

## 鉛直方向의 加速度를 考慮한 長波의 變形解析 Transformation of Long Waves with Vertical Acceleration

呂 運 光\*  
Woon Kwang Yeo\*

**要 旨** : 水面傾斜가 크거나 水深이 급격하게 변하는 地形에서는 流線의 굴곡으로 인한 鉛직방향의 加速度가 생겨 靜水壓과 다른 壓力分布를 나타낸다. 따라서 이 경우 이들의 影響을 考慮한 Boussinesq式을 使用해야 한다. 여러 가지 方法에 의하여 式을 얻을 수 있으나 여기서는 亂流解析을 위한 平均流의 개념을 導入하여 類似한 式을 誘導하였으며 기존의 式들과 比較하였다. 또한 實際 數值解析에 의하여 解를 구하고 Boussinesq항의 影響을 검토하였다.

**Abstract** □ Boussinesq-type equations should be employed in which the water surface profile is considerably steep or the bottom topography is abruptly changed. The primary reason is that the pressure deviates significantly from the hydrostatic pressure distribution due to the large curvature of the stream lines. It is shown that such a Boussinesq type equation can be also derived by making use of the concept of the averaged flow description for specifying the turbulence effects. In addition, a numerical scheme is developed to solve the equations and the effects of the Boussinesq term is briefly investigated.

### 1. 序 論

波浪이 海岸線 가까이로 進行함에 따라 波形傾斜는 급하여지고 마침내 부서지게 된다. 이러한 波浪의 變形은 주로 線型化된 運動方程式에 의하여 解析되며, 그 중 淺海에서 흔히 使用되는 Airy式은 水面傾斜가 완만하여 거의 흐름이 水平的이라는 가정하에 誘導되었으나 그 解를 보면 水面이 점차 급하게 되어 수직에 가까운 極限값까지 나타나게 된다. 이러한 경우 實際 使用된 가정과 일치하지 않는 모순을 內包하고 있어 解의 타당성에 의문을 제기하게 된다. 波形傾斜가 작을 때는 Airy式처럼 壓力을 靜水壓分布로서 취급하여도 무방하나, 碎波附近과 같이 급한 波形傾斜를 갖는 곳에서는 水壓이 靜水壓과 상당한 차이를 가지므로 좀더 正確한 解를 얻기 위하여는 非線型 解析方法이 要求된다.

이와 같이 流線의 굴곡에 의한 鉛직방향의 가속도를 고려하여 壓力이 水深에 따라 線型的으로 변하지 않는다는 式은 Boussinesq 以後 여러 가지 형태의 것이 提案되어 왔다. 이는 式의 誘導에 있어 變數選定의

多樣性, 흐름의 條件 등에 따라 式의 형태가 달라지기 때문이다. 例로서 Solitary wave는 水深이 一定하다는 가정으로, 그리고 KdV式은 波가 一方向으로 進行한다는 條件으로부터 얻어진다. 한편 壓力分布에 影響을 미치는 流線의 굴곡은 水深의 급격한 變化에도 매우 민감하다고 보아 Peregrine(1967)은 水深變化를 고려한 式을 漸近方法으로 誘導하고 Abbott *et al.*(1978)도 유사한 式을 提案하였다. 그의 Whitham(1974), Mass *et al.*(1978)은 變분기법을 사용하여, 또 Green *et al.*(1979), Hauguel(1980) 등은 에너지 적분방법에 의하여 式을 誘導하였다. 이렇게 各種 Boussinesq型의 式들은 提案者들에 의하여 그들 나름대로의 타당성을 보이고 있으나 唯一(unique)한 式의 形態는 아직 보이지 않고 있다. 本 研究에서는 亂流理論에서 使用되는 平均流의 개념을 도입하여 또다른 형태의 Boussinesq式을 誘導하고 既存의 式과 無次元化를 통하여 比較하였다. 또한, 實際 數值解析에 의하여 解를 구하였으며 鉛직가속도의 影響을 나타내는 Boussinesq項을 究明하였다.

