

# 신경 최적화 회로망을 이용한 두 대의 로봇트를 위한 최소시간 충돌회피 경로 계획

## (Minimum-Time Trajectory Planning Ensuring Collision-Free Motion for Two Robots: Neural Optimization Network Approach)

李志弘\*, 卞增男\*\*

(Ji Hong Lee and Zeung Nam Bien)

### 要 約

공간상에 움직여야 할 길이 주어진 두대의 로봇트의 속도계획 문제를 두 단계의 부문제로 나누어 각각을 독립적으로 다루는 방법을 도입하여 최소시간 속도계획 방법을 제안하였다. 제안된 방법은 i) 로봇트가 각각의 길을 따라 이동한 거리를 두 축으로하는 코오디네이션 공간이라는 2 차원 공간을 구축하고 이공간상에서 충돌을 피할 수 있도록 코오드네이션 곡선을 선정하고, ii) 선정된 곡선을 따라 최소시간을 보장하는 속도계획을 하는 두 단계의 문제중 두번째 단계의 문제에 대해 로봇트의 동력학 및 각 관절의 최대 회전속도등을 고려하여 최적해를 구하는 방법을 제안하였다. 또한 신경 최적화 회로망의 이론을 응용하여 간단한 반복 계산 알고리즘으로 최적해를 구하였다. 제안된 방법은 두대의 SCARA형 로봇트의 경로계획의 예로 시뮬레이션하여 유용성을 보였다.

### Abstract

A collision-free trajectory planning for two robots with designated paths is considered. The proposed method is based on the concept of decomposing the planning problem into two steps: one is determining coordination of two robots, and the other is velocity planning with determined coordination. Dynamics and maximum allowable joint velocities are also taken into consideration in the whole planning process. The proposed algorithm is converted into numerical calculation version based on neural optimization network. To show the usefulness of proposed method, an example of trajectory planning for 2 SCARA type robot in common workspace is illustrated.

### I. 서 론

로봇트를 이용하여 어떤 작업을 수행하려면 보통 “계획”과 “수행” 두단계의 과정이 필요하다. 계획 단계에서는 로봇트가 수행해야 할 작업의 종류 및 순서

를 합리적으로 결정하고 작업공간 내에서의 이동경로를 선정하게 되며 수행차원에서는 계획된 경로를 로봇트가 제대로 추적하게 하고 정해진 시각에 조립 용접등의 작업이 계획대로 수행되도록 해야한다. 이 중에서 경로계획 부분은 전체 작업시간과 소모 에너지등과 밀접한 관계를 갖고 있으므로 로봇트의 운행에 매우 중요하게 취급되고 있다.

한대의 로봇트가 장애물이 있는 공간에서 충돌을

\*正會員, 韓國科學技術院 電氣및 電子工學科  
(Dept. of Electrical Eng., KAIST)

接受日字: 1990年 5月 31日

피하며 움직일 수 있는 경로를 찾는 문제에 대하여는 여러종류의 결과가 알려져 있다. [1]에서는 visibility graph와 virtual obstacle이란 개념을 이용하여 기하학적인 제약조건만을 이용하여 최단거리 경로를 구하는 방법을 제시하였으며 [2]에서는 Cartesian 공간에서의 장애물을 joint 공간에서의 장애물로 변환시키고 로봇트를 점으로 축소시켜 충돌회피경로를 찾는 방법을 제안하였다. 또한 [3]에서 일정한 속도로 움직이는 장애물과의 충돌을 피하기 위하여 2차원 공간에 시간을 추가시킨 3차원 공간에서의 해결방법은 제안하였다. 아울러 정지 장애물과 이동 장애물이 공존하는 환경에서 [1]의 방법을 이용하여 공간 경로를 먼저 결정하고 이 공간 경로를 따라 움직이면서 만나게 되는 이동 장애물의 속도등을 고려하여 로봇트의 속도를 조절함으로써 충돌을 피하는 path-velocity decomposition 방법이 제안되었다.<sup>14)</sup> 로봇트의 동력학까지 고려한 경로계획 방법들로는 [5]에서 경로를 몇 종류로 구분하여 부드럽게 접합시킨 최소시간 경로를 구했으며 로봇트가 움직이는 길이 미리 주어졌던 경우 로봇트의 동력학을 길을 따라 움직인 거리로 표현하여 최소시간 경로를 이론적으로 구하는 방법이<sup>16)17)</sup> 제안되었다. 한편으로 공간변수인 속도, 가속도등을 직접 다루는 대신 로봇트의 각 관절의 힘을 최대한 이용하는 방향으로 등가적으로 시간을 늘리고 줄임으로서 실재적으로 속도, 가속도를 변화시키는 Time scaling 방법도 제안되었다.<sup>18)</sup>

그런데 대부분의 경우 한대의 로봇트를 이용하는 것보다 두대의 로봇트를 이용하는 쪽이 작업의 효율을 높일 수 있으며 경우에 따라서는 한대의 로봇트만으로는 작업이 불가능한 경우도 있으므로 다중로봇트의 도입이 권장되고 있다. 그러나 작업공간을 공유한 두대 이상의 로봇트의 경로계획에 있어서는 각 로봇트가 서로에게 예측할 수 없는 장애물이 되므로 한대의 로봇트의 경우에 대해 연구된 여러결과가 바로 이용되기는 어렵게 된다. 이러한 어려움 때문에 두대 이상의 로봇트의 경로계획에 대해서는 그다지 많은 연구가 행해지지 않은것이 사실이다. 이방면의 연구로는 두대의 로봇트의 경로를 독립적으로 계획한 후 충돌지역을 시간, 공간 좌표계상에서 구하여 원래의 경로를 재조정하는 방법과<sup>19)</sup> 다른 로봇트의 동작을 순간 순간 고려하여 충돌가능성을 판단하여 경로를 조금씩 수정하는 방법등이 있다.<sup>16)11)12)</sup> 그러나 이러한 방법들은 국부적인 영역에서 순간순간 충돌을 피해 목표지점에 도달하기위한 방법들로 최소시간 경로계획과는 거리가 있다고 할 수 있다. 사실 문제의 복잡성으로 인해 두 로봇트의 동력학적

