

디지털 곡선의 다각형 근사화

(A Method of Polygonal Approximation of Digital Curves)

柳承必*, 權五錫**, 金太均**

(Sung Pil Lyu, O Sok Kwon, and Tae Kyun Kim)

要約

곡선의 다각형 근사화 방법은 화상분석 또는 데이터 압축등에 많이 사용된다. 다각형 근사화 방법으로, 적은 break point수를 갖고, Sequential Process로 결과를 얻을 수 있는 Cone intersection 방법이 있다. 여기서는 화소간의 거리가 일정한 디지털 곡선의 경우, 종래의 cone intersection 방법을 정수계산을 이용하여 속도를 향상시키는 방법을 제안한다.

Abstract

Polygonal approximation of digital curves is useful for the image analysis or data compression.

There are methods of polygonal approximation using cone intersection which have relatively smaller number of break points and are executed in sequential process.

Here, a method of polygonal approximation is proposed, which is modified from Sklansky and Gonzales' method, and improves the speed by using integer operations.

I. 서론

곡선의 다각형 근사화 방법은 화상분석 및 데이터 압축에 많이 사용되는 방법이다. 다각형 근사화 방법은 거리, 각도, 면적 및 구조적 특성등을 이용하여 많은 연구가 있어 왔다.^{1)~7)} 이들의 방법으로는 한 점에 대해서 두번 이상 수행하는 방법과, 한점에 대해서 한번씩 수행하는 방법^{4)~7)} 등이 있는데 대체로 후자가 전자에 비해 속도가 빠르다.

한편, 한점에 대해 한번씩 수행하는 방법으로는 구조적 특성, 면적 및 Cone intersection 등을 이용하는

방법이 있는데, 구조적 특성을 이용하는 방법^{1)은} 허용오차를 1인 경우로 제한하고 있으므로 그 활용의 폭이 좁고, 면적을 이용하는 방법^{2)은} 곡선의 형태에 따라 허용오차가 일정하지 않아, 비교적 많은 segment(또는 break point)가 생기게 된다. 그런데, cone intersection을 이용하는 방법은 허용오차가 거의 일정한 값을 가지게 되어, 다른 방법에 비해 적은 segment를 발생하므로, 현재까지 방법중에는 가장 효율적인 방법으로 알려져 있으나, 구조해석에 의한 방법이나, 면적을 이용하는 방법에 비해 속도가 늦은 단점이 있다.

Cone intersection 방법으로는 Williams⁶⁾가 제안한 방법과 Sklansky⁷⁾가 제안한 방법등이 있는데, 삼각함수 Tangent의 반각 특성을 이용하여, 삼각함수의 계산없이 segment를 추출하는 Williams의 방법이 속도면에서 우수하고, 접선의 각도를 이용하는 Sklansky의 방법은 전자에 비해 break point수가 적은 것

*正會員, 韓國原子力研究所 計測制御研究室
(Korea Atomic Energy Research Institute, IC Dept.)

**正會員, 忠南大學校 電子計算機工學科
(Dept. of Comput. Eng., Choongnam Nat'l Univ.)

接受日字: 1990年 1月 18日

으로 알려져 있다.^[11]

여기서는 화소간의 거리가 균등한 디지털 곡선(선을 구성하는 이웃하는 점들 간의 거리가 1 또는 $\sqrt{2}$ 인 디지털 곡선)에 대해서, Sklansky의 방법을 수정하여, 각도의 비교대신에 길이의 비교로 곡선으로부터 segment들을 추출하는 방법을 제안한다.

한편, 여기에서는 길이 및 점점의 위치에 관한 변수들을 모두 정수화시키고, 이들 정수화된 변수의 가감산 및 비교만으로 segment들을 추출하여, 종래의 cone intersection 방법에 비해 속도를 개선시켰다.

