

# 組合網 調整에 있어서 剩餘 觀測數의 영향 The Effects of Redundants in the Hybrid Networks

楊 寅 台\*    崔 勝 弼\*\*  
Yang In-Tae    Choi Seung-Pil  
邊 茂 龍\*\*\*  
Byun Moo-Ryong

### 要 旨

본 研究는 組合網 調整에 있어서 剩餘觀測數가 精度에 미치는 영향을 파악하기 위하여 剩餘觀測數를 변 화시켜서 網을 조정 한 것이다. 또한 수평위치 결정에 있어서 어떤 방법이 가장 效用성이 있는지를 제시하 기 위하여 剩餘觀測數에 따른 精度도를 분석하였다. 본 研究에서 실시한 組合網의 調整에 있어서 평균제 곱근 오차는 三邊測量에 비하여 長軸에서 약 78~82%, 短軸에서 약 48~60%, 三角測量에 비하여 長軸에 서 약 84~87%, 短軸에서 약 29~45% 감소되었고, 剩餘觀測數와 精度度와의 사이에는  $Y=464.71429X+13517.57143$  의 函數關係가 성립한다. 그러나 剩餘觀測數의 증가가 精度度를 향상시키므로 최적의 剩餘觀測數의 결정은 經濟的인 측면에서 매우 중요한 과제이므로 앞으로의 연구과제가 생각된다.

### ABSTRACT

This paper is a study on the adjustment of hybrid network of which the redundants effect its precision. To estimate efficiency of triangulation, trilateration and hybrid networks, this study analyzed the variation of precision to the change of the number of redundants. In the result of this study, the RMSE of the hybrid network was decreased 78 to 82 percent in semi-major axis, 48 to 60 percent in semi-minor axis to the trilateration and 84 to 87 percent in semi-major axis, 29 to 45 percent in semi-minor axis to the triangulation. The corelation with the number of redundant between the precisions is the function of  $y=464.71429x+13517.57143$ . The interease of the number of the redundants can improve the precision, but because the number of redundants is very important in the surveying economics, the optimum number of redundants must be studied in the future.

## 1. 序 論

三角測量에 의한 수평위치 결정은 화란의 Willebrood Snell Van Royen에 의하여 처음 실시된 이래 수백년 동안 위치 결정의 주요한 수단으로 이용되어져 왔다<sup>1)</sup>. 최근에 전자파 거리측량기의 출현으로 짧게는 수 km에서 멀리는 수십 km까지의 직접 관측할 수 있는 三邊測量技法이 1962년 Stipp에 의해 既知點으로부터 세 未知點을 구하는 예가 발표되었고, 1966년에는

A. Sabbah가 면적조건식을 유도하고 1973년에는 Wolf와 Johnson이 단거리용 EDM을 사용하여 三邊測量을 실시하였다<sup>2)</sup>.

澤田良修(1978)는 기지점이 한 점 이상인 경우 三邊測量에 대한 각조건식과 면적조건식을 제시하였으며<sup>3)</sup>, Wolf(1980)는 최소제곱법을 이용하여 미지점을 구하는 기법을 발표하였다<sup>4)</sup>.

국내에서는 研究된 논문으로 楊(1987)<sup>5)</sup>에 의하여 剩餘觀測邊이 觀測誤差를 갖는다면 완전한 網을 이루기 위해서는 기준선 방향의 영향이 다른변의 길이에 변화를 가져오게 된다. 이 변화를 최소일의 원리를 적용함으로써 해석하였으며, 楊, 崔(1987)에 의하여 假想일의 원리를 3차원 三邊網 解析에 적용하여 그 效用성을 검토

\* 江原大學校 工科大學 副教授  
\*\* 江原大學校 大學院 博士課程  
\*\*\* 江原大學校 大學院 碩士課程

하고 실용화하는 방안을 제시하였다<sup>6)</sup>.

三角網 조정은 관측각과 최소한 하나의 기선이 필요하나 三邊網 조정은 三角測量에서 角觀測이 모두 거리관측으로 대체되므로 더 많은 剩餘觀測값을 얻을 수 있으므로 측점의 정확한 좌표결정을 위해 종래 기법에 많은 변화를 가져왔다. 그러나 剩餘觀測값의 수가 정도에 미치는 영향이 아직 연구되어 있지 않으므로 본 論文에서는 三角測量과 三邊測量을 組合한 경우에 剩餘觀測값의 수에 의한 영향을 파악하고, 分析法는 측점좌표의 標準誤差橢圓과 비교하여 두 인접 측점 사이의 相對誤差橢圓으로 나타낼 수 있는 측점좌표의 輕重率 係數를 계산하였다.