특성을 고려하여 일반적인 경우의 충돌회피 경로계획을 다룬 연구는 아직 없다. 본 논문에서는 두가지 예비조건, 즉 두대의 로봇트의 공간상의 경로(path)가 주어졌었고 그 경로위를 움직이는 상대적인 위치관계(coordination)가 주어졌있는 제한적인 상황에서 최소시간 경로를 구하는 방법을 제안하고자 한다. 이는 일반적인 다중 로봇트의 경로계획 문제를 3단계의 계층적인 부분제(sub-problem)로 나누어 접근한 [13]의 제안에 기초한 것이다. 원래의 다중 로봇트의 경로계획 문제를 된 몇단계의 부분제로 분리하여 각각의 단계에 대하여 최적해를 구하는 방법이 [13]에서 제안되었는데 이 개념은 본 논문의 중요한 기본개념으로 이용되고 있으며 그 단계를 정리하면 다음과 같다;

- i) 각 로봇트별 공간 경로(path)선정
- ii) 코오디네이션 공간(CS:coordination space)에서의 충돌회피 코오디네이션 곡선(CFCC; collision-free coordination curve)선정
- iii) CS상에서 CFCC를 따르는 최소시간 속도계획

본 논문에서는 위의 3번째 단계에 대해 해석하고 해를 구하는 방법에 대해 기술한다. 한편 최근에 활발히 연구되고 있는 신경회로망 분야는 변수의 갯수가 많고 해석적인 깨끗한 해를 기대하기 어려운 문제에 대해 어느 정도 만족스러운 해를 줄 수 있다고 알려져 있으며 그 중에서도 신경최적화회로망(neural optimization network)은 성능지수와 제약조건이 주어졌있는 경우에 반복계산에 의해 최적해를 구해낼 수 있다고 알려져있고,<sup>14)</sup> 한 대의 로봇트의 경로계획에 적용된 예를 [15]에서 찾아볼 수 있다.

다시 한번 요약하면 본 논문에서는 [13]의 부분제로의 분리방법중 3번째 과정, 즉 각 로봇트의 공간 경로가 주어졌었고 코오디네이션 공간에서의 CFCC가 주어졌던 경우 최소시간 속도계획문제를 각 로봇트의 동력학적 제약조건을 고려하여 해결방법을 제시하고 그 해결방법의 복잡성을 극복하기 위하여 신경최적화회로망에서 이용되는 반복계산 개념을 이용하여 수치해석적인 방법으로 두 로봇트의 각 관절별 동작계획을 수행하는 방법을 제안한다.

이후 2장에서는 신경회로망에 의한 최적해 계산방법을 소개하고 3장에서는 코오디네이션공간 및 충돌회피 코오디네이션 곡선의 선정등에 대해 기술하고 4장에서는 최소시간경로계획 문제를 다루며 5장에서는 두대의 SCARA형 로봇트에 대해 적용한 시뮬레이션 결과를 소개하고 6장에서 결론을 맺도록 하겠다.

2. 신경 최적화 회로망

최근 신경회로망 분야는 생명체의 정보처리 매카니즘의 해석과 연관되어 그 자체로도 활발히 연구되고 있으며 주어진 시스템의 수학적 모델링이 아주 어렵거나 모델링이 되었다 하더라도 변수가 너무나 많아 계산량이 아주 많은 경우나 선험적인 지식이 많이 사용되어야 하는 등 기존의 해석적인 방법으로 명쾌한 해를 구하기가 불가능한 경우에 의미있는 해를 제시하는 하나의 방법으로 주목을 받고 있다. 보통 많이 언급되는 신경회로망 모델은 여러층의 유닛이 서로 영향을 미치도록 연결되어 있는 다층 신경회로망이지만 여기서 이용된 것은 아날로그 프로세서 및 수동 소자들이 복잡하게 연결된 특별한 형태의 선형 프로그래밍 네트워크<sup>(14)</sup>로 그 기능을 간단히 설명하면 다음과 같다.

먼저 M개의 스칼라양  $B_j, j=1, \dots, M$ 과 N차원 공간의 벡터  $A$  및  $D_j, j=1, \dots, M$ 이 주어졌다고 하자. 그러면

$$D_j \cdot V > B_j, \quad j=1, 2, \dots, M \quad (1)$$

이라는 제약조건을 만족하며 벡터 내적으로 주어지는 함수값

$$\pi = A \cdot V \quad (2)$$

을 최소가 되게 하는 벡터  $V$ 를 선형 프로그래밍 네트워크로 구할 수 있다.

그림 1은  $N=2, M=4$ 인 경우의 예로서

$$f(z) = \begin{cases} 0, & z \geq 0 \\ z, & z < 0 \end{cases} \quad (3)$$

이고  $g: R \rightarrow R$ 는  $g(0)=0$ 인 임의의 미분 가능한 단조 증가 함수로서,  $f$ 와  $g$ 는 각각 회로소자로서 구현 가능한 함수를 나타낸다. 회로에서 저항값은  $R$ 로 동일하고, 캐패시터 값을  $C_1, C_2$ 라 할 때, 그림1의 회로는

$$C_1 \frac{dU_1}{dt} = -A_1 - \frac{U_1}{R} - \sum_{j=1}^4 D_{j1} f(D_j \cdot V - B_j) \quad (4a)$$

$$V_i = g(U_i), \quad i=1, 2 \quad (4b)$$

로 표시된다. 단 여기서  $V_i$ 는 증폭기  $g$ 의 출력단의 선전압,  $A_i$ 는 전류,  $D_{ji}$ 는 어드미턴스(admittance)이고 각각  $V, A, D_j$ 의  $i$ 번째 성분이다.

