

## 波의 屈折 및 廻折에 미치는 非線形 效果에 대한 數值解析 Numerical Analysis of Nonlinear Effect of Wave on Refraction and Diffraction

李正圭\* · 李鍾仁\*

Jong Kyu Lee\* and Jong In Lee\*

**要 旨** : 수심변화가 완만하고 흐름이 없는 곳을 파가 전파할 때 겪게되는 淺水, 屈折 및 廻折현상의 해석에는 2次 Stokes波 이론에 의한 선형, 비선형, 포물형 방정식이 이용되며, 여기서는 바닥마찰과 바람의 영향은 고려하지 않는다. 이 포물형 방정식으로 暗礁이 있는 경우에 대해 수치해석을 수행하여 기존의 실험치와 비교 검토하였고, 회절과 굴절효과의 중요성을 고찰했다. 천해파의 특성변화 해석에는 Boussinesq 方程式에 기초한 포물형 방정식이 이용된다. 흐름이 없는 경우에 방파제를 따라 전파하는 Cnoidal 파의 회절현상을 수심이 변하고 입사각이 변하는 경우에 대해 수치해석을 하여 Stem Wave의 특성에 대해 논의하였다.

**Abstract** □ Based on second-order Stokes wave and parabolic approximation, a refraction-diffraction model for linear and nonlinear waves is developed. With the assumption that the water depth is slowly varying, the model equation describes the forward scattered wavefield. The parabolic approximation equations account for the combined effects of refraction and diffraction, while the influences of bottom friction, current and wind have been neglected. The model is tested against laboratory experiments for the case of submerged circular shoal, when both refraction and diffraction are equally significant. Based on Boussinesq equations, the parabolic approximation eq. is applied to the propagation of shallow water waves. In the case without currents, the forward diffraction of Cnoidal waves by a straight breakwater is studied numerically. The formation of stem waves along the breakwater and the relation between the stem waves and the incident wave characteristics are discussed. Numerical experiments are carried out using different bottom slopes and different angles of incidence.

### 1. 緒 論

波高豫測에 있어서 오랫동안 波向線理論(wave ray theory)이 널리 사용되어 왔으나 이 理論은 波向線이 서로 교차하는 波交點(caustics) 부근에서 파고가 발산하는 단점이 있다. 이러한 문제점을 해결하기 위해 Ray Channel에서 에너지 전파를 허용하는 廻折效果를 도입하여 波交點 부근에서 파고의 발산을 방지한다.

Berkhoff(1972)는 廻折, 屈折 및 反射현상을 고려한 緩傾斜 方程式(mild-slope eq.)을 제안하였다. 완경사 방정식은 3次元 문제를 간략화하기 위해 해저경사가 완만하다는 조건하에서 연직방향으로 적분한, 기본 Helmholtz 식과 수심변화항으로 구성

된, 2次元 橢圓形 方程式(elliptic type eq.)이다. 하지만 이 식은 橢圓形 方程式이므로 解를 구하기 위해서는 계산 대상영역 전체에 대해 境界條件이 필요하고 해석이 쉽지 않기 때문에, 최근에는 완경사 방정식을 단순화한 拋物形 近似式(parabolic approximation eq.)이 提案되었다(Radder, 1979). 拋物形 方程式은 側方向의 파고의 변화가 波 진행방향의 파고의 변화보다 훨씬 빠르다는 假定에서 제안된 식이다. 포물형 방정식은 Yue & Mei (1980), Liu & Tsay(1984), Kirby & Dalrymple(1983), Kirby(1986) 등이 다양한 波浪場의 해석에 이용하였고, 완경사 지형에서의 파랑장과의 흐름해석에서는 가장 실용적인 방법 중의 하나이며 비교적 정확한 모형이다. 그러나 수심이 얕아지면 2次

\*한양대학교 토목공학과 (Department of Civil Eng., Hanyang University, Seoul 133-791, Korea)

Stokes 波 (second-order Stokes wave) 이론에 기초한 포물형 방정식은 정확성이 떨어지게 된다.