## 2. 數學的 모델

조정의 결과를 分析하는 중에 조정된 媒介變數, 觀測 및 殘差의 Posterior 分散-共分散 Matrix 을 이용한다.

경중률이 가해진 수학적 모델은 다음과 같고<sup>7)</sup>

$$L=F(X) \quad (1)$$

관측 방정식은 다음과 같다<sup>8)</sup>.

$$V=AX+L \quad (2)$$

여기서  $V : m \times 1$ 의 Column Matrix

$$A = \frac{\partial F}{\partial X} : m \times n \text{의 Coefficient Matrix}$$

$$L=L_0-L_b : m \times 1 \text{의 Column Matrix}$$

최소 제곱법의 조건은  $\sum V^2$ 이 최소가 되어야 함으로  $V^T V$ 도 최소가 되며 輕重率을 고려할 경우  $V^T P V$ 가 최소가 된다.

여기서 輕重率  $P$ 는 觀測數  $m$ 의 Diagonal Matrix 이므로 다음과 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$$\begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & & & & 0 \\ 0 & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & P_m \end{pmatrix}$$

식 (2)을  $V^T P V$ 에 대입하면

$$V^T P V = (AX+L)^T P (AX+L) \quad (3)$$

가 되며 이것이 최소가 되어야 한다.

식 (3)을 정리하면

$$V^T P V = X^T A^T P A X + 2X^T A^T P L + L^T P L + \quad (4)$$

식 (4)를 미지의 媒介變數  $X$ 로 편미분하면 0이 된다.

$$\frac{\partial V^T P V}{\partial X} = 2A^T P A X + 2A^T P L = 0 \quad (5)$$

(5)를 미지의 媒介變數  $X$ 로 정리하면

$$X = -(A^T P A)^{-1} A^T P L \quad (6)$$

殘差  $V$ 는 식(6)를 식(2)에 대입하면 구해진다.

## 3. 誤差橢圓 解析

點의 수평위치와 같이 2차원 상에서의 精密度 영역을 나타내는 誤差橢圓은 조정된 測池網에 있어서 각 測點의 精密度에 대하여 많은 정보를 제공한다.

相對誤差橢圓은 두 測點 사이의 相對的인 精密度숫자로 나타낼 수 있으며 측량 전체에 걸친 문제점들을 알아내는데 도움이 된다<sup>9)</sup>.

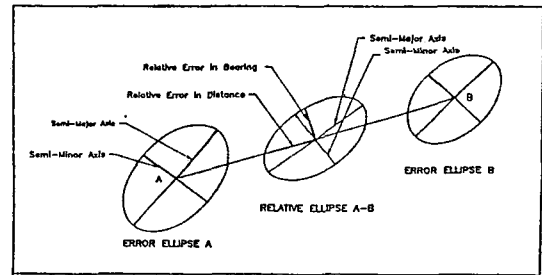


그림 1. 誤差橢圓과 相對誤差橢圓의 관계

이러한 誤差橢圓은 <그림 1>과 같이 長軸(a), 短軸(b) 및 方位를 구하여 나타낸다. 점의 좌표값에 대한 분산  $\sigma$ 은  $X$  또는  $Y$ 좌표값의 信賴性에 대한 기대값이다.

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E(X - V_x)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i - V_x)^2 P(X_i) = \frac{V^T P V}{\eta - U} \quad (7) \end{aligned}$$

두 개의 確率變數  $X$  및  $Y$ 에 대한 特殊函數를  $(X - V_x)(Y - V_y)$ 라 하면 이 때 기대값은 共分散  $\sigma_{XY}$ 로 표시한다<sup>10)</sup>.