그러면 식(4)의 회로 방정식을 갖는 선형프로그래밍 네트워크는 식(1)의 제약조건을 만족시키며 식(2)의 에너지를 최소가 되게하는 방향으로 벡터  $V$ 가 변화해 가다가 안정상태에 도달하면 원하는 해를 줄

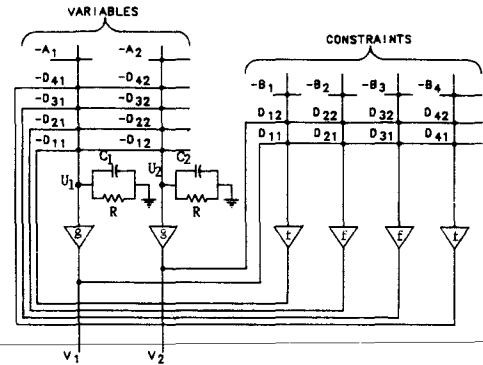


그림 1. 2변수 4제약조건 선형프로그래밍 문제를 풀기 위한 회로의 구성

Fig. 1. The organization of a network which will solve a 2-variables 4-constraints linear programming problem.

수 있다는 것이 이 방법의 주된 아이디어이다. 그 이유는

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{j=1}^4 \frac{dE}{dV_j} \frac{dV_j}{dt} \quad (5)$$

인데 이 에너지를

$$E = A \cdot V + \sum_{j=1}^4 F(D_j \cdot V - B_j) + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{R} \int_0^{V_i} g^{-1}(v) dv$$

$$F(z) = \begin{cases} 0, & z \geq 0 \\ \frac{1}{2}z, & z < 0 \end{cases} \quad (6)$$

으로 정의되면

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^2 \frac{dV_i}{dt} (-C_i \frac{dU}{dt}) = - \sum_{i=1}^2 C_i \frac{dg^{-1}(V_i)}{dV_i} \left[ \frac{dV_i}{dt} \right] \quad (7)$$

이 되고  $g(\cdot)$ 이 단조 증가 함수이므로

$$\frac{dE}{dt} \leq 0 \quad t \in (0, \infty) \quad (8)$$

이 된다. 즉, 주어진 문제의 에너지 함수를 성능지수와 제약조건이 복합된 꼴로 기술하고 이에 따르는 미분 방정식을 구하고 이 방정식대로 동작하는 회로를 구성하면 그회로는 국부 최소값(local minimum)에 빠지지 않는한 최소값으로 가게되며 그때의 상태변수값이 바로 주어진 문제의 해가 된다.

3. 코오디네이션 공간

로봇 두대가 각각의 시점에서 중점으로 움직이

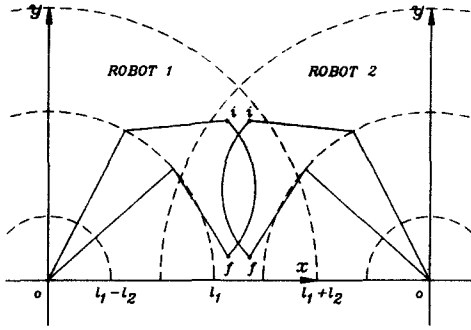


그림 2. 공통된 작업영역을 갖는 두 로봇  
Fig. 2. Two robots in common work space.

는 경우를 생각해 보면 두 로봇의 끝단 뿐아니라 링크까지도 충돌할 수 있으므로 충돌없는 두 로봇의 최단 시간경로를 한번에 구하는 것은 매우 어려운 일이라고 알려져 있다. 그러나 그림2와 같이 두 로봇이 움직여야 할 공간상의 길이 미리 주어졌는 경우에는 각 로봇이 각자의 길위를 움직인 거리를 이용하여 특정 위치에서의 충돌을 판단할 수 있을 뿐아니라 충돌이 없도록 코오디네이션 시킬수도 있게 된다. [13]에서 제안한 코오디네이션 공간(CS: coordination space) 및 충돌회피 코오디네이션 곡선(CFCC: collision-free coordination curve)의 개념을 요약하면 다음과 같다.

두 대의 로봇이 움직인 거리를 최대값이 1이 되도록 정규화시켜  $s^1, s^2$ 라 한다. 그리고  $s^1, s^2$ 를 두 직교축으로 하는 2차원 공간을 구축하여 코오디네이션 공간(CS)이라 부른다. 그러면 이 코오디네이션 공간상에 한 점이 정해지면 실제 작업공간에서 두 로봇의 자세 및 위치가 결정된다. 그러므로 충돌이 발생하는 두 로봇의 모든 자세의 짝에 대응하는 코오디네이션 공간상의 점을 구하여 모으면 코오디네이션 공간상에서 충돌영역을 구할 수 있게 된다. 그림2의 경우에 대해 구축된 CS 및 충돌 영역을 구하면 각각 그림3으로 구해진다. 이렇게 구한 CS 상에서 (0, 0)에서 (1, 1)에 이르는 연속곡선을 구하면 두 로봇의 상대적인 위치가 서로 연계되어 마치 하나의 로봇처럼 보이게 되는데 이 과정을 코오디네이션 계획이라 부른다. 이렇게 계획된 곡선이 CS상의 충돌 영역을 지나지 않으면 계획된 코오디네이션으로 어떻게 속도 계획을 하더라도 두 로봇의 충돌은 없게 된다. 이렇게 시간이 배제된 상태에서 일단 충돌없는 상호 연관 관계를 먼저 결정하고 그 후에 속도계획을 하는 두 단계 접근 방법을 소개한다.<sup>[13]</sup>

