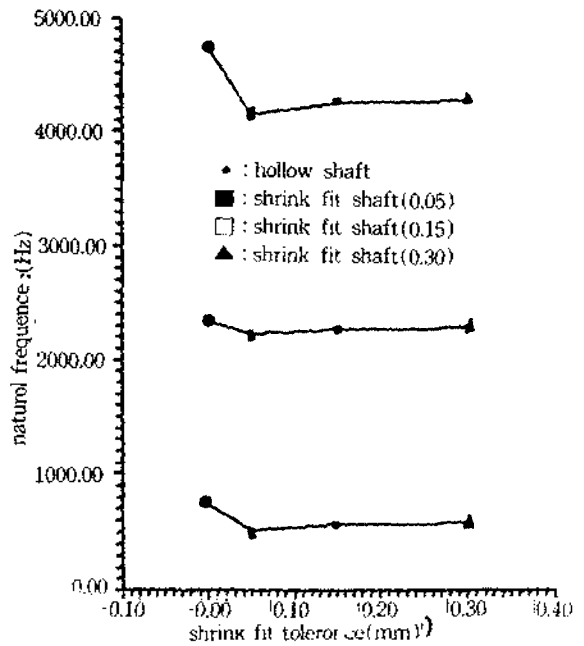
(e) $\frac{K_1l}{EI} = 0.1$ $\frac{K_2l}{EI} = 1.0$



(g) $\frac{K_1l}{EI} = 100$ $\frac{K_2l}{EI} = 1.0$



(f) $\frac{K_1l}{EI} = 10$ $\frac{K_2l}{EI} = 1.0$



(h) $\frac{K_1l}{EI} = \infty$ $\frac{K_2l}{EI} = 1.0$

Fig 7. Graph of natural frequency of a shrink fit shaft with a shrink fit tolerance.

$2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\rho = 7800 \text{ kg/cm}^3$ 으로 하였으며, 열박음 부분의 길이는 1.5cm로 하였고 그 갯수는 4개로 했다. 그리고 열박음공차(tolerance)는 0.05 mm, 0.15mm, 0.30mm로 하고 열박음을 하지 않은 축과 비교검토하였다. 그리고 2.4에서 설명했듯이, 어느 정도의 굽힘강성을 감안하여 비틀림스프링으로 인지된 경우에만 해석하기 위하여 다음과 같이 구분하였다.

- (1) $K_{11} = K_{21} = E I$
- (2) $K_{11} = K_{21} = 0$
- (3) $K_{11} = K_{21} = \infty$
- (4) $K_{11} \neq K_{21}$

V. 결 론

본 논문에서는 열박음축에 전달매트릭스법을 개발하여 이를 적용한 결과 다음 같은 결론을 내리게 되었다.

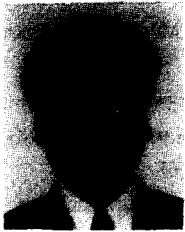
- (1) 열박음축에 전달매트릭스를 적용하였더니 그 타당성과 효율성이 규명되었다.
- (2) 열박음을 하지 않은 축은 열박음축보다 고유진동수가 높으며 수축공차에 따른 고유진동수도 예측할 수 있었다.
- (3) 수축공차가 커지면 커질수록 열박음부분에서 단위길이당 스프링강성 k 값이 증가하여 고유진동수를 증가시킨다는 사실을 확인하였다.
- (4) 축을 비대칭적으로 지지한 경우에 열박음축에도 그 차이에 따른 고유진동수를 예측할 수 있었다.

Reference

1. J.P. Den Hartog "Mechanical Vibrations"
2. Francis S. Lee, Ivan E. Aloni, "Boland," "Holt," "Mechanical Vibrations," second edition, Ailyn and Bacon, Inc. pp. 369-376, 1978.
3. S.P. Timoshenko and J.N. Goodier, "Theory of elasticity," third edition, McGraw-Hill Book Company, Inc. pp. 354-378, 1970.

4. Eduard C. Pestel, Frederick A. Leckie, "Matrix Methods in Elastomechanics," Mcgraw-Hill Book Company, INc 1963.
5. J.W. Lund, "Calculations and experiments on the unbalance response of a flexible rotor," J.of ENG. of Ind, November, pp. 785-796. 1967.
6. Kang F. "The Methods of Numerical Calculation," 1978.
7. Xia Songbo, Zhang Qi, "A study on Vibration Characteristic of the Rotor of Turbine by using the Hammering Method," Journal of Vibration and Shock (China) pp. 39-42, 1982.
8. Zhang Wen, Xia Songbo, Chen Fada, Song Hongren, Mechanical model study for shrink fit rotor, "Projects supported by the science Fund of the Chinese Academy of Sciences, 1985.
9. R.C. Hibbeler, "Free Vibration of a beam supported by unsymmetrical Spring Hinges," Journal of Applied Mechanics, June 1975.
10. Cyril M.Harris, "Chock Vibration", Third edition, Mcgraw-Hill Book Company, Inc, 1988.
11. C.T. Wang, "Applied Elasticity, Mcgraw-Hill Book Company, Inc. pp. 50-58.
12. Daniel J.Gorman, "Free Vibration Analysis of beams and shafts," John Wiley and Sons, Inc, 1975.
13. E.C. Koenig, "Analysis for calculating lateral Vibration Characteristics of Flexible supports," Journal of Applied Mechanics, December 1971.
14. Xia Songbo, Wen-hu, "A Method of identifying bearing dynamic coefficients and unbalances of Turbine Rotor," Harbin Institute of Technology.

▲유 은 열



1965년 1월 4일생

1987년 2월 28일 : 한양대학교
공과대학 기계공학과
졸업1988년 3월 2일 : 한양대학교
공과대학원 석사과정
입학1990년 2월 28일 : 한양대학교
대학원 석사 취득
졸업

1990년 2월 1일 : (주) 금호연구소 연구원 입사

▲임동규(정회원) : 5 권 1 호 참조

▲오 재 응



1951년 1월 2일생

1975년 2월 : 한양대학교 기계
공학과 공학사1980년 3월 : 일본요코하마 국
립대학제어및 계
측공학석사1983년 3월 : 일본 동경공대시
스템해석및 소음
제어공학박사

1983년 4월 : 한양대학교 기계공학과 조교수

1987년 3월~현재 : 한양대학교 기계공학과 부교수

1988년 8월~1989년 3월 : 캘리포니아 버클리대학교
교환 교수