$$\sigma_{XY} = E[(X - V_x)(Y - V_y)] \quad (8)$$

標準偏差( $\sigma$ )의 確率은 68%로서 신뢰값을 나타내나 信賴精度를 95% 높이기 위하여  $\sigma$ 에 19.6을 곱한다. 일반적으로 측점을 誤差橢圓으로 검증하기 위하여 좌표값의 最大 標準誤差(a)와 最小 標準誤差(b)를 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$a^2 = \frac{1}{2} [(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + \{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4(\sigma_{xy})^2\}^{1/2}] \quad (9)$$

$$b^2 = \frac{1}{2} [(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - \{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4(\sigma_{xy})^2\}^{1/2}] \quad (10)$$

標準誤差橢圓은 長軸을 a로 短軸을 b로 하는 橢圓이다. 誤差橢圓의 信賴性을 95%까지 높이기 위하여 標準誤差橢圓의 長軸 a에 2.447배, 短軸 b에 2.447배 하여 信賴橢圓을 구할 수 있다.

#### 4. 모델 觀測結果 및 調整

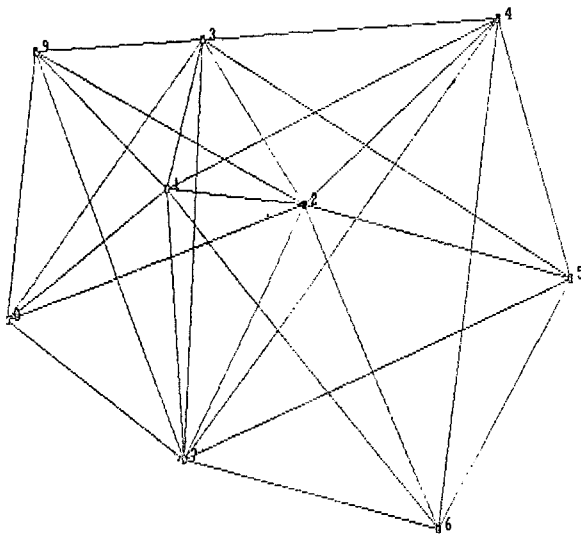


그림 2. 관측모델

모델은 有心多角網을 그림 2와 같이 구성하였고 EDM(RED2L)과 TM10E를 사용하여 관측한 결과는 <표 1>과 같다.

##### (1) 각 측점의 誤差橢圓

각 측점의 精密度를 평가하기 위하여 誤差橢圓

表 1. 觀測結果 (단위 : m)

From	At	To	Angle	At	To	Distance
3	1	2	76-07-34	1	2	285.121
2	1	7	80-39-16	1	3	234.674
7	1	8	64-29-52	1	7	407.520
8	1	9	66-58-19	1	8	384.867
9	1	3	71-44-51	1	9	340.178
1	2	3	44-52-10	2	3	322.910
3	2	4	95-49-09	2	4	489.183
4	2	5	45-33-14	2	5	562.314
5	2	6	49-36-25	2	6	560.835
6	2	7	62-43-22	2	7	457.872
7	2	1	61-26-00	3	4	612.839
1	3	9	68-21-59	3	9	347.546
2	3	1	59-00-26	4	5	412.619
4	3	2	52-34-03	5	6	471.192
5	4	2	76-38-04	6	7	537.408
2	4	3	31-37-02	7	8	423.285
2	5	4	57-49-05	8	9	401.795
6	5	2	65-02-08	1	4*	732.400
7	6	2	49-13-19	1	6*	758.530
2	6	5	65-21-42	7	3*	630.005
8	7	1	55-09-09	7	4*	929.480
1	7	2	37-54-56	7	5*	849.421
2	7	6	68-03-20	7	9*	882.286
9	8	1	51-11-43	2	8*	639.959
1	8	7	60-20-44	2	9*	601.050
3	9	1	39-53-19	3	5*	839.186
1	9	8	61-50-10	3	8*	582.169
				4	6*	776.652

\* 剩餘觀測

圓을 이용하여 관측값을 三角과 三邊組合, 三邊觀測, 三角觀測方法에 대하여 ① 하나의 方位角을 고정, ② 方位角을 전혀 고정하지 않음, ③ 하나의 方位角을 고정하되 모든 剩餘觀測을 고려하여 계산하였다.

그 결과 값은 각각 表 2(a, b, c), 3(a, b, c), 4(a, b)와 같고 이것을 각 측점에 대한 誤差橢圓으로 나타내면 그림 3(a, b, c), 4(a, b, c), 5(a, b)와 같다.