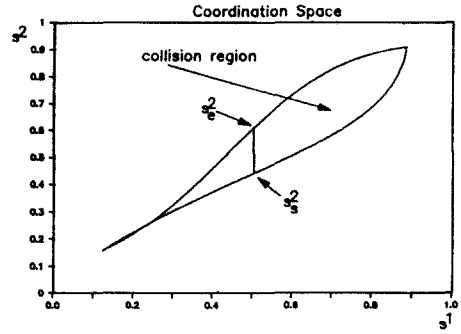


그림 3. 충돌영역 및 코오디네이션 공간  
Fig. 3. Coordination space and collision region.

- i) 충돌 회피 코오디네이션 계획
- ii) 결정된 코오디네이션을 따르는 최소시간 속도 계획

여기서 i)에서 최적해를 구할 때 도입가능한 성능 지수는

- a) 전체 이동시간 동안 두 로봇간의 거리의 합이 최대가 되도록
- b) 전체 이동시간 동안 어느 한 로봇이라도 정지하고 있는 시간이 최소가 되도록

하는등이 있으나 본 논문에서는 다루지 않고 ii)의 최소시간 속도 계획에 대해서만 다루도록 한다.

#### 4. 최소시간 속도 계획

본 장에서는 앞에서 기술한 바와 같이 다중 로봇의 경로계획 문제를 두개의 독립적인 부분 문제로 나누어 그중 두번째의 최소시간 속도 계획 문제에 대해 기술한다. 이 문제를 요약하면 다음과 같다.

[P] 식(9)으로 기구학적 방정식이 식(10)으로 동력학적 방정식이 주어진 두 대의 로봇이 각각 초기 위치와 도착 위치가 정해져 있고 공간상에 움직여야 할 길이 식 (11)으로 주어졌고 CS 상에서의 CFCC가 식 (12)으로 정해져 있을때, 식 (13)의 허용 토크, 식 (14)의 허용 관절 회전속도를 만족시키는 최소시간 경로(속도)를 구하라.

$$\mathbf{X}^r = \mathbf{K}^r(\mathbf{q}^r) \tag{9}$$

$$\mathbf{D}^r(\mathbf{q}^r)\ddot{\mathbf{q}}^r + \mathbf{C}(\mathbf{q}^r, \dot{\mathbf{q}}^r) + \mathbf{g}(\mathbf{q}^r) = \mathbf{u}^r \tag{10}$$

$$\mathbf{x}^r = \mathbf{F}^r(s^r) \tag{11}$$

$$s^2 = d(s^1) \tag{12}$$

$$\mathbf{u}_{\min}^r(\mathbf{q}^r, \dot{\mathbf{q}}^r) \leq \mathbf{u}^r \leq \mathbf{u}_{\max}^r(\mathbf{q}^r, \dot{\mathbf{q}}^r) \tag{13}$$

$$\dot{q}_{i,r}^{\min}(q^r, \dot{q}^r) \leq \dot{q}^r \leq \dot{q}_{i,r}^{\max}(q^r, \dot{q}^r) \quad r=1, 2, \quad (14)$$

이 문제를 풀기위해 다음 사실에 주목하였다.

- i) 각 로봇트는 경로상의 한 점이 주어지면 식(9)에 의해 각 로봇트의 모든 관절각이 결정된다.
- ii) CFCC가 결정되어있는 경우 어느 한 로봇트의 경로상의 한 점이 주어지면 다른 로봇트의 경로상의 위치도 식 (12)에 의해 결정된다.

위의 두 사실로 부터 주어진 로봇트 시스템이 보다 갯수가 줄어진 수식으로 묘사될 수 있음을 알 수 있다.

여기서  $s$ 라는 변수를 CS상에서 (0, 0)점에서 CFCC를 따라 이동한 거리로 정의한다. 그러면 각 로봇트의 관절각은  $s$ 에 관한 함수가 되고 이 함수를 식 (15)로 표시한다.

$$q_i^r = h_i^r(s), \quad r=1, 2 \quad i=1, 2, \dots, N^r \quad (15)$$

단  $N^r$ 은 로봇트  $r$ 의 관절의 갯수이다. 식(15)를 시간 미분하면

$$\dot{q}_i^r = \frac{dh_i^r}{ds} \dot{s} \quad (16)$$

$$\ddot{q}_i^r = \frac{d^2h_i^r}{ds^2} (\dot{s})^2 + \frac{dh_i^r}{ds} \ddot{s} \quad (17)$$

의 관계식이 계산되고 각 관절별 토오르크는 다음식으로 표시된다.

$$\begin{aligned} u_i^r &= \sum_{j=1}^{N^r} J_{ij}^r \ddot{q}_j^r + \sum_{j=1}^{N^r} \sum_{k=1}^{N^r} C_{ijk}^r \dot{q}_j^r \dot{q}_k^r + g_i^r \\ &= \sum_{j=1}^{N^r} J_{ij}^r \left[ \frac{d^2h_j^r}{ds^2} (\dot{s})^2 + \frac{dh_j^r}{ds} \ddot{s} \right] \\ &+ \sum_{j=1}^{N^r} \sum_{k=1}^{N^r} C_{ijk}^r \frac{dh_j^r}{ds} \frac{dh_k^r}{ds} (\dot{s})^2 + g_i^r = \sum_{j=1}^{N^r} J_{ij}^r \frac{dh_j^r}{ds} \ddot{s} \\ &+ \left[ \sum_{j=1}^{N^r} J_{ij}^r \frac{d^2h_j^r}{ds^2} + \sum_{j=1}^{N^r} \sum_{k=1}^{N^r} C_{ijk}^r \frac{dh_j^r}{ds} \frac{dh_k^r}{ds} \right] (\dot{s})^2 + g_i^r \\ &= M_i^r \ddot{s} + Q_i^r (\dot{s})^2 + g_i^r \end{aligned} \quad (19)$$