II. 다각형 근사화 방법

1. 접선

Sklansky가 제안한 cone intersection 방법은 그림 1과 같이 두 접선 사이에 다음 점이 존재하면, 그 점은 같은 segment가 되고, 아니면 그 점은 다른 segment의 일부가 된다. 이들 접선은, 시작점 이후 현재 점($p_n, n=1, 2, \dots$)까지 각 점을 중심으로 반지름 e (허용오차)의 원을 구성하고, segment 시작점(break point)으로부터 원에 접하는 두개의 접선을 구한 다음, 양의 x 축으로부터 각도를 계산하여, 값이 큰 접선을 $TCONE_i (1 \leq i \leq n)$, 값이 작은 것을 $BCONE_i$ 라 할 때, $TCONE_i$ 중에 각도가 가장 작은 것이 상위접선, $BCONE_i$ 중에 가장 큰 것이 하위접선이다. 즉, 시작점과 p_{n+1} 을 잇는 직선이 이루는 각도가 상하위접선 사이에 있으면, 시작점에서 p_{n+1} 까지 하나의 segment가 되고, 아니면, 시작점에서 p_n 까지 하나의 segment로 되고, p_n 은 새로운 시작점(break point)이 된다. 이와같이 Sklansky 방법은 매점마다, 3개의 각도를 계산해야 하고, 이 계산은 이 방법의 수행속도를 결정하게 된다.

그런데, 만약 한점에서 접선까지의 거리를 쉽게 알 수 있다면, 거리의 크기를 고려하여, 현재점과 현재 점으로부터 만들어질 접선들이 상하위접선 이내에

있는지 여부를 경우를 미리 판정하여, 접선의 계산을 줄일 수 있다.

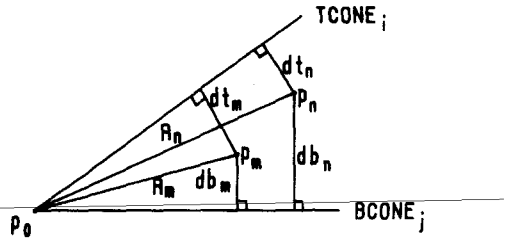


그림 2. 점과 접선과의 거리

Fig. 2. Distance between points and tangent lines.

그림 2에서,

- p_0 : segment 시작점
- p_m, p_n : 디지털곡선상의 점들
- R_m, R_n : 원점에서 p_m, p_n 까지의 길이
- dt_m, dt_n : p_m, p_n 으로부터 상위 접선까지의 거리
- db_m, db_n : p_m, p_n 으로부터 하위 접선까지의 거리
- $TCONE_i, BCONE_j$: 점 p_m 까지 상위접선 및 하위 접선
- $i, j, m < n$ 이고, $i, j \leq m$

라고 할 때, 만약 $R_n \geq R_m$ 이고, $dt_m \geq dt_n \geq 0$ (0 보다 작으면 cone 외부에 있는 것으로 간주)이면, $db_m < db_n$ 이 된다. 따라서 이때, $TCONE_i < TCONE_n$ 이므로 상위접선은 변하지 않으므로 $TCONE_n$ 의 계산은 불필요하다. 한편, $db_m < db_n$ 에서 만약 $db_n \leq e$ (허용오차)이면, $BCONE_j \geq BCONE_n$ 이므로, 역시 $BCONE_n$ 의 계산이 필요없고, $db_n > e$ 이면, 새로운 최대 하위접선은 $BCONE_n$ 이 된다. 그런데 만약, $dt_{n+k-1} \geq dt_{n+k} (k=1, 2, \dots)$ 이라고 하면, 위와 같은 이유로 $db_{n+k+1} < db_{n+k}$ 이고, 이 경우, 하위접선은 적어도 p_{n+k} 까지 계속 갱신되면서, p_{n+k} 까지 같은 line segment로 된다. 따라서, 이와같이 접선으로부터 거리가 계속 짧아지는 경우, 하위접선을 계속 갱신할 필요없이, 최종적으로 p_{n+k} 에서 생성되는 $BCONE_{n+k}$ 를 하위접선으로 하면 된다. 한편, 초기에 원점으로, 일정한 수의 점까지 R 의 값은 e 보다 작을 수 있고, 이 때, 거리오차는 e 미만이므로 접선을 역시 계산할 필요가 없다. 그리고, 위의 결과는 상하위접선 바뀌어도 결과가 같으므로, 이상으로부터, 그림 3과 같이 조건에 따라 상하접선중의 한쪽 또는 양쪽의 계산 또는 한점으로부터 두접선까지의 거리중 하나의

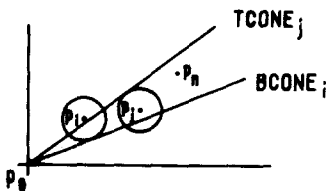


그림 1. Cone intersection
Fig. 1. Cone intersection.

```

if last_R<=e then begin
  if R>e then find TCONE and BCONE
  end
else
  if R<last_R then begin
    if dt>e then find TCONE:
    if db>e then find BCONE:
    end
  else
    if dt>e then begin
      if db>e then find TCONE and BCONE
      else if db>last_db then find TCONE
      end
    else begin
      if bt>e and dt>last_dt then find BCONE
      end
  end

```

그림 3. 상하위접선 갱신 조건
Fig. 3. Conditions for updating cone.