\*明知大學校 土木工學科(Department of Civil Engineering Myong, Ji University, Seoul 120-728, Korea)

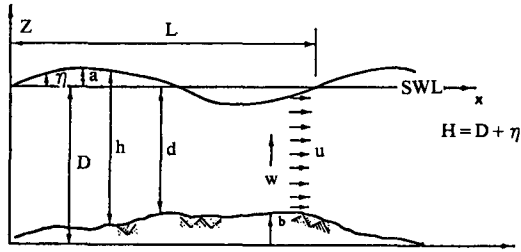


Fig. 1. Definitions of the variables.

### 2. 支配方程式

非壓縮性 流體에 對하여 2次元 Euler의 運動方程式은

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{dw}{dt} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (2)$$

여기서  $u, w$ 는 水平 및 鉛直方向의 速度分析이고  $g$ 는 重力가속도이며 기타 變數들은 Fig. 1과 같이 定義한다. 흐름이 거의 水平일 때는 鉛直方向의 加速度를 무시해도 무방하나 流線의 굴곡이 큰 경우 이를 고려해야 한다. 비선형이류항을 무시하고 연직방향의 속도  $w$ 가 低面에서는 0, 水面에서는 最大값을 갖고 水深에 따라 線形的으로 變한다고 가정하면

$$w = \frac{\partial H}{\partial t} \frac{z-b}{H-b} \quad (3)$$

로 표시된다. 여기서  $H$ 는 水面고이다. 이것을 式 (2)에 代入하고 高次項들을 무시한 후 水深에 관하여 積分하면 壓力  $p$ 의 式을 얻는다.

$$\frac{p}{\rho} = g(H-z) + \frac{1}{H-b} \left[ \frac{H^2-z^2}{2} + b(z-H) \right] \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \quad (4)$$

右邊 첫째항은 靜水壓을 뜻하며, 둘째항은 連직방향의 加速度에 의한 壓力의 變化를 나타낸다. 이러한 壓力補正式을 式 (1)에 代入하고 水深에 對하여 積分하면

$$\frac{d}{dt} (h\bar{u}) = -gh \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 H}{\partial t^2 \partial x} + \text{H.O.T.} \quad (5)$$

여기서

$$\bar{u} = \frac{1}{H-b} \int_b^H u dz$$

高次項(h.o.t)을 없애고 Long(1964)의 定理를 사용하여 정리하면

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial t \partial x^2} = 0 \quad (6)$$

이 式은 壓力이 靜水壓分布를 갖는다고 가정한 式에 마지막 항이 添加된 形態로서, 이 項은 鉛直加速度의 影響을 나타내고 흔히 Boussinesq項이라 부른다.

한편, Peregrine(1967)은 2개의 scaling parameter를 導入, 漸近方法(asymtotic method)에 의하여 좀더 理論的으로 式을 誘導하였다. 即, 水面變位( $\eta$ ), 壓力( $p$ ), 水平方向의 流速( $u$ )을 水深( $h_0$ )과 波浪振幅( $a$ )의 比( $\epsilon = h_0/a$ )로서 다음과 같이 전개하고

$$f = f_0 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \dots \quad (7)$$

또 鉛直方向의 流速( $w$ )은 波長( $L$ )과 水深의 比( $\sigma = h_0/L$ )로서

$$w = \sigma (w_0 + \epsilon w_1 + \epsilon^2 w_2 + \dots) \quad (8)$$

表示하여 漸近方法에 의하여 解析한 結果, 1차항에서는 線型長波式(linear long wave equation)을 얻고  $\epsilon$ 과  $\sigma^2$ 의 arder를 갖는 項까지 고려함으로써 連續方程式과 運動方程式은 각각

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(d+\eta)\bar{u}] = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{2} d \frac{\partial^3 (\bar{u})}{\partial x^2 \partial t} + \frac{1}{6} d^2 \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^2 \partial t} = 0 \quad (10)$$

로 나타내었다. 이 때 式 (10)은 水深이 一定할때의 式 (6)과 一致한다. 이와 유사한 式은 Abbott *et al.* (1978), McCowan(1978)에서도 보이고 있다.