단  $J_{ij}^r$ 는 관성 매트릭스의  $ij$ 번째 항을,  $C_{ijk}^r$ 는 coriolis 또는 원심력등을 나타내는 tensor의  $ijk$ 번째 항을,  $g_i^r$ 는 중력에 의한 영향을 나타내는 항이다. 그런데 각 관절별로 최대 허용 토오르크가 정해져있으므로 식 (19), (13)에서 다음 부등식이 유도된다.

$$u_{i,r}^{\min} \leq M_i^r \ddot{s} + Q_i^r (\dot{s})^2 + g_i^r \leq u_{i,r}^{\max} \quad (20)$$

$$u_{i,r}^{\min} - Q_i^r (\dot{s})^2 + g_i^r \leq M_i^r \ddot{s} \leq u_{i,r}^{\max} - Q_i^r (\dot{s})^2 + g_i^r \quad (21)$$

여기서 일반적인 경우  $u_{i,r}^{\min} = -u_{i,r}^{\max}$ 임을 고려하면

$$-\frac{\text{sign}(M_i^r) u_{i,r}^{\max} - Q_i^r (\dot{s})^2 + g_i^r}{M_i^r} \leq \ddot{s} \leq \frac{\text{sign}(M_i^r) u_{i,r}^{\max} - Q_i^r (\dot{s})^2 + g_i^r}{M_i^r} \quad (22)$$

여기서 다음의 변수를  $s=v$ 로 새롭게 정의하고 식 (22)을 간략화 하여 표시하면

$$LB_i^r \leq v \leq UB_i^r \quad (23)$$

이 되고 이 식이 모든 관절에 대해 성립해야 하므로

$$\text{Max}_{i,r} LB_i^r \leq v \leq \text{Min}_{i,r} UB_i^r \quad (24)$$

이 유도되고 다시 간략화하여 식(25)으로 표시한다.

$$LB(s) \leq v \leq UB(s) \quad (25)$$

그런데 물리적으로 의미있는 경로계획이 되기 위해서는 식(25)을 만족하는  $v$ 의 값이 존재해야하므로 식 (24)으로부터

$$\text{Min}_{i,r} UB_i^r \geq \text{Max}_{i,r} LB_i^r \quad (26)$$

이 성립해야 하며 이 식을 각 관절별로 분해하여 다시 쓰면

$$UB_i^r - LB_j^q \geq 0, \quad p=1, 2, q=1, 2, \dots, N^p, \quad j=1, 2, \dots, N^q \quad (27)$$

이 되고 원래의 식 (21)으로부터

$$\left[ \frac{Q_i^r}{M_i^r} - \frac{Q_j^q}{M_j^q} \right] v^2 + \left[ \frac{u_{i,r}^{\max} - g_i^r}{|M_i^r|} - \frac{u_{j,q}^{\max} - g_j^q}{|M_j^q|} \right] \geq 0$$

$$p=1, 2, \quad q=1, 2, \quad i=1, 2, \dots, N^p, \quad j=1, 2, \dots, N^q \quad (28)$$

의 부등식이 유도된다. 여기에 로봇트가 경로를 위를 거꾸로 이동하지 않는다고 가정하면 식 (28)의 해는 다음의 모양으로 주어진다.

$$0 \leq v \leq \phi_1(s) \quad (29)$$

또한 식 (14)으로 주어지는 각 관절의 최대 회전 속도로부터 식(30d)의 모양으로 또 하나의 부등식이 주어진다.

$$\dot{q}_{i,0}^r = \frac{dh_i^r}{ds} \dot{s}_0 \quad (30a)$$

$$\gamma = \max \left[ \frac{|\dot{q}_{i,0}^r|}{|\dot{q}_{i,r}^{\max}|} \right] \quad (30b)$$

$$\phi_2 = \dot{s}_{\max} = \frac{\dot{s}_0}{\gamma} \quad (30c)$$

$$0 \leq v \leq \phi_2(s, Q_{i,r}^{\max}, Q_{i,r}^{\min}, Q_{i,r}^{\max}, Q_{i,r}^{\min}) \quad (30d)$$

여기서  $\dot{s}_0$ 는 임의의 값으로 각 관절의 속도를

scaling 하는데 이용되는 값이며 결국 식 (29), (30d)의 두 부등식으로부터  $v$ 의 최종 제약조건은 식 (31)으로 주어진다.

$$0 \leq v \leq \text{Min}(\phi_1(s), \phi_2(s)) = \phi(s) \quad (31)$$

이 제약조건을  $(s, v)$  위상공간(phase plane)에 나타내면 그림 4 과 같이 표시되고 CS상에서 CFCC를 따라 이동한 전체 거리를  $S$ 라하면 전체 이동 시간은

$$T_f = \int_0^s dt = \int_0^s \frac{dt}{ds} ds = \int_0^s \frac{1}{v} ds = \int_0^s \frac{1}{v} ds \quad (32)$$

가 되어  $v$ 를 매순간 최대가 되도록하면 최소시간 속도계획이 된다는 것을 알 수 있다. 이러한 관찰을 근거로 [6][7]의 한대의 로봇트의 경우에 제안된 방법을 변수를 달리하여 적용하여 두 대의 경우에도 최적의 경로를 계획할 수 있고 그 최적성도 증명할 수 있다. 그 방법이란 크게 아래와 같은 두 가지의 경우로 나누어 적용될 수 있다.