계산을 피할 수 있다.

2. 변수의 정수화

1) 길이의 계산 및 비교

그림 3의 알고리즘에서와 같이 거리는 비교를 위해서만 사용되므로 반드시 정확한 실제값이 필요한 것이 아니고, 상대적인 비교가 가능하도록 하면 된다.

한편, 화소간의 거리가 1 또는 $\sqrt{2}$ 로 표시되는 화상의 윤곽선의 경우 길이의 비교는 정수의 가감산 또는 비교에 의해 정확하게 이루어진다.

그림 4 (a)에서 화소간 8 방향 단위벡터를 U_0, U_1, \dots, U_7 으로 정의하고, 그림 4 (b)에서 원점부터 어떤 점 p_i 까지를 벡터 P_i 라 할 때, P_i 를 서로 이웃하는

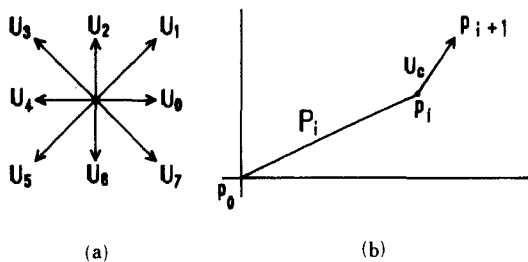


그림 4. 8 방향 단위벡터 및 두점간의 벡터
(a) 단위벡터
(b) 두점간의 단위벡터

Fig. 4. 8 directional unit vectors and a unit vector between 2 points.
(a) unit vectors.
(b) a unit vector between 2 points.

두종류의 8 방향 단위벡터로 표현할 수 있다.^(6,9)

$$P_i = m * U_a + n * U_b \tag{1}$$

(여기서 m, n 은 0 이상의 정수이고, a, b 는 연속된 정수로, a 는 짝수, b 는 홀수이다. 0은 7과 연속된 정수로 간주한다.)

가 된다. 한편, $|P_i|$ 는

$$|P_i| = \sqrt{(m+n)^2 + n^2} \tag{2}$$

이다. 따라서, P_i 의 길이는 m 과 n 이 결정되고, a 가 짝수, b 가 홀수이면, 단위벡터 U_a, U_b 가 어떤 종류이든 관계없이 일정하다. 그리고, 만약 P_i 에 단위벡터 U_c 을 더하여 이를 P_{i+1} 라 하고,

$$P_{i+1} = P_i + U_c = m' * U_d + n' * U_e \tag{3}$$

($c=0, 1, \dots, 7$ 이고, d, e 는 연속된 정수로 d 는 짝수, e 는 홀수이다.)

라 할 때,

[정의] $m+n$ 과 $m'+n'$ 의 차이는 1 이하이다.

[증명]

사선방향의 벡터 U_b 를, $U_b = U_a + U_f$ (a, f 는 짝수)로 나타내면, P_i 와 U_c 는 각각,

$$P_i = (m+n) * U_a + n * U_f \tag{4}$$

$$U_c = s * U_a + t * U_f \tag{5}$$

로 표현되고, 여기서 s, t 는

$$-1 \leq s, t \leq 1 \tag{6}$$

인 정수이다. 따라서, P_{i+1} 은 (3), (4), (5)로 부터,

$$P_{i+1} = (m+n+s) * U_a + (n+t) * U_f \tag{7}$$

가 된다. (7)식으로 부터,

i) $m+n+s > n+t \geq 0$ 이면,

$$P_{i+1} = (m+s-t) * U_a + (n+t) * U_b$$

이므로 $m'+n' = m+n+s$ 이고, $|(n'+m') - (m+n)| = |s| \leq 1$ 이다.

ii) $n+t > m+n+s \geq 0$ 이면,

$$P_{i+1} = (t-m-s) * U_f + (m+n+s) * U_b$$

가 되고, 이 때, $m'+n' = n+t$ 이고, $|(n'+m') - (m+n)| = |t-m|$ 이다. 한편, $m+n+s > n+t$ 에서 $t-m > s$ 이므로 이를 만족하는 $t-m$ 은 0 또는 1이다.