表 2. a 三角과 三邊組合(方位角 Free)

Station	Semi-Major Axis	Semi-Minor Axis	Azimuth of Major Axis
1	0.000	0.000	0-00
2	0.022	0.020	11-47
3	0.019	0.015	18-25
4	0.058	0.045	156-37
5	0.070	0.050	8-39
6	0.063	0.046	47-10
7	0.035	0.028	92-06
8	0.033	0.029	163-12
9	0.028	0.026	85-06

表 2. b 三角과 三邊組合(方位角 Fix)

Station	Semi-Major Axis	Semi-Minor Axis	Azimuth of Major Axis
1	0.000	0.000	0-00
2	0.020	0.013	92-04
3	0.019	0.000	18-25
4	0.045	0.034	74-09
5	0.050	0.043	98-50
6	0.046	0.040	115-10
7	0.028	0.022	166-26
8	0.029	0.021	50-45
9	0.027	0.015	120-19

表 2. c 三角과 三邊觀測(方位角 Fix, 剩餘觀測 고려)

Station	Semi-Major Axis	Semi-Minor Axis	Azimuth of Major Axis
1	0.000	0.000	0-00
2	0.014	0.012	86-34
3	0.014	0.000	18-25
4	0.032	0.028	141-45
5	0.040	0.030	8-46
6	0.037	0.028	56-42
7	0.021	0.019	114-21
8	0.021	0.019	28-26
9	0.020	0.014	115-06

表 3. a 三邊觀測(方位角 Free)

Station	Semi-Major Axis	Semi-Minor Axis	Azimuth of Major Axis
1	0.000	0.000	0-00
2	0.116	0.052	24-33
3	0.068	0.011	18-25

4	0.240	0.066	171-27
5	0.291	0.084	16-23
6	0.281	0.084	47-56
7	0.177	0.067	86-41
8	0.167	0.070	146-58
9	0.129	0.057	18-50

表 3. b 三邊觀測(方位角 Fix)

Station	Semi-Major Axis	Semi-Minor Axis	Azimuth of Major Axis
1	0.000	0.000	0-00
2	0.115	0.052	24-53
3	0.068	0.000	18-25
4	0.237	0.066	171-43
5	0.289	0.083	16-33
6	0.278	0.084	48-02
7	0.176	0.067	86-42
8	0.166	0.070	146-56
9	0.128	0.057	18-30

表 3. c 三邊觀測(方位角 Fix, 剩餘觀測 고려)

Station	Semi-Major Axis	Semi-Minor Axis	Azimuth of Major Axis
1	0.000	0.000	0-00
2	0.087	0.039	22-32
3	0.052	0.000	18-25
4	0.173	0.046	166-37
5	0.215	0.049	18-27
6	0.208	0.051	47-09
7	0.132	0.050	89-05
8	0.135	0.050	145-27
9	0.105	0.045	22-20

表 4. a 三角觀測(方位角 Free)

Station	Semi-Major Axis	Semi-Minor Axis	Azimuth of Major Axis
1	0.000	0.000	0-00
2	0.142	0.018	94-33
3	0.118	0.000	18-25
4	0.367	0.049	69-32
5	0.424	0.062	98-48
6	0.381	0.058	132-23
7	0.205	0.032	175-27
8	0.195	0.031	59-42
9	0.173	0.022	126-30

表 4. b 三角觀測(方位角 Fix)

Station	Semi-Major Axis	Semi-Minor Axis	Azimuth of Major Axis
1	0.000	0.000	0-00
2	0.142	0.032	94-33
3	0.118	0.021	18-25
4	0.367	0.083	69-32
5	0.424	0.099	98-48
6	0.381	0.091	132-23
7	0.205	0.049	175-27
8	0.195	0.047	59-42
9	0.173	0.038	126-29

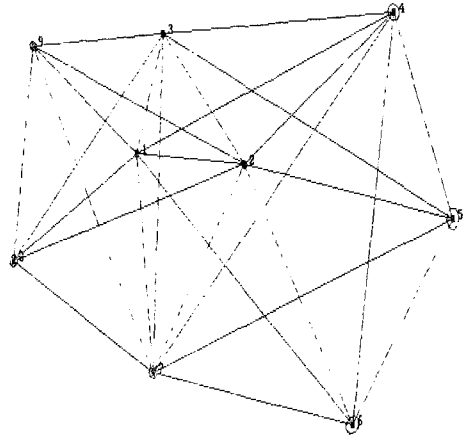


그림 3. c. 三角과 三邊組合의 誤差橢圓(方位角 Fix, 모든 剩餘觀測 고려)