### 3. 亂流理論에서의 平均值 개념의 적용

Boussinesq型의 式은 거의 水平的 흐름을 가정한 Airy式에 波에 의한 작은 流動效果, 即 流線의 굴곡에 의한 影響을 添加한 것이다. 한편 亂流理論에서 흔히

使用되는 平均流의 개념은 작은 流動成分을 除去하는 과정이므로 두 경우 서로의 目的을 다르지만 작은 流動成分의 擧動을 어떻게 表現할 것인가는 서로 일맥 상통한다. Yeo(1987)에 의하면 亂流흐름에 있어 크고 작은 流動을 포함하고 있는 速度成分  $u$ 와 큰 流動成分  $\bar{u}$ 와의 關係는

$$u = \bar{u} - \alpha \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\alpha^2}{2!} \frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial x^4} - \frac{\alpha^3}{3!} \frac{\partial^6 \bar{u}}{\partial x^6} + \dots \quad (11)$$

로서 表示하였으며 여기서  $\alpha$ 는 길이의 제곱으로 표시 되는 常數이다. 위 식은 混在되어있는 流動場에서 작은 규모의 흐름성분(small scale components)을 等方가우스型的의 필터함수를 利用하여 移動平均法에 의하여 추출한 것으로 高次項들은 작은 流動成分效果를 나타낸다.

波形에 의한 작은 流動成分을 무시하여 靜水壓分布로 가정한 식

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (12)$$

에 식(11)을 適用하고 처음 두 항만을 考慮하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \alpha \left( \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \right. \\ \left. + u \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^3} \right) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

式(12)와(13)으로부터 괄호속에 있는 3個項은 작은 流動에 의한 영향을 나타낸다. 새로이 나타난 이들 項을 究明하기 위하여 無次元量을 아래와 같이 하고 無次元化시켜 既存의 式(6)과 比較하는 것이 便利하다.

$$\begin{aligned} x^* = \frac{x}{L}, t^* = \frac{C_0 t}{L}, u^* = \frac{C_0^2}{ga}, \eta^* = \frac{\eta}{a}, \\ h^* = \frac{h}{h_0} \end{aligned} \quad (14)$$

여기서  $C_0 = \sqrt{gh_0}$ 이다. 이들에 의하여 式(6)은 式(15)와 같은 無次元式을 얻으며 여기서 無次元量을 표시하는 \*는 생략되었다.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \epsilon \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{3} \sigma^2 h^2 \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial t \partial x^2} = 0 \quad (15)$$

이로부터 式(6)의 Boussinesq式은  $\epsilon$ 과  $\sigma^2$ 이 같은 or-

der를 가질 때 成立한다는 것을 알 수 있으며 式(10)의 誘導課程에서도 이미 언급된 바 있다. 이것은 Uresell parameter( $U_r = \epsilon/\sigma^2$ )가 order 1을 가질 때를 말함이며 amplitude dispersion과 frequency dispersion이 서로 平衡을 이루게 됨을 뜻한다(Peregrine, 1967). 이와 같이  $\epsilon$ 와  $\sigma^2$ 의 項만을 고려할 때 漸近方法에서 유도된 式 뿐 아니라, 變分技法에 의한 Mass *et al.*(1978)의 式, 또 Hauguel(1980) 등에 의한 에너지 積分方法에 의한 式 등을 서로 일치함을 보여준다. 그러므로  $\epsilon = \sigma^2$ 을 滿足시킬 때 위의 Boussinesq式은 汎用性을 가지며  $\epsilon$ 와  $\sigma^2$ 보다 高次項에서는 誘導方法에 따라 서로 다른 형태의 식이 주어진다(Jensen, 1983).