- i) 위상공간에서  $s=0$ 에서 부터 최대 가속도로 전진 적분한 궤적과  $s=S$ 에서 부터 최속가속도로 후진 적분한 궤적이 만나는 경우와
- ii) 만나지 않는 경우

이중에서 ii)의 경우는 최대 가속도와 최속가속도를 여러번 스위칭해야할 뿐아니라 그 스위칭할 위치를 찾는 탐색도 상당히 복잡한 계산이 필요하게 된다. 이러한 복잡성을 극복하기 위해 CFCC를 일정한

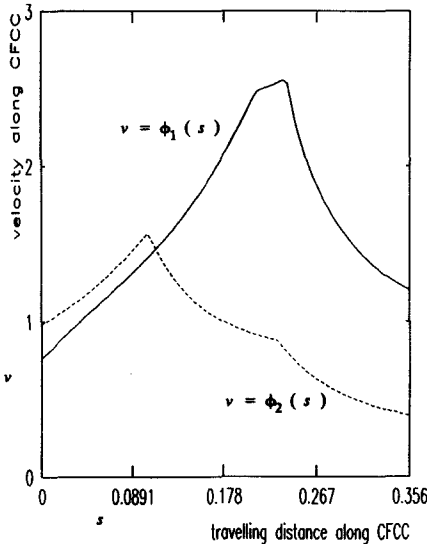


그림 4.  $(s, v)$  위상공간 및 허용 영역  
Fig. 4.  $(s, v)$  Phase plane and admissible region.

간격으로 디스크리타이즈시켜 2장에서 언급한 반복 계산 방법을 도입한다.

먼저 연속 변수  $s$ 를  $\Delta s$ 로  $N$ 등분하여 각각을  $s_k$ ,  $k=0, 1, 2, \dots, N$ 로 한다;

$$0 \leq \dot{s}_k = v_k \leq \phi(k\Delta s) \quad (33)$$

$$LB(k\Delta s) \leq \dot{s}_k = v_k \leq UB(k\Delta s) \quad (34)$$

그리고 가속도는 다음으로 근사화시킬 수 있다.<sup>[10]</sup>

$$\dot{v}_k = \frac{v_{k+1}^2 - v_k^2}{2\Delta s} \quad (35)$$

이때 각 에너지를

$$E_1 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} (\phi(k\Delta s) - v_k)^2 \quad (36)$$

$$E_2 = \sum_{k=1}^{N-1} F \left[ \frac{v_{k+1}^2 - v_k^2}{2\Delta s} - UB(k\Delta s) \right] + \sum_{k=0}^{N-1} F \left[ LB(k\Delta s) - \frac{v_{k+1}^2 - v_k^2}{2\Delta s} \right] \quad (37)$$

$$F(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} z^2, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases} \quad (38)$$

으로 정의하고 전체 에너지를 가중치를 도입하여

$$E = w_1 E_1 + w_2 E_2 \quad (39)$$

으로 한다. 여기서  $F(\cdot)$ 은 가속도 제약조건을 만족시키면 0 값을 갖고 만족하지 않으면 양의 값을 갖도록 고안한 일종의 벌칙함수로서[14]에서 사용한 벌칙 함수와 같은 꼴을 사용하였다.

$E_1$ 은 디스크리타이즈한 각 점에서 최대 속도를 가지면 최소가 되고  $E_2$ 는 가속도가 허용 범위내에 있으면 최소가 되고 결과적으로  $E$ 는 가속도의 제약조건을 만족시키며 각 점에서 최대 속도를 가지면 최소가 된다. 이  $E$ 를 최소화 시키는  $v_k$ ,  $k=0, 1, 2, \dots, N$ 을 찾기 위해  $v_k$ 를 시간 변화율이 에너지의  $v_k$ 에 대한 변화율과 절대값이 같고 부호가 반대가 되도록 하면;

$$\begin{aligned} \frac{dv_k}{dt} &= -\frac{dE}{dv_k} = w_1 \sum_{k=1}^{N-1} (\phi(k\Delta s) - v_k) \\ &+ w_2 \sum_{k=1}^{N-1} f \left[ \frac{v_{k+1}^2 - v_k^2}{2\Delta s} - UB(k\Delta s) \right] \frac{v_k}{\Delta s} \\ &- w_2 \sum_{k=1}^{N-1} f \left[ LB(k\Delta s) - \frac{v_{k+1}^2 - v_k^2}{2\Delta s} \right] \frac{v_k}{\Delta s} \end{aligned}$$

$$f(z) = \begin{cases} z, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases} \quad (40)$$

에너지의 시간 변화율은

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{dE}{dv_k} \frac{dv_k}{dt} = - \sum_{k=1}^{N-1} \left[ \frac{dv_k}{dt} \right]^2 \leq 0 \quad (41)$$

이 되어 에너지는 시간이 지남에 따라 감소하여 최소값에 이르게 된다.