Stokes 波 이론은 沿岸流, 離岸流 등이 존재하는 淺海域 (shallow-water region) 에는 적용할 수 없다. 따라서 천해역에서의 파랑장은 非線形效果 (nonlinear effect) 와 分散效果 (dispersion effect) 를 포함한 Boussinesq 方程式으로 해석할 수 있다 (Liu, *et al.*, 1985).

本 研究에서는 다음 두 가지 경우에 대해 數值實驗을 통하여 廻折과 屈折의 특성을 규명하고자 한다.

첫째, 2次 Stokes 波 理論을 이용한 拋物形 方程式으로 비교적 지형이 단순한 暗礁 (shoal) 로 인한 屈折 및 廻折효과를 해석하여 기존 실험결과와 비교 검토한다.

둘째, 해양구조물의 대부분은 淺海域에 건설되고 있으므로 천해역에서 구조물에 의한 波의 변화를 해석할 필요가 있다. 그래서 Boussinesq 方程式에 기초한 포물형 방정식을 이용하여 방파제와 入射波가 이루는 角에 따른 파의 廻折현상으로 인해 발생하는 Stem Wave 의 특성을 解析한다.

## 2. 基本 方程式

本 研究에서 사용될 拋物形 方程式은 다음과 같은 假定아래 誘導된다.

(1) 海底傾斜가 비교적 완만하여 水深變化에 의한 反射波의 영향을 무시한다.

(2) 側方向的의 波高의 변화가 波 進行방향의 波高의 변화보다 훨씬 빠르다.

### 2.1 2次 Stokes 波 理論에 의한 拋物形 方程式

#### 2.1.1 線形 拋物形 方程式

Berkhoff (1972) 가 제안한 緩傾斜 方程式은 다음과 같다.

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \phi) + \omega^2 \frac{C_g}{C} \phi = 0 \quad (1)$$

여기서  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$  이고  $\phi(x, y)$  는 수면 변동의 振幅 또는 파고의 평면분포를 나타내는 함수로서 속도포텐셜 (velocity potential) 에서 연속성분과 시간인자를 분리한 것이고,  $C$  는 波速 (phase

speed),  $C_g$  는 群速度 (group wave celerity),  $\omega$  는 角速度 (angular velocity) 이며,  $x, y$  는 수평면 좌표를 나타낸다.

식 (1) 을 전개하면 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\nabla^2 \phi + \frac{\nabla(C C_g)}{C C_g} \nabla \phi + k^2 \phi = 0 \quad (2)$$

여기서,  $k^2 = \omega^2 / C^2$

$$\nabla^2 = (\partial^2 / \partial x^2, \partial^2 / \partial y^2)$$

식 (2) 에서 첫째, 세제항은 회절현상을 나타내는 항이고, 둘째항은 수심변화에 따른 굴절현상을 나타낸다.

식 (2) 를 다시쓰면

$$\nabla^2 \eta + k^2 \eta + \frac{\nabla(C C_g \cdot \nabla \eta)}{C C_g} = 0 \quad (3)$$

이고, 여기서  $\eta(x, y)$  는  $t=0$  에서의 자유수면 (free surface) 이고 다음과 같이 나타낸다.

$$\eta(x, y) = A(x, y) \exp(i \int \bar{k} dx) \quad (4)$$

여기서,  $\bar{k}$  는 기준수심의 波數이다.

Lozano & Liu (1980) 는 전술된 기본 가정하에 다음과 같은 포물형 방정식을 유도했다.

$$2i\bar{k} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{C C_g} \frac{\partial}{\partial y} \left[ C C_g \frac{\partial A}{\partial y} \right] + \left[ i \frac{1}{C C_g} \left( \frac{\partial (\bar{k} C C_g)}{\partial x} \right) + (k^2 - \bar{k}^2) \right] A = 0 \quad (5)$$

#### 2.1.2 非線形 拋物線 方程式

波向線이 서로 교차하는 波交點 (caustics) 부근에서는 非線形 效果가 상당히 크게 나타나므로 이 효과를 고려한 포물형 방정식이 제안되었다 (Kirby, 1983; Kirby & Dalrymple, 1983; Liu & Tsay, 1984).