iii) $m+n+p < 0$ 인 경우,

$m=n=0$ 이고, $p=-1$ 이 되므로,

$$P_{i+1} = U_c$$

이다. 이때, $m' + n' = 1$ 이므로, 정리가 성립한다.

iv) $n + t < 0$ 이고, $m + n + p \geq 0$ 이면,
 $n = 0$, $q = -1$ 이므로, 식 (6)으로 부터,

$$P_{i+1} = (m + s) * U_a + U_g \quad (U_g = -U_f, g < f)$$

여기서 $(m + s) = 0$ 이면, $m' + n' = 1$ 이므로 정리가 성립한다. 만약 여기서 $(m + s) \geq 1$ 이면,

$$P_{i+1} = (m + s + 1) * U_a + U_h \quad (U_h = U_g + U_a)$$

이므로, $m' + n' = m + s$ 이고, $|(n' + m') - (m + n)| = |s| \leq 1$ 이다.

한편 P_i 와 P_{i+1} 의 길이의 비교는 만약

i) $m' + n' = m + n$ 이고, $n' = n$ 이면,

$$|P_{i+1}| = |P_i|$$

ii) $n' + m' > m + n$ 이거나, $m' + n' = m + n$ 이고,
 $n' > n$ 이면,

$$|P_{i+1}| > |P_i|$$

iii) $m' + n' < m + n$ 이거나, $m' + n' = m + n$ 이고,
 $n' < n$ 이면,

$$|P_{i+1}| < |P_i|$$

가 된다. 여기서 U_a, U_b, m, n 은 x_i 와 y_i 의 비교 및 감산에 의해서 간단히 계산된다. 예를 들면, $x_i \geq 0$, $y_i \geq 0$, $y_i < x_i$ 이면, 식 (1)에서, $U_a = 0$, $U_b = 1$ 이고, 또, $m = x_i - y_i$, $n = y_i$ 가 된다.

2) 접점

원의 접점의 위치를 정수화하기 위해, 여기에서는 원을 8각형 근사화하였다. 근사화 방법은 그림 5 (a)에서와 같이 두면,

$$|s * U_1| = |2 * h * U_0| \quad (8)$$

$$e = s + h \quad (9)$$

가 되고, 이를 다시 표현하면,

$$h = (\sqrt{2} - 1) * e \quad (10)$$

$$s = e - h \quad (11)$$

이 된다. 여기서 s, h 값을 정수화하기 위해 h 값의 소숫점 이하를 반올림 또는 버림등을 하여 정수화한다. 반올림하는 경우, $e = 10$ 일 때, 중심으로부터 가장 먼점의 거리는 10.77이고, 가장 가까운 거리는 9.90이 된다. 이와 같이 대체로 e 가 10이하일 경우 반지름의 길이는 한 화소 미만의 오차를 갖게 된다.

이상과 같이 원을 8각형 근사화하면, 임의의 점으로부터 접점의 위치는 그림 5 (b)와 같이 8구역으로 나누어지며, 각 구역마다 접점의 위치는 일정하게 된다. 예를 들면, 점 p_0 로부터 원의 상위 접선은 접점 t_i 를 지나고, 하위의 접선은 그림 6 (c)와 같이 점 b_i 를 지나게 된다.

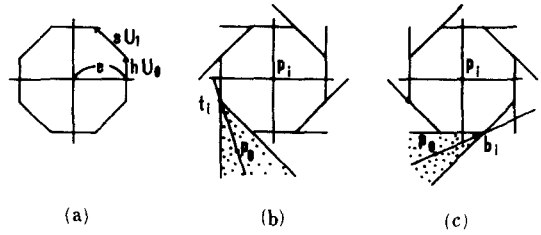


그림 5. 원의 8각형 근사화 및 접점위치

- (a) 8각형 근사화된 원
- (b) 상위 접점
- (c) 하위 접점

Fig. 5. Octagonal approximation of circle and position of tangent points.

- (a) octagonal approximation of circle,
- (b) upper tangent point,
- (c) lower tangent point.

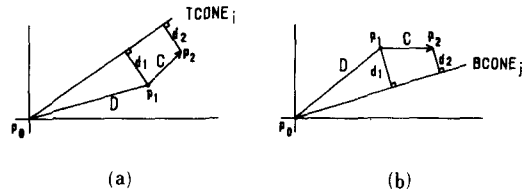


그림 6. 점과 접선 간의 거리

- (a) 상위접선까지 거리
- (b) 하위접선까지거리

Fig. 6. Distance from a point to tangent line.