여기서 주의할 점은 국부 최소상태 및 해가 가지는 오차이다. 국부 최소문제는 모든 수치해석적 방법들이 부딪히는 문제로 정상적인 해에 도달하기 전에 프로세싱이 멈추는 일이 생길 수 있다. 그래서 여러 방법들이 경우에 따라 적당히 적용되고 있다. 그러나 이 경우에는 식 (27)에서 보듯이 변수의 2차항과 상수항만 있고 1차항이 없으므로 위상 공간내의 허용 영역이 그림 4 처럼 주어지며 허용 영역안에 동떨어진 금지영역(island<sup>17)</sup>)이 없어 안정된 로컬 미니멈이 존재하지 않으므로 불안정한 로컬 미니멈은 약간의 perturbation을 인가하는 방법<sup>(11)</sup>으로 쉽게 극복할 수 있다. 또한 알고리즘이  $E = w_1 E_1 + w_2 E_2$ 에 대해  $dE/dt \leq 0$ 을 보장하고 있기 때문에 해를 구하는 과정에 국부 최소상태가 없으면  $w_1 E_1 + w_2 E_2$ 가 계속 감소하게 된다. 초기에  $w_1, w_2$ 에 의해 어느 쪽이 빨리 감소하는지가 결정되지만 반복계산을 거듭함에 따라  $E_1$ 이 먼저 작아진 뒤 더 이상 작아질 수 없으면  $E_2$ 가 작아지고 또는 그 반대의 작용으로  $w_1, w_2$ 의 비에 의해 결정되는 오차 범위내의 해로 접근하여 머물게 된다. 이 오차를 완전히 없애기 위해서는 궁극적으로  $w_2 = \infty$ 의 값을 사용하여야 하는데  $E_1, E_2$ 가 서로 밀고 당겨서 평형상태를 유지한다는 간단한 개념에 비해 매우 예외적인 많은 고려가 필요하다. 이러한 문제점을 해결하기 위해  $w_2$ 를 반복계산을 거듭하면서 크게 하거나 안전 여유도를 두어 계산된 가속도 범위를 적당히 작게 줄여서 적용하는 방법등이 있으나 본 논문에서는 방법자체의 제안에 의미를 두어 이 작은 오차 문제까지 다루지는 않았다. 본 장의 요지를 간단히 요약하면 풀고자 하는 문제는 다음과 같다.

[P1] 동력학적 제약조건을 만족하는 두대의 로봇의 최소시간 경로를 구하라.

이 문제를 해결하기 위해 본 논문에서는 CFCC를 따라 움직인 거리  $s$ 를 정의하여 이 변수의 함수꼴로 최대 허용 속도  $\phi$ 가 가속도 범위 UB 및 LB를 계산한 뒤 다음으로 문제를 변환시켰다.

[P2] UB와 LB 사이에 있으며 매순간  $\phi$ 에 가장 가까운 속도 Profile을 구하라.

[P1]과 [P2]가 같은 해를 준다고 하는 것은 [6][7]의 한대의 로봇의 경우와 같이 간단하게 증명되므로 여기서는 생략된다.

## 5. 시뮬레이션 결과

4장에서 기술한 방법을 그림 2와 같은 로봇 시스템<sup>(16)</sup>에 적용하여 보았다. 이 때

$$\begin{aligned} 25 \text{ Nm} &\leq u_f \leq 25 \text{ Nm} \\ -7 \text{ Nm} &\leq u_s \leq 7 \text{ Nm} \\ -2 \text{ rad/sec} &\leq \dot{q}_f \leq 2 \text{ rad/sec} \\ -2.5 \text{ rad/sec} &\leq \dot{q}_s \leq 2.5 \text{ rad/sec} \quad r=1, 2 \end{aligned} \quad (42)$$

로 동력학적 제약조건이 주어지고 그림 3으로 계산된 충돌 영역을 피하기 위해 CFCC를

$$s_2 = (s_1)^2 \quad (43)$$

으로 정하였다. 본 논문에서는 방법의 제안 자체에 의미를 두고 가중치를 Iteration에 따라 변환시키거나 벌칙함수에 안전여유를 두는 방법은 채택되지 않고  $w_1$ 은 10,  $w_2$ 는 100의 값을 택하였는데 이 값을 정하는 특별한 해석적 방법을 이용한 것은 아니고 몇 번의 시뮬레이션을 통하여 특성이 좋은 값을 채택하였다. 그 결과  $(s, v)$  위상공간에서 속도 허용영역이 그림 4와 같이 구해졌다. 또 반복 계산의 초기치를 식 (31)으로부터

$$v(k\Delta s) = \phi(k\Delta s), \quad k=1, 2, \dots, N \quad (44)$$

으로 두어, 즉 허용가능 최대치에서 출발하여, 식(40)의 미분 방정식에 의해 그림 5의 결과가 주어져 약 150번의 반복 계산에 의해 최적해가 구해짐을 볼 수 있다. 결과를 살펴보면 초기치를 최대속도로 두었으므로  $s=0, s=S$  및  $\phi(s)$ 가 급격한 변화를 하는  $s$ 값 근처에서는 가감속 제한 범위를 벗어나게 되므로 이 값들 부근에서 점차 부드러운 변화가 유도되어 해로 접근함을 알 수 있다. 이때의 각 조인트의 가속도는 그림 6과 같이 구해지는데 이는<sup>(11)</sup>에서 dynamic programming에 의해 전 범위에 걸쳐 search한 결과와 일치함을 알 수 있다.

## VI. 결 론

두 대의 로봇의 충돌회피 최소시간 경로 계획문제를 두 단계의 부분제로 분리하여 각각을 독립적으로 다루는 방법을 채택하였다. 이 두 단계의 문제중 두번째, 즉 코오디네이션 공간에서 충돌회피 코오디네이션 곡선이 주어져있는 경우에 대해 각 로봇의 동력학을 고려하여 최적해를 구하는 방법에 대해 기술하였다. 또한 계산의 복잡성을 극복하기 위해 신경최적화 회로망에서 최적해를 구하는 반복계산 방법을 응용하여 도입하였다.