주로 波 進行방향으로 전파하는 2次 Stokes 波의 포물형 방정식은

$$2i\bar{k} \frac{\partial A}{\partial x} + \nabla^2 A + \left[ k^2 - \bar{k}^2 + i \frac{\partial \bar{k}}{\partial x} \right] A - \frac{K' |A|^2 A}{(C C_g)^2} = 0 \quad (6)$$

이며, 이 式은 Liu & Tsay(1984)가 제안한 式이다.

식 (6)을  $\partial^2/\partial y^2 \gg \partial^2/\partial x^2$ 의 假定을 이용하여 다시 쓰면 다음과 같다.

$$2ik \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \left[ k^2 - \bar{k}^2 + i \frac{\partial \bar{k}}{\partial x} \right] A - \frac{K'|A|^2 A}{(CC_g)^2} = 0 \quad (7)$$

여기서,

$$K' = k^4 C^2 \frac{\cosh(4kh) + 8 - 2 \tanh^2(kh)}{8 \sinh^4(kh)}$$

식 (7)의 마지막 항은 비선형항이다. 만약 수심이 일정하다면 식 (7)의 세째항은 소거된다.

### 2.2 Boussinesq 方程式을 이용한 拋物形 方程式

Boussinesq 方程式에 기초한 非線形 緩傾斜 方程式(nonlinear mild-slope eq.)은 흐름이 없는 경우에 다음 식으로 나타낼 수 있다(Liu, et al., 1985).

$$\frac{\partial^2 \zeta_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta_n}{\partial y^2} + K_n^2 \zeta_n + \frac{1}{h} \left[ \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \zeta_n}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \zeta_n}{\partial y} \right] = \frac{\epsilon}{2h^2} \sum_{s+n} n(n+s) \zeta_n \zeta_{n-s} + O(\mu^4) \quad (8)$$

여기서,

$$\epsilon = \frac{a_0}{h_0} \ll 1 \quad ; \text{非線形性 (nonlinearity)}$$

$$\mu^2 = \frac{\omega^2 h_0}{g} \ll 1 \quad ; \text{分散性 (dispersion)}$$

$$i = \sqrt{-1}$$

여기서  $\zeta_c$ 는 흐름에 의한 자유수면 변위이다. 식 (8)에서

$$K_n^2 = \frac{n^2}{h} \left[ 1 + \frac{\mu n^2 h}{3} \right] \quad (9)$$

식 (8)에서 처음 세째항은 파의 전파와 회절현상을 나타내고, 네째, 다섯째항은 수심변화에 따른 천수현상과 굴절현상을 나타낸다. 無次元 파수  $K_n$ 은 식 (9)의 우변 둘째항으로 표시되는 분산효과를 포함하고 있다.

식 (8)에서 자유수면

$$\zeta_n = \psi_n(x, y) \exp\left(i n \int \frac{1}{\sqrt{d}} dx\right) \quad (10)$$

이고,  $d(x)$ 는  $x$  방향으로 서서히 변하는 기준수심이며,  $\psi_n(x, y)$ 은 진폭이다.

식 (10)을 식 (8)에 대입하고, 수심이 완만히 변하면  $x$  방향으로 입사한 파의 진행방향은  $x$  방향으로부터 크게 벗어나지 않으므로 진폭  $\psi_n$ 의  $x$  방향 변화는 회절효과에 의한  $y$  방향 변화보다 완만하므로 다음 식을 얻는다.

$$2in \frac{h}{\sqrt{d}} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} + h \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial y^2} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \psi_n}{\partial y} + \left[ in \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{h}{\sqrt{d}} \right] + n^2 \left( 1 - \frac{h}{d} + \frac{\mu^2 n^2 h}{3} \right) \right] \psi_n = \frac{\epsilon}{2h_{s+n}} \sum n(n+s) \psi_n \psi_{n-s} + O(\mu^4) \quad (11)$$

이 式은 흐름이 없는 곳에서 수심변화에 의한 파의 특성변화를 나타내는 식이다(Yoon, 1987).