한편 式(13)을 式(14)의 무차원량에 의하여 變形시키면

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \epsilon \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} - \left( \frac{\alpha}{L^2} \right) \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial t \partial x^2} - \epsilon \left( \frac{\alpha}{L^2} \right) \\ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \bar{u} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^3} \right) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

을 얻는다. 여기서  $\alpha$  이외의 모든 변수는 無次元化되었다.  $\alpha$ 는 가우스형 필터함수의 幅을 決定하는 常數로서 길이의 제곱의 次元을 갖는 임의의 常數이므로 만약  $\alpha$ 를  $3h^2$ 로서 취하면

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \epsilon \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{3} \sigma^2 h^2 \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial t \partial x^2} - \frac{1}{3} \epsilon \sigma^2 h^2 \\ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \bar{u} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^3} \right) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

가 된다. 이 式에서 앞서와 같이  $\epsilon$ 과  $\sigma^2$ 의 項만을 고려할 때 式(15)와 一致됨을 알 수 있다.

#### 4. 支配方程式의 差分化

水深이 一定하지 않은 地形에서의 運動方程式과 連續方程式은 다음과 같이 表示된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{d}{3} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x \partial t^2} \\ + \frac{d}{3} \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \bar{u} \frac{\partial b}{\partial x} = 0 \quad (19)$$

여기서  $\frac{\partial b}{\partial x}$ 는 底面의 地形變化를 나타내고 本 計算은 McCowan(1978)에 의하여 提案된 다음과 같은 差分式을 使用하였다. E가  $\bar{u}$  또는  $\eta$ 를 나타낼 때 時間과 距離에 對한 微分項은 各各

$$E = \frac{1}{2} (E'_{i+1} + E'_i) \quad (20)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{4\Delta t} [(E'_{i+1} - E'_{i+1}) + (E'_{i+1} - E'_{i-1})] + O(\Delta t^2) \quad (21)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x} [\theta (E'_{i+1} - E'_{i+1}) + (1 - 2\theta) (E'_{i+1} - E'_i) + \theta (E'_{i+1} - E'_{i-1})] + O(\Delta x^2) \quad (22)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x \partial t^2} = \frac{1}{\Delta x \Delta t^2} [(E'_{i+1} - 2E'_{i+1} + E'_{i+1}) - (E'_{i+1} - 2E'_i + E'_{i-1})] + O(\Delta x, \Delta t^2) \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x \partial t} = \frac{1}{2\Delta x \Delta t} [(E'_{i+1} - E'_{i+1}) - (E'_{i+1} - E'_{i-1})] + O(\Delta x, \Delta t^2) \quad (24)$$

$$\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x} [b_{i+1} - b_i] \quad (25)$$

로 나타내었다. 첨자 i 및 j는 거리와 時間의 格子點 位置를 나타낸다. 實際로 위의 差分式으로 數值解析에 의하여 解를 구할 경우 式 (21) 및 (22)는  $O(\Delta x^2)$ 과  $O(\Delta t^2)$ 을 가지므로 Boussinesq項을 나타내는 式 (23)이나 (24)의 計算結果는 信賴性을 상실한다. 따라서 이들 高次項을 잘 表現하려면 充分히 精密한 式이 使用되어야 하며 이는 위의 差分式에 Taylor 급수에 의한 truncation error 解析方法에 의하여 解決될 수 있다. Jensen(1983)의 結果에 의하면 各 項의 誤差는

$$\left\langle \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right\rangle = -\frac{1}{6} g \frac{\partial^3 \eta}{\partial x \partial t^2} \Delta t^2 - \frac{1}{8d} \left\{ \frac{\partial^3 \eta}{\partial x \partial t^2} - 2 \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} \right\} \Delta x^2 \quad (26)$$

$$\left\langle \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right\rangle = \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x \partial t^2} \theta \Delta t^2 + \frac{1}{24d} \left\{ \frac{1}{g} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x \partial t^2} - \frac{3}{d} \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial t} + \frac{6}{d} \left( \frac{\partial b}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right\} \Delta x^2 \quad (27)$$

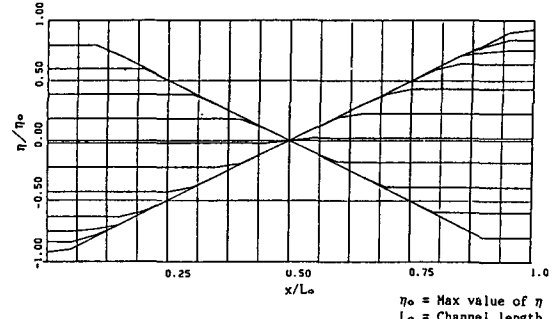


Fig. 2. Free oscillation at the beginning (Linear without Boussinesq term).