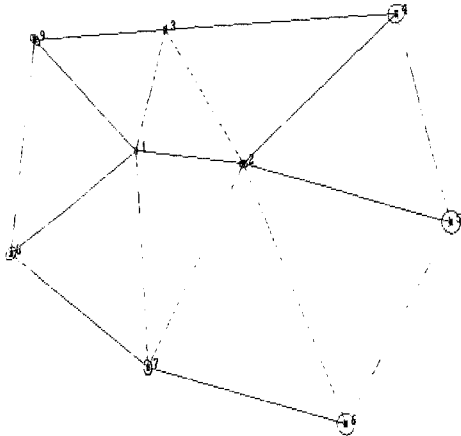


그림 3. a. 三角과 三邊組合의 誤差橢圓(方位角 Free)

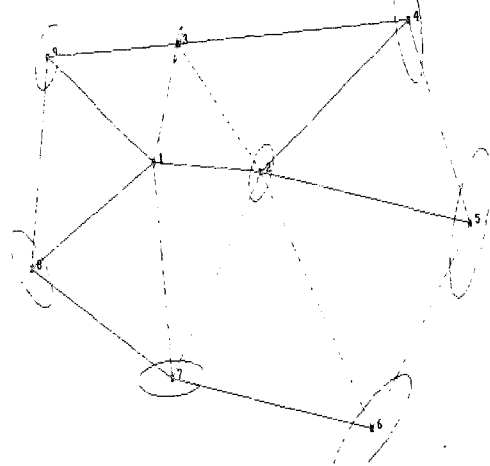


그림 4. a. 三邊觀測의 誤差橢圓(方位角 Free)

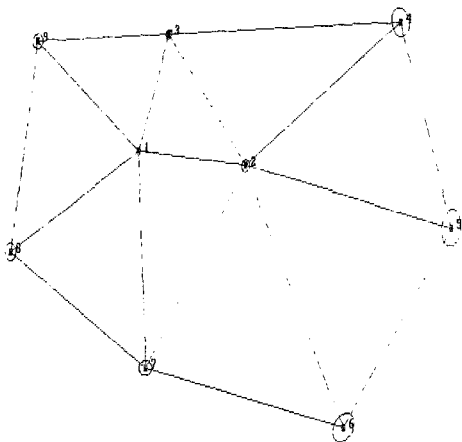


그림 3. b. 三角과 三邊組合의 誤差橢圓(方位角 Fix)

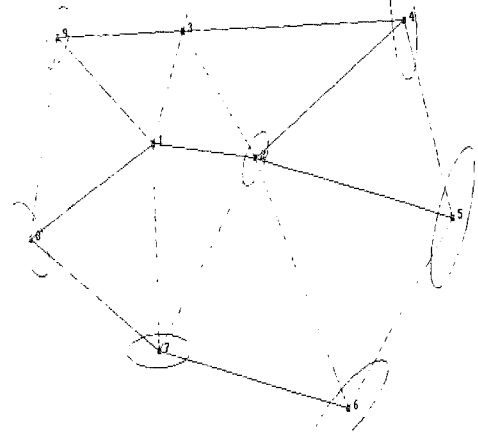


그림 4. b. 三邊觀測의 誤差橢圓(方位角 Fix)

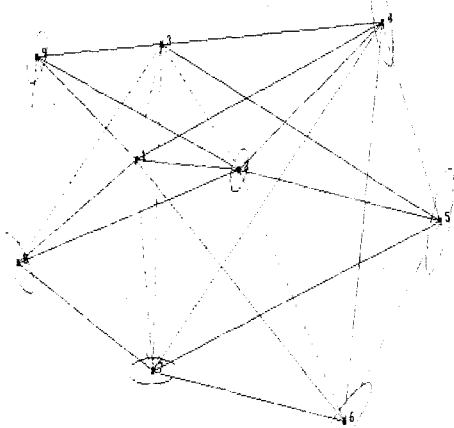


그림 4. c. 三邊觀測의 誤差橢圓(方位角 Fix, 모든 剩餘觀測 고려)