## 3. 數値解析

각 방정식의 解는 李(1989)의 수치해석 방법을 따라 구하였다.

### 3.1 暗礁에 의한 屈折 및 廻折解析

暗礁에 의한 굴절 및 회절현상의 해석에는 식 (5)와 식 (7)을 사용하였다. 이 式으로 暗礁가 하나인 경우를 해석한 후 기존문헌과 비교하여 결과가 타당할 때 두 개의 暗礁가 나란히 있는 경우에 대해 파고의 변화를 관찰한다(Fig.1).

#### 3.1.1 初期條件

초기조건으로 Ito & Tanimoto(1972)의 실험자료를 사용하였다.

$$h_1 = 0.15 \text{ m}, \quad h_2 = 0.05 \text{ m}, \quad H = 0.014 \text{ m}, \\ T = 0.51095 \text{ sec}, \quad \lambda = 0.4 \text{ m}, \quad \Delta x = 0.1 \text{ m}, \quad \Delta y = 0.05 \text{ m}$$

여기서  $\lambda$ 는 파장(wave length)이다.

#### 3.1.2 境界條件

식 (5)와 식 (7)에 사용된  $y$ 축의 경계조건은 No-flux 조건으로 다음과 같다.

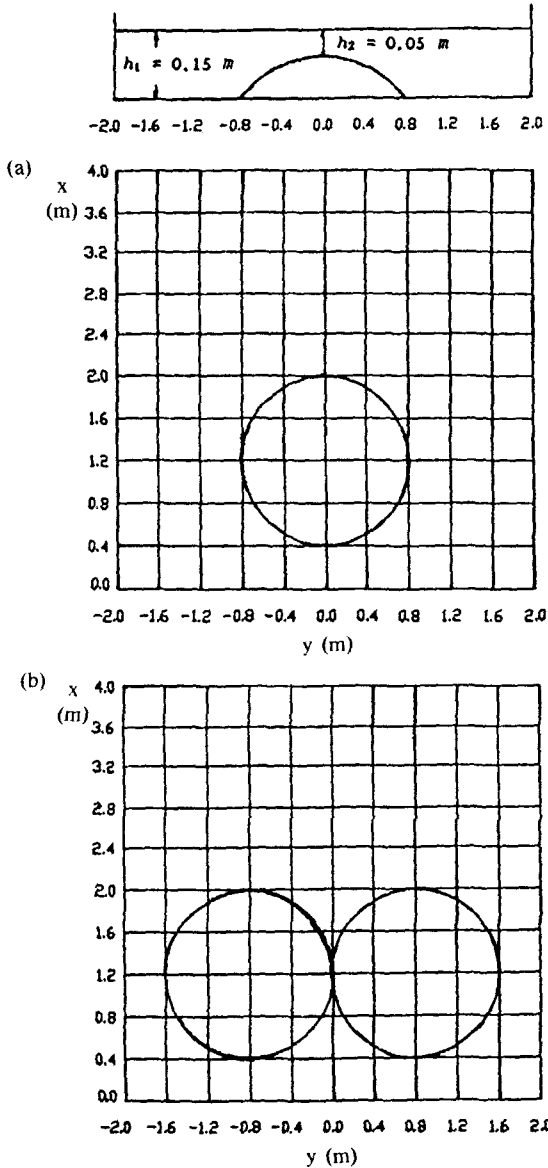


Fig. 1. Topography for experiment of Ito *et al.* (1972); (a) one-circular shoal, (b) two-circular shoal.