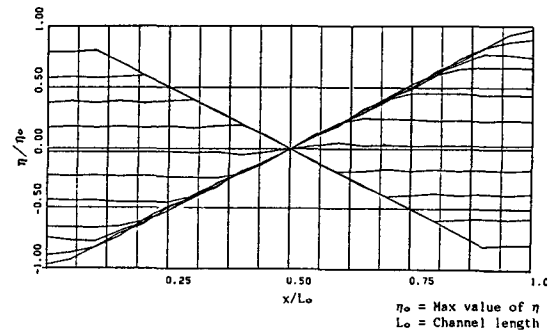


Fig. 3. Free Oscillation after 5 cycles (Linear without Boussinesq term).

$$\left\langle \frac{\partial \eta}{\partial x} \right\rangle = \frac{\partial^3 \eta}{\partial x \partial t^2} \theta \Delta t^2 + \frac{1}{24dg} \left\{ \frac{\partial^3 \eta}{\partial x \partial t^2} - 2 \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} \right\} \Delta x^2 \quad (28)$$

로 表示되고, 이들을 支配方程式 (18) 및 (19)에 적용시킴으로서  $O(\Delta x^4, \Delta t^4)$ 의 精密 높은 差分式을 얻는다. 이들 式을 使用하여 double sweep technique에 의하여 計算을 施行하였다. 좀더 具體인 計算方法은 Jensen(1983)을 參照하였다.

## 5. 計算結果의 分析 및 檢討

앞 節에서 언급한 truncation error 方法에 의한 差分式 및 使用된 數值解析法의 精密性을 立証하기 위하여 水深이 一定한 box속에 初期 水面傾斜를 주어 水面이 自由振動하는 것을 計算하였다. Fig. 2와 3은 運動方程式 (18)에서 非線形項과 Boussinesq項을 除外시키고 計算한 結果이며 Fig. 2는 初期의 舉動을, Fig. 3은 5周期附近을 나타낸 반면, Fig. 4와 5는 非線形項을

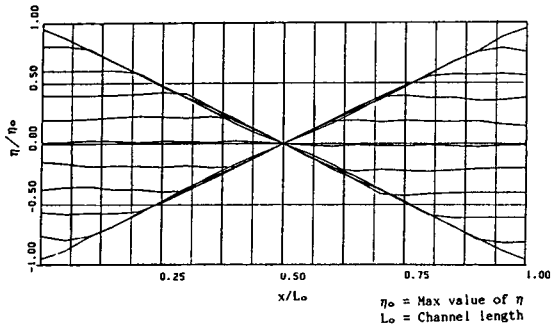


Fig. 4. Free Oscillation at the beginning (Linear with Boussinesq term).

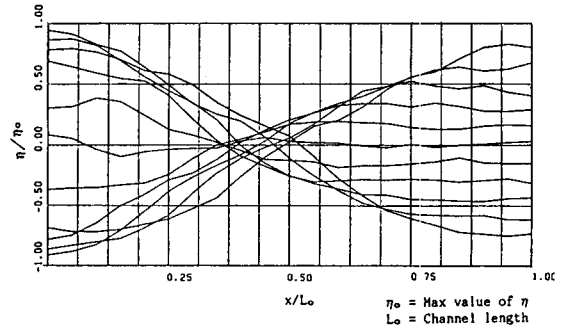


Fig. 7. Free Oscillation after 5 cycles (Nonlinear with Boussinesq term).

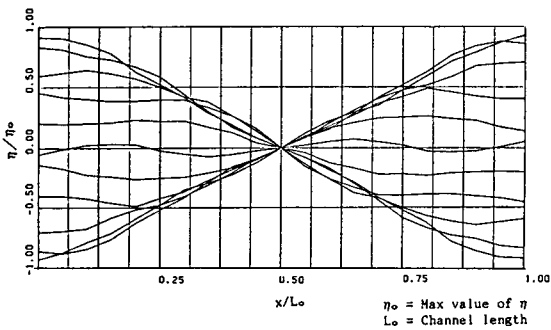


Fig. 5. Free Oscillation after 5 cycles (Linear with Boussinesq term).