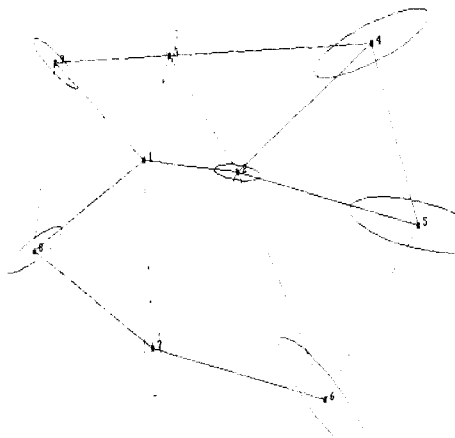


그림 5. a. 三角觀測의 誤差橢圓(方位角 Free)

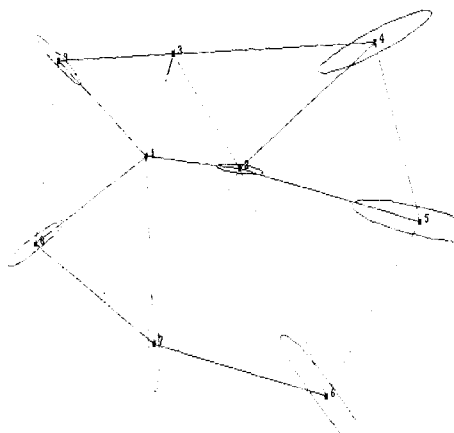


그림 5. b. 三角觀測의 誤差橢圓(方位角 Fix)

(2) 각 邊의 相對誤差橢圓

精密度를 평가하기 위하여 상대오차타원을 이용하여 하나의 方位를 고정시키고 ① 三角과 三邊組合, 三邊觀測, 三角觀測方法 ② 三角과 三邊組合 方法에서 剩餘觀測數를 변화시켜 계산된 精密度는 <表 5, 6>과 같고 이것을 각각 誤差橢圓으로 나타내면 <그림 6, 7, 8>과 같다.

表 5. 觀測方法에 따른 精密度

邊	精 密 度		
	삼각과 삼변조합	삼변관측	삼각관측
1-2	1 : 13963	1 : 2475	1 : 2014
1-3	1 : 12336	1 : 3467	1 : 1985
1-7	1 : 14385	1 : 2310	1 : 1983
1-8	1 : 13235	1 : 2312	1 : 1973
1-9	1 : 12439	1 : 2648	1 : 1971
2-3	1 : 13384	1 : 2666	1 : 2004
2-4	1 : 14432	1 : 2683	1 : 1968
2-5	1 : 15209	1 : 2671	1 : 1972
2-6	1 : 15548	1 : 2752	1 : 1977
2-7	1 : 15227	1 : 2971	1 : 1991
3-4	1 : 14522	1 : 2531	1 : 1986
3-9	1 : 11960	1 : 2566	1 : 1972
4-5	1 : 11974	1 : 2695	1 : 1957
5-6	1 : 12856	1 : 2659	1 : 1965
6-7	1 : 13921	1 : 2764	1 : 1977
7-8	1 : 12940	1 : 2422	1 : 1977
8-9	1 : 12207	1 : 2756	1 : 1971

表 6. 剩餘觀測 變化시 精密度

剩餘觀測數	精 密 度
1	1 : 12980
2	1 : 13561
3	1 : 14447
4	1 : 15099
5	1 : 15777
6	1 : 16563
7	1 : 16943
8	1 : 16979
9	1 : 17573
10	1 : 17700
11	1 : 18100
12	1 : 18612
13	1 : 18817