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y \rightarrow \mp \infty \quad (12)$$

3.2 Stem Wave 解析

Perroud 는 수적벽에 대한 고립파(solitary wave)의 반사에 대해 실험을 하였다(Yoon, 1987). 그는 이 실험에서 입사파의 각도가 45°보다 작을 때 세 개의 파, 즉 입사파, 반사파와 방파제를

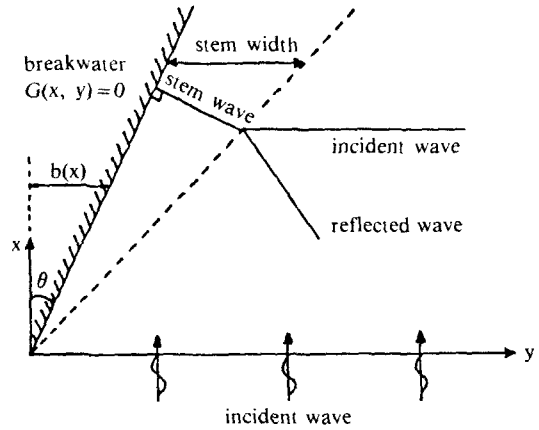


Fig. 2. Definition sketch of stem wave.

따라 진행하는 Stem Wave 가 존재함을 발견했다. Yue & Mei(1980)는 2次 Stokes波의 포물형 근사 방정식을 이용하여 일정 수심에서의 Stem Wave 를 해석하였고, 비선형성의 중요성을 입증하였다. 본 解析에서는 식 (11)을 이용하여 입사각이 20°보다 작을 때에는 반사파의 영향이 없어지고 입사파와 Stem Wave 만이 존재한다(Yue & Mei, 1980)는 해석에 따라, 입사각이 10°, 15°, 20°일 때 수심이 일정한 경우와 경사가 있는 경우(S=1/40, S=1/25)에 대해 Boussinesq 方程式에 기초한 포물형 방정식으로 Stem Wave 를 해석하였다.

Stem Wave 해석은 Fig.2의 영역에 대해 x 방향으로 15π 까지, y 방향으로 12π 까지 계산하고, 차분식에서 격자간격 Δx, Δy 는 둘다 π/15 를 채택한다.

3.2.1 初期條件

초기조건으로는 入射波는 다음과 같은 일정한 Cnoidal Wave 를 사용한다.

$$\begin{aligned} \psi_1 &= 0.81701, & \psi_2 &= 0.40683, & \psi_3 &= 0.16197, \\ \psi_4 &= 0.05756, & \psi_5 &= 0.01971, & \psi_6 &= 0.00610, \\ \psi_7 &= 0.00168, & \alpha_0 &= 0.92896, & T &= 19.43 \text{ sec}, \\ H_0 &= 2.0 \text{ m}, & h &= 10 \text{ m} \end{aligned}$$

3.2.2 境界條件

경계조건은 No-flux 조건을 사용한다.

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y \rightarrow \infty \quad (13)$$