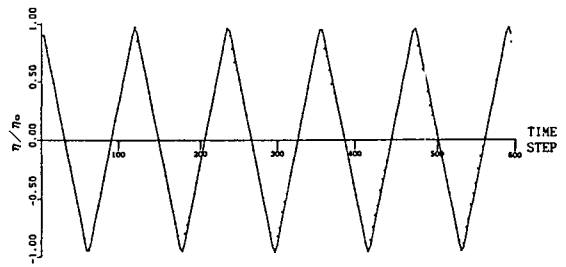


Fig. 8. Time variations of surface elevation at the boundary (linear without Boussinesq term).

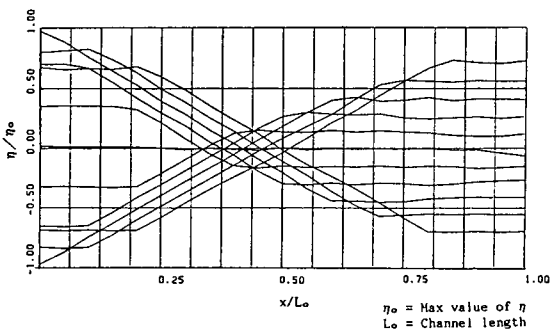


Fig. 6. Free Oscillation after 5 cycles (Nonlinear without Boussinesq term).

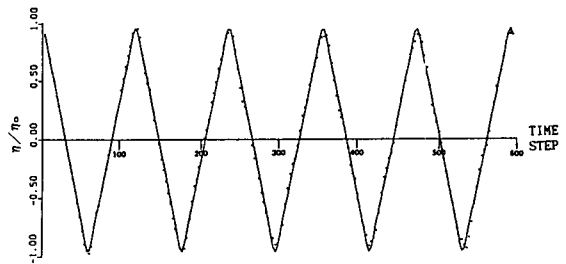


Fig. 9. Time variations of surface elevation at the boundary (Linear with Boussinesq term).

除外하였으나 Boussinesq項은 包含시킨 計算結果이다. Fig. 2에서는 水面이 直線的으로 變化하나 Fig. 4에서는 水面에 작은 굴곡이 생기는 것을 볼 수 있으며 Fig. 5에서는 그 程度가 심하게 나타난다. 이것은 Boussinesq項의 影響을 보여주는 좋은 例이며 鉛直方向의 加速度에 의하여 작은 규모의 굴곡이 添加되고 時間이 지날수록 이들의 効果는 增大된다. 한편, Fig. 3에서 水面은 直線과 差異는 있으나 심하지 않고 Fig. 2~5

에서 水面이 變하더라도 모두 中心點을 正確하게 통과하는 것을 볼 수 있다. 이것은 線形方程式의 理論解와 完全一致하는 것으로서 本 計算에 使用된 方法은 充分히 믿을 수 있다고 판단된다. Fig. 6~7은 위의 경우에 非線形項을 包含시켜 計算한 結果를 나타낸 것이며 非線形性에 의하여 水面은 對稱을 이루지 않고 時間에 따라 中心點이 移動하며 水面은 급하여짐을 알 수 있다. 여기서도 Boussinesq項을 배제시킨 Fig. 6은 거의 水面이 直線의 形態를 유지하지만 Fig. 7에서는 그 굴곡을 확실히 볼 수 있다.

Fig. 8~11은 境界面에서의 水位變化를 위의 4가지

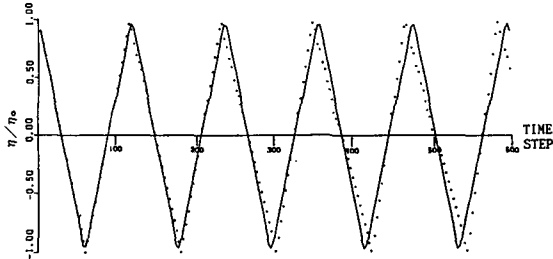


Fig. 10. Time variations of surface elevation at the boundary (Nonlinear without Boussinesq term).