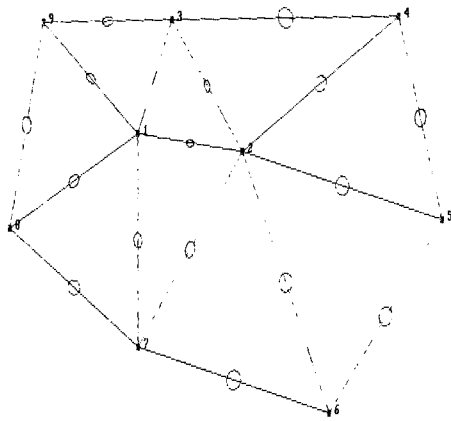


그림 6. 三角과 三邊組合의 相對誤差橢圓

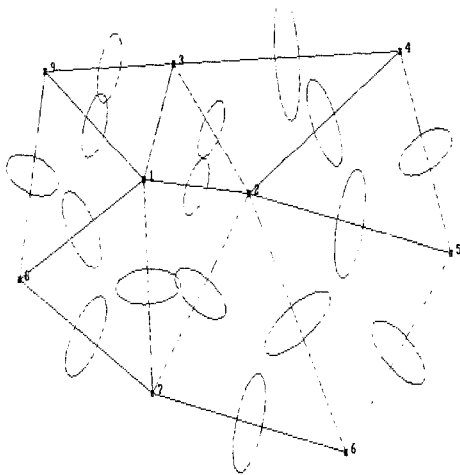


그림 7. 三邊觀測의 相對誤差橢圓

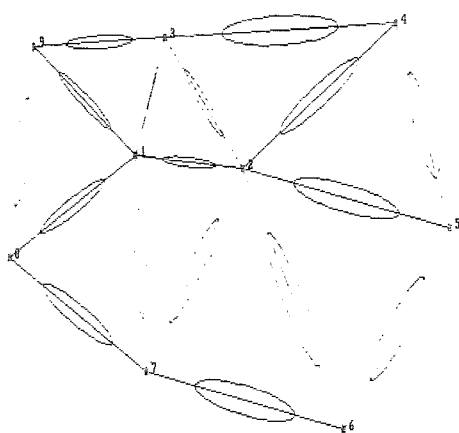


그림 8. 三角觀測의 相對誤差橢圓

가늘고 긴 誤差橢圓은 좌표중 어느 하나에 보다 큰 誤差가 있으며 측점에 추가적인 거리 또는 각의 측정이 필요하다는 것을 나타내고, 크고 둥근 誤差橢圓은 XY 좌표에서 측점의 균형을 이루지만 보다 정확한 측정기술이나 다른 측점으로부터 추가적인 측점이 필요하다는 것을 나타낸다<sup>11)</sup>.

### 5. 調整方法의 比較分析

각 관측방법에 의하여 조정된 誤差橢圓의 결과를 정리하면 <表 7>과 같고 이것을 비교하기 위하여 그래프로 나타내면 <그림 9>와 같다.

表 7. 觀測方法에 따른 誤差橢圓의 평균제곱근 誤差 (단위 : m)

Observation Method	Semi-Major Axis	Semi-Minor Axis
삼각과 삼변조합(방위각 Free)	0.041	0.032
삼각과 삼변조합(방위각 Fix)	0.033	0.024
삼각과 삼변조합(방위각 Fix, 모든 잉여관측 고려)	0.025	0.019
삼변관측(방위각 Free)	0.184	0.061
삼변관측(방위각 Fix)	0.182	0.060
삼변관측(방위각 Fix, 모든 잉여관측 고려)	0.138	0.041
삼각관측(방위각 Free)	0.251	0.058
삼각관측(방위각 Fix)	0.251	0.034
삼각관측(방위각 Fix, 모든 잉여관측 고려)		

<表 7> 및 <그림 9>에 나타난 결과를 보면 三角과 三邊組合은 三邊觀測에 비하여 평균 제곱근 오차가 長軸에서 약 78~82%, 短軸에서 약 48~60%, 三角觀測에 비하여 長軸에서 약 84~87%, 短軸에서 약 29~45% 감소가 됨을 알 수 있다.