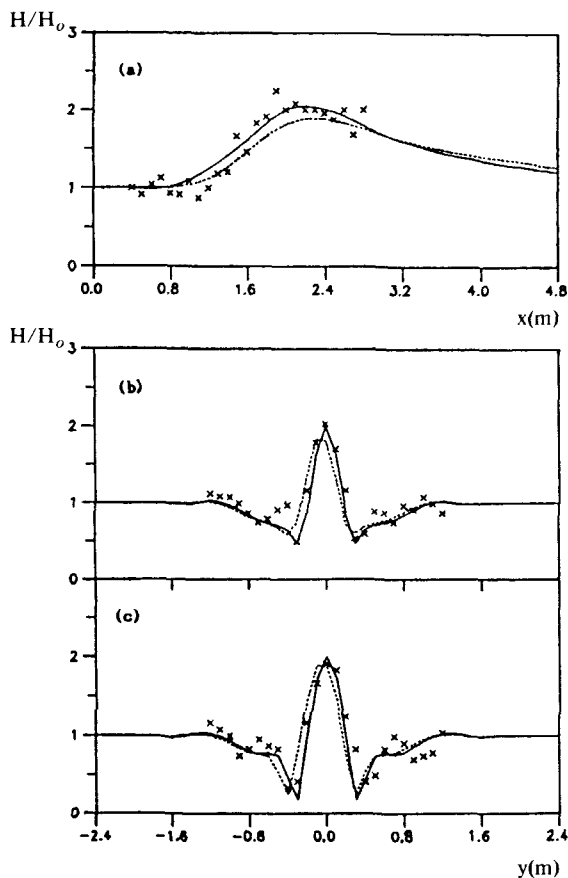


Fig. 3. Comparison of normalized wave height for one-circular shoal case; —, linear; ·····, nonlinear; x, exp. data; (a)  $y=0$  (m), (b)  $x=2$  (m), (c)  $x=2.4$  (m).

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial y} = \ln(\tan \theta) \psi_n \text{ at } y \text{ along breakwater} \quad (14)$$

$$G(x, y) = y - b(x) = 0 \text{ at } b(x) = x \tan \theta \quad (15)$$

#### 4. 數値解析 結果 및 考察

##### 4.1 暗礁에 의한 屈折 및 廻折解析

Fig.3은 Ito & Tanimoto(1972)의 실험치와 本解析에 사용된 線形, 非線形, 拋物形 方程式에 의한 結果를 비교 도시한 것으로 하나의 暗礁가 있을 때 해석한 結果가 실험치와 비교적 잘 일치함을 볼 수 있다. 波向線이 교차하는 波交點(caustics) 부근에서 비선형 방정식에 의한 계산파고가 선형 방정식에 의한 파고보다 약간 작고 그 외의 지역에서는 거의

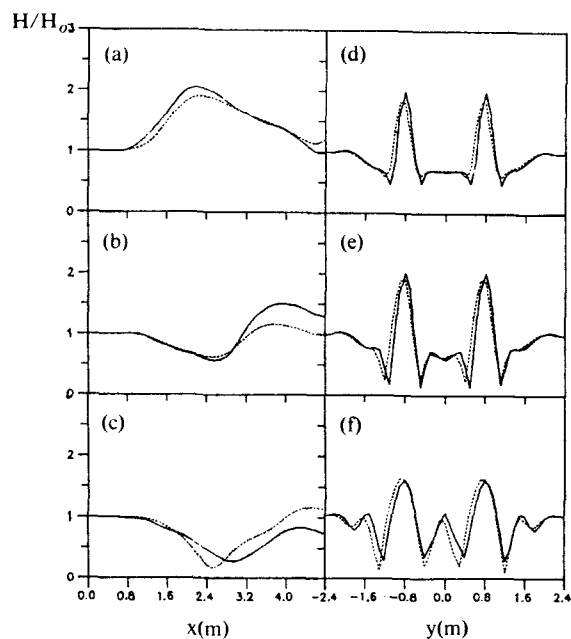


Fig. 4. Comparison of normalized wave height for two-circular shoal case; —, linear; ·····, nonlinear; (a)  $y = -0.8$  (m), (b)  $y=0$  (m), (c)  $y=0.4$  (m), (d)  $x=2$  (m), (e)  $x=6$  (m), (f)  $x=3.2$  (m).

비슷한 값을 가진다. 실험치와의 비교에서 선형 방정식이 더 잘 일치함을 볼 수 있는데 이는 수치해석에 사용된 입사파가 비선형성이 작기 때문이며, 입사파의 비선형성이 증가하면 비선형 방정식으로 해석한 결과와 일치할 것이다.

두 개의 暗礁가 나란히 있을 때 Fig.4(a)를 보면 暗礁의 후면에서 波交點으로 인하여 파고가 커지며, 해석영역의 경계부근에서 다시 파고가 상승함을 알 수 있는데 이는 波向線이 서로 교차하는 부분임을 뜻한다. Fig.4(b), (c)에서도 같은 현상을 볼 수 있다. Fig.4(d), (e), (f)는 y방향에 대한 파고의 변화를 도시한 것이다.