- (a) to upper tangent line.
- (b) to lower tangent line.

3) 접선으로부터 임의의 점까지 거리비교

그림 6 (a)와 같이 이웃하는 두점 p_1, p_2 가 있고, 이 점들로부터 두 점까지의 거리를 각각 d_1, d_2 라 하면, d_1 과 d_2 의 크기 비교는 직선의 기울기 a 와 두 점을 연결하는 8방향 체인코드 C ($C=0, 1, 2, \dots, 7$)에 의해서 결정된다. 만약 직선의 기울기가 $0 < a < 1$ 이면, C 가 5, 6, 7, 0 중에 하나면, $d_2 < d_1$ 이고, 아니면, $d_2 > d_1$ 이 된다. 직선의 기울기가 $0 \leq a < 1$ 일 때, 2.3 절의 디지털직선 생성 알고리즘에 의하면, 이 직선은 8방향 체인코드 0 또는 1로 표현된다. 디지털 직선의 체인코드 종류중 크기가 작은 것(0과 7인 경우 7)을 D (예를 들어, $0 \leq a < 1$ 이면, 체인코드 종류는 0 또는 1을 가지므로 이 때, $D=0$ 이다.)로 표현하면, 그림 6 (a)와 같이 점들이 직선아래에 있는 경우 D, C 및 d_1, d_2 의 관계는,


```

for all points do begin
  if R<=e then begin
    calculate R:
    if R>e then find TCONE and BCONE
  end
  else begin
    calculate R:
    find dt and db:
    if bt<0 or dt<0 then begin
      Mark last point (lx,ly) as break point:
      if R>=e then find TCONE and BCONE
    end
  end
  else
    if R<last_R then begin
      if dt>e then find TCONE:
      if db>e then find BCONE:
    end
  end
  else
    if dt>e then begin
      if db>e then find TCONE and BCONE
    else if db>last_db then find TCONE
    end
  end
  else begin
    if bt>e and dt>last_dt then find BCONE
  end
end:
last_R:=R:
(lx,ly):=(x,y)
end:

```

R : 시작점에서 현재점까지 거리
TCONE : 상위점점 위치계산
BCONE : 하위점점 위치계산
find dt and db : 점선으로부터 거리계산 및 다음 기준점 위치결정
dt>last_dt, db>last_db : 2.3절과 같이 비교

그림 8. 다각형 근사화 알고리즘
Fig. 8. Algorithm of polygonal approximation.

그림 9의 (a), (b)는 Dunham^[11]이 여러 알고리즘의 비교에 사용한 염색체 그림으로 허용오차가 각각 1, 2일 때 결과(Sklansky 방법, Williams 방법 및 본 방법의 결과가 일치)로서 화소수가 148개인 비교적 단순한 도형의 경우이고, 그림 9의 (c), (d), (e)는 곡선을 구성하는 화소의 수가 1177개인 비교적 복잡한 화상으로 허용오차가 10인 경우, 본방법(s, h는 소숫점 이하 반올림), Sklansky 방법 및 Williams 방법을 적용했을 때의 결과이다. 한편, Table 1은 위 그림에 대하여, 3가지 방법에 대해, 허용오차를 각각 달리 하여 얻어지는 break point 수와 수행속도의 비교표이다. 비교표에서 보는 바와 같이 본 방법은 break point 수는 Sklansky 방법 및 Williams 방법과 거의 일치하면서, 속도는 보다 빠른 것을 나타내고 있다. (IBM-PC AT, 20MHz, PASCAL 언어사용).

IV. 결 론

곡선의 다각형 근사화 방법은 데이터 압축 및 영상 분석에 많이 이용된다. 이에 관하여 많은 알고리즘들이 제시되었으나, cone intersection^[6,7]에 의한 방법이 비교적 좋은 결과를 주는 것으로 Dunham^[11]은 실험으로 보여준 바 있다. 그러나 이 방법은 실수의 곱셈 및 제곱근 또는 삼각함수의 계산에 의존해야 하므로 그 속도가 늦은 것이 단점이라 할 수 있다.