相對誤差橢圓에 의하여 조정된 변의 精密度 分布와 剩餘觀測數에 의한 精密度 分布를 그래

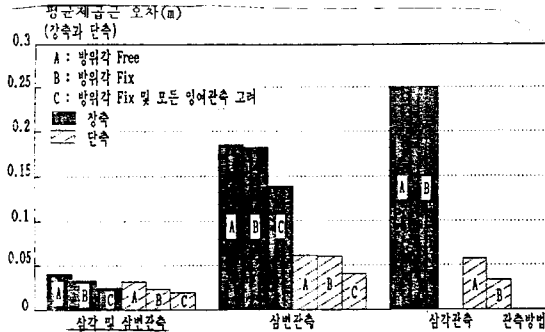


그림 9. 관측방법에 따른 오차타원의 분포

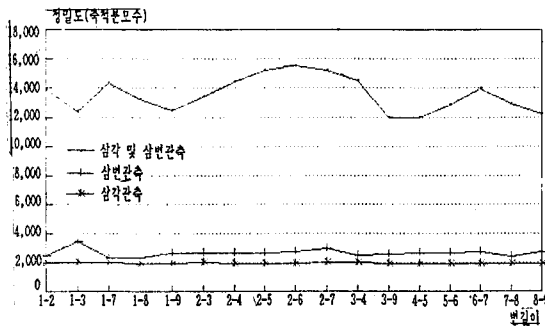


그림 10. 관측방법에 따른 정확도 분포

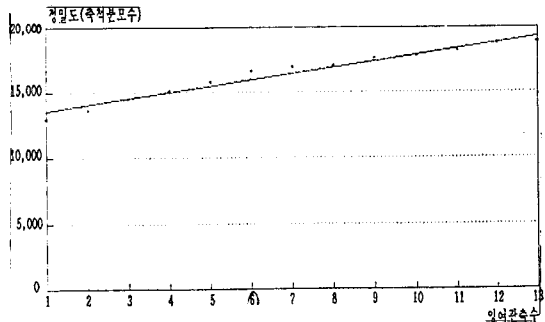


그림 11. 잉여관측수에 따른 정확도 분포

프로 나타내면 <그림 10, 11>과 같다.

剩餘觀測數를 13로 할 때가 1로 할 때보다 약 31%가 증가함을 알 수 있다. 이것을 1次函數라는 가정하에서 相關關係를 유도하면  $Y=464.71429X+13517.57143$  이다.

또한 三角과 三邊組合이 三邊觀測에 비하여 精密도가 약 263%, 三角觀測에 대하여 약 854%가 향상됨을 알 수 있다.

## 6. 結 論

測點이 9 개이고 1-2 測線을 기선으로 하고 1번측점을 고정으로 한 본 實驗에서의 結果를 分析한 結果 다음과 같은 結論을 얻었다.

1. 三角 및 三邊을 組合하여 측량하는 것이 三邊測量에 비하여 平均계폭근 오차가 長軸에서 약 78~82%, 短軸에서 약 48~60%, 三角測量에 비하여 長軸에서 약 84~87%, 短軸에서 약 29~45% 감소됨을 알 수 있다.
2. 剩餘觀測數와 精密度의 縮尺分母와의 函數關係는  $Y=464.71429X+13517.57143$  로 주어진다.

## 參 考 文 獻

1. Stipp, D. W., 1962, "Trilateration Adjustment", Journal of the Surveying and Mapping Division, ASCE Vol. 22, No. 4, pp. 575~590.
2. Wolf, P. R., and Johnson, S. D., 1973, "Trilateration with Short Range E. D. M. Equipment and Comparison with Triangulation", Proceeding of A. S. C. M., Fall Convension, pp. 62~76.
3. 澤田良修, 1978, "測量計算 タニマアル", 山海堂, pp. 80~89.
4. Wolf, P. R., 1980, "Adjustment Computations", 2nd ed., P. B. L. Publishing Co., pp. 117~142.
5. 楊寅台, 1987, "고정점을 갖는 平面 三邊網의 최소일의 원리에 의한 調整", 大韓土木學會 論文集, 제 7卷 4號, pp. 133~138.
6. 楊引台, 崔哲淳, 崔勝弼, 1987, "가상일의 원리에 의한 3次元 三邊網 解析에 관한 研究", 大韓土木學會 학술발표회 개요집(Ⅱ), pp. 281~287.
7. David B. and Zilkoski, B. S., 1979, "Simulation Study of Lateral Refraction in a Triangulation Network", The Ohio State University, Department of Geodetic Science, pp. 20~23.
8. Moffitt, F. and Bouchard, H., 1982, "Surveying", 7th ed., pp. 75~760.
9. STARPLUS, 1989, "STAR\*NET user's manual", pp. 82~85.
10. 柳福模, 1984, "測量學 原論(Ⅰ)", 開文社, pp. 45~50.
11. Friesen, "Adjustment, Error Ellipse Analysis and Reliability Analysis of the British Columbia Railway Tumbler Ridge Tunnel Control Survey", Calgary, Alberta, Canada, pp. 7~12.