추후에 연구되어야 할 과제로는 두대 이상의 로봇

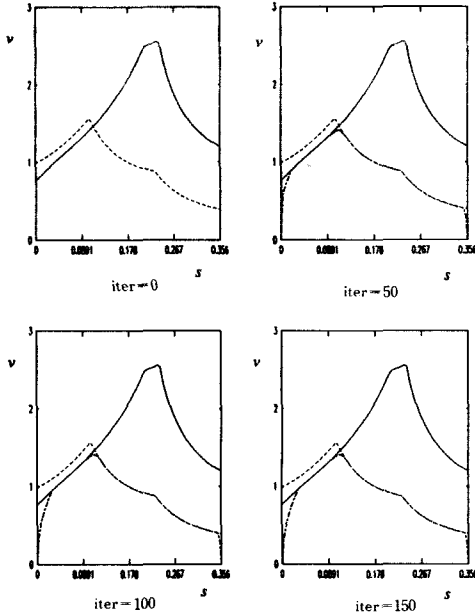


그림 5. 반복 계산에 의한 최적해의 계산  
Fig. 5. Calculation result according to iteration.

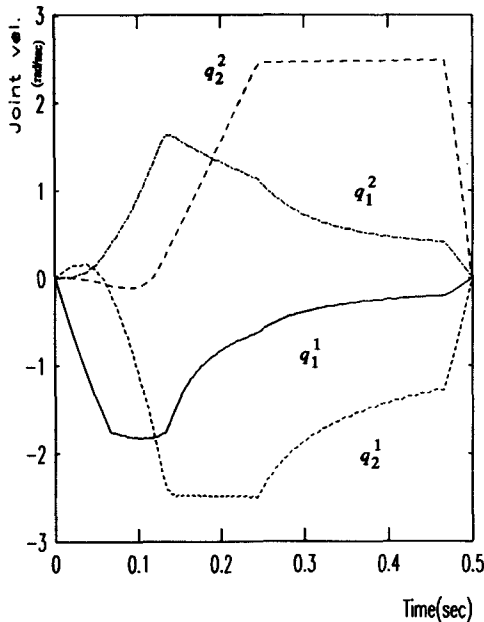


그림 6. 구해진 각 관절별 속도  
Fig. 6. Calculated joint velocities of two robots.

트에 확장 적용되는 일과 앞서 언급한 두단계의 과정을 통합하여 최적해를 구하는 일등이 있다고 할 수 있겠다.

参 考 文 献

- [1] Tomas Lozano-Perez and Michael A. Wesley, "An algorithm for collision-free paths among polyhedral obstacles," *Communications of the ACM*, vol. 22, no. 10, pp. 560-570, Oct. 1979.
- [2] W.E. Red and H.T. Cao, "Configuration maps for robot path planning in two dimensions," *Trans. ASME*, vol. 107, pp. 292-298, Dec. 1985.
- [3] K. Fujimura, and H. Samet, "A hierarchical strategy for path planning among moving obstacles," *IEEE Trans. on Robotics and Automations* vol. 5, no. 1, pp. 61-69, Feb. 1989.
- [4] K. Kant and S.W. Zucker, "Toward efficient trajectory planning: the path-velocity decomposition," *Int'l J. of Robotics Research*, vol. 5, no. 3, pp. 72-89, Fall 1986.
- [5] Byung Kook Kim, and Kang G. Shin, "Minimum-time path planning for robot arms and their dynamics," *IEEE Trans. on SMC*, vol. SMC-15, no. 2, pp. 213-223, Mar/Apr, 1985
- [6] J.E. Borown, S. Dubowski and J.S. Gibson, "Time-optimal control of robotic manipulators along specified paths," *Int'l J. of Robotics Research*, vol. 4, no. 3, pp. 3-17, Fall 1985.
- [7] K.G. Shin and N.D. McKay, "Minimum-time control of robotic manipulators with geometric path constraints," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-30, no. 6, pp. 531-541, Jun 1985.
- [8] G. Sahar and J.M. Hollerbach, "Planning of minimum-time trajectories for robot arms," *Int'l J. of Robotics research*, vol. 5, no. 3, pp. 90-100, Fall 1986.
- [9] B.H. Lee and C.S.G. Lee, "Collision-free motion planning of two robots," *IEEE Trans. on SMC*, vol. SMC-17, no. 1, pp. 21-32, Jan/Feb. 1987.
- [10] E. Freund and H. Hoyer, "Real-time pathfinding in multirobot systems including obstacle avoidance," *Int'l J. of Robotics Research* vol. 7, no. 1, pp. 42-70, Feb. 1988



- [11] J. Lee and Z. Bien, "Collision-free trajectory control for multiple robots based on neural optimization network," *Robotica* Accepted for publication 1990.
- [12] C. Chang, M.J. Chung and Z. Bien, "Collision-free motion planning for two articulated robot arms using minimum distance functions," *Robotica* Accepted for publication 1990.
- [13] Y. Shin and Z. Bien, "Collision-free trajectory planning for two robot arms," *Robotica* vol. 7, pp. 205-212, 1989.
- [14] D.W. Tank and J.J. Hopfield, "Simple "Neural" optimization networks: An A/D converter, signal decision circuit, and a linear programming circuit," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, vol. CAS-33, no. 5, May 1986.
- [15] K. Tsutguni and H. Matsumoto, "Neural computation and Learning strategy for manipulator position control," *International conference on Neural Networks*, vol. IV, pp. 525, 1987.
- [16] 신유식, "두대의 로봇트를 위한 충돌회피 궤적선정," 박사학위 논문, 한국과학기술원, 1989.

---

 著 者 紹 介
 

---



李志弘 (正會員)  
 1960年 4月 20日生. 1983年 서울대학교 공과대학 전자공학과 졸업. 1985年 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업(석사). 현재 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 박사과정.

卞 增 男 (正會員) 第27卷 第1號 參照  
 현재 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 교수