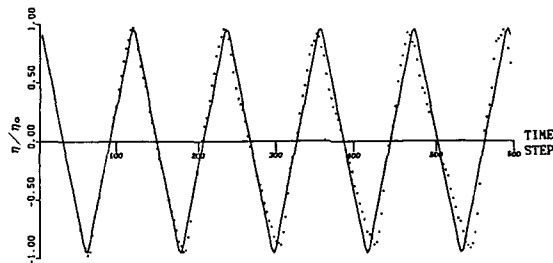


Fig. 11. Time variations of surface elevation at the boundary (Nonlinear with Boussinesq term).

경우에 대하여 시간에 따라 나타낸 것이다. 實線으로 表示된 것은 非線形項과 Boussinesq項이 없을 때의 理論解이며 非線形項의 效果에 의한 水面變動이 급하여 지는 것이 Fig. 10에 잘 나타나 있으며 Fig. 9와 11에는 波谷이나 項點부근에서 Boussinesq項에 의한 波高의 變化를 볼 수 있다.

위와 같은 計算結果로 미루어 本 研究에서 使用된 解析方法으로써 Boussinesq項을 表現하는데 별 어려움이 없을 것으로 思料되며 實際地形變化에 의한 計算은 다음으로 미룬다.

## 6. 結 論

水面傾斜가 크거나 水深의 급격한 變化가 發生할 때 壓力에 미치는 영향은 Boussinesq項에 의하여 나

타내지며, 亂流理論에서 使用되는 平均流의 개념으로부터 誘導된 式은  $\epsilon$ 과  $\sigma^2$ 의 크기를 갖는 項만을 考慮할 때 기존의 式들과 一致한다. 또한 實際 數值解析에 의하여 解를 구할 경우 Boussinesq項이 高次項이기 때문에 惹起되는 問題點은 truncation error 分析에 의하여 극복될 수 있음을 보여준다. 앞으로 이러한 解析方法에 의하여 淺海에서 좀더 精確한 波高의 變化豫測이 期待된다.

## 參考文獻

- Abbott, M.B., Petersen, H.M., and Skovgaard, O., 1978, On the numerical modeling of short waves in shallow water. *J. of Hydraulic Research*, Vol. 16, No. 3, pp. 173-204.
- Geen, A.E., Laws, N., and Naghdi, D.M., 1974, On the theory of water waves, *Proc. Royal Soc.*, Vol. 338, pp. 43-55.
- Hauguel, A., 1980. Adaptation of tidal numerical models to shallow water wave problems. *Proc. 16<sup>th</sup> Coastal Eng. Conf.*, ASCE, Sydney, Australia.
- Jensen, R.E., 1983. A consistent analysis of Boussinesq-type water wave equations in continuous and discrete form, Ph.D. Thesis, Texas A & M Univ., College Station, TX.
- Long, R.L., 1964. The initial value problem for long waves of finite amplitude, *J. of Fluid Mech.*, Vol. 20, pp. 161-170.
- Mass, W.J. and Vastano, A.C., 1978. An investigation of dispersive and non-dispersive long wave equations applied to oceans of variable depth, Texas A&M Univ., College Station, TX.
- McCowan, A.D., 1978. Numerical simulation of shallow water waves, *Proc. 4<sup>th</sup> Australian Conf. on Coastal and Ocean Eng.*, Adelaide, Australia, pp. 132-136.
- Peregrine, D.H., 1977. Long waves on a beach, *J. of Fluid Mechanics*, Vol. 27, pp. 815-827.
- Whitham, G.B., 1974. Linear and Non-linear waves, Wiley-Interscience Pub.
- Yeo, W.K., 1987. A generalized high pass/low pass averaging procedure for deriving and solving turbulent flow equations, Ph.D. Thesis, Ohio State Univ., Columbus, OH.