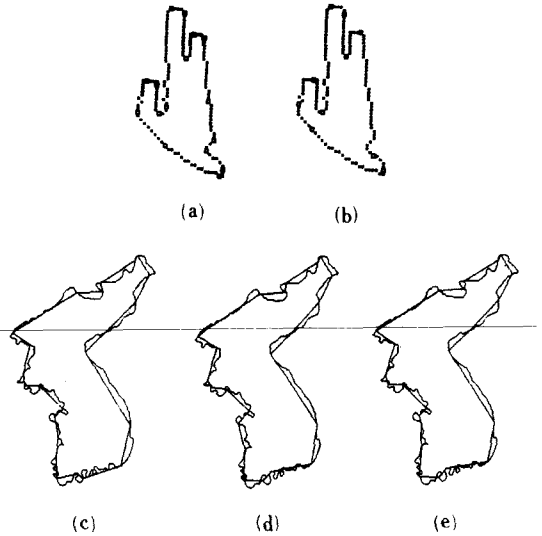


그림 9. 다각형 근사화 예
Fig. 9. Example of polygonal approximation.

표 1. 그림 9의 실험결과(break point 수/수행시간(초))

Table 1. Results of experiment for fig. 9. (no. of break points/execution time(sec))

입력	허용오차	본방법	Sklansky방법	Williams방법
염색체	1	16 (0.059)	16 (0.385)	16 (0.286)
	2	10 (0.052)	10 (0.384)	10 (0.280)
	3	9 (0.049)	9 (0.390)	9 (0.260)
	4	7 (0.048)	7 (0.373)	7 (0.257)
한국지도	1	181 (0.483)	179 (3.46)	180 (2.31)
	2	102 (0.395)	100 (3.46)	101 (2.25)
	5	41 (0.297)	42 (3.19)	42 (2.09)
	10	22 (0.269)	22 (2.96)	23 (1.98)
	22	10 (0.258)	12 (2.96)	12 (1.98)

한편, 화상분석 또는 데이터 압축을 위해 제공되는 입력화상이 거리가 균등한 화소로 이루어진 경우가 많이 있다. 이 논문에서는, 이들 화상내의 주어진 곡선이 이웃점들 간의 거리가 1 또는 $\sqrt{2}$ 인 경우에, Sklansky 방법을 수정하여, 각도 비교를 길이의 비교 전환하고, 이들 거리 및 점점위치의 변수를 정수로 근사화함으로써, 속도를 향상시켰다. 또한 정수에 의한 근사화에도 불구하고 e가 10 이하일 경우, 다른 방법과 break point 위치 및 숫자가 거의 일치하여, 다른 cone intersection 방법의 효율성을 그대로 유지한다.

參 考 文 獻

- [1] U. Ramer, "An iterative procedure for the polygonal approximation of plane curves," *CGIP* 1, pp. 244-256, 1972.
- [2] T. Pavlidis, "Polygonal approximation by newton's method," *IEEE Trans on comput.*, vol. c-26, pp. 800-807, 1977.
- [3] Y. Kurozumi and W.A. Davis, "Polyginal approximation by the minimax method," *CGIP* 19, pp. 248-264, 1982.
- [4] S. Shlien, "Segmentation of digital curves using linguistic techniques," *CVGIP* 22, pp. 277-286, 1983.
- [5] K. Wall and P.E. Danielsson, "A fast method for polygonal approximation of digitized curves," *CVGIP* 28, pp. 220-227, 1984.
- [6] C.M. Williams, "An efficient algorithm for the piecewise linear approximation of planar curves," *CGIP* 8, pp. 280-293, 1978.
- [7] J. Sklansky and V. Gonzales, "Fast polygonal approximation of digitized curves," *PR* 12, pp. 327-331, 1980.
- [8] H. Freeman, "On the encoding of arbitrary geometric configuration," *IRE Trans. on Electronic computers* 10, pp. 260-268, 1961.
- [9] A. Rosenfeld, "Digital straight line segment," *IEEE Trans. on Comput.* C-23, pp. 1264-1269, 1974.
- [10] S. Pham, "Digital straight segments," *CVGIP* 36, pp. 10-30, 1986.
- [11] J.G. Dunham, "Optimum uniform piecewise linear approximation of planar curves," *IEEE Trans. on PAMI*, vol. PAMI-8, pp. 67-75, 1986.

— 著 者 紹 介 —

柳 承 必 (正會員) 第26卷 第12號 參照
 현재 한국 원자력 연구소
 선임 연구원

金 太 均 (正會員) 第26卷 第12號 參照
 현재 충남대학교 전자계산기
 공학과 부교수

●

權 五 錫 (正會員) 第26卷 第12號 參照
 현재 충남대학교 전자계산기
 공학과 조교수