##### 4.2 Stem Wave 解析

Fig.2와 같은 영역에서 고립파가 진행할 때 발생하는 Stem Wave의 폭은 파가 진행해 갈수록 커지며 Stem Wave의 높이도 증가하지만 入射波高의 두배보다는 작다(Melville, 1980)는 實驗解析이 있다. 入射角에 따른 파고의 변화를 방파제를 따라 나타난 Fig.5에서 입사각이 감소함에 따라 Stem

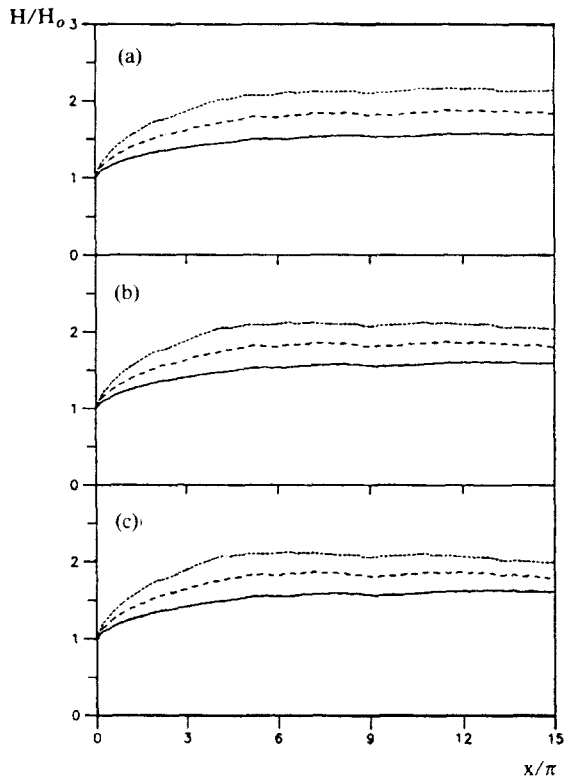


Fig. 5. Effect of incidence angle on normalized wave height along breakwater for given slope; —,  $\theta=10^\circ$ ; ----,  $\theta=15^\circ$ ; ·····,  $\theta=20^\circ$ ; (a)  $S=0$ , (b)  $S=1/40$ , (c)  $S=1/25$ .

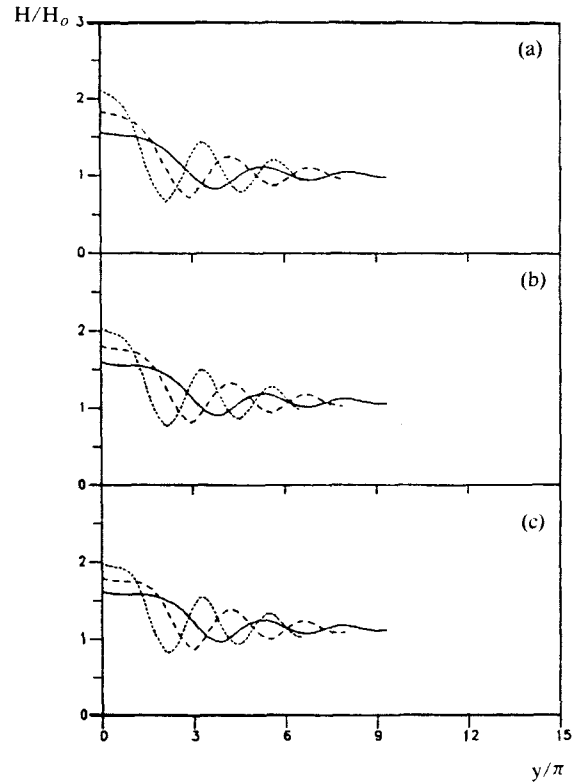


Fig. 6. Effects of incidence angle on normalized wave height along  $x=15$  for given slope; —,  $\theta=10^\circ$ ; ----,  $\theta=15^\circ$ ; ·····,  $\theta=20^\circ$ ; (a)  $S=0$ , (b)  $S=1/40$ , (c)  $S=1/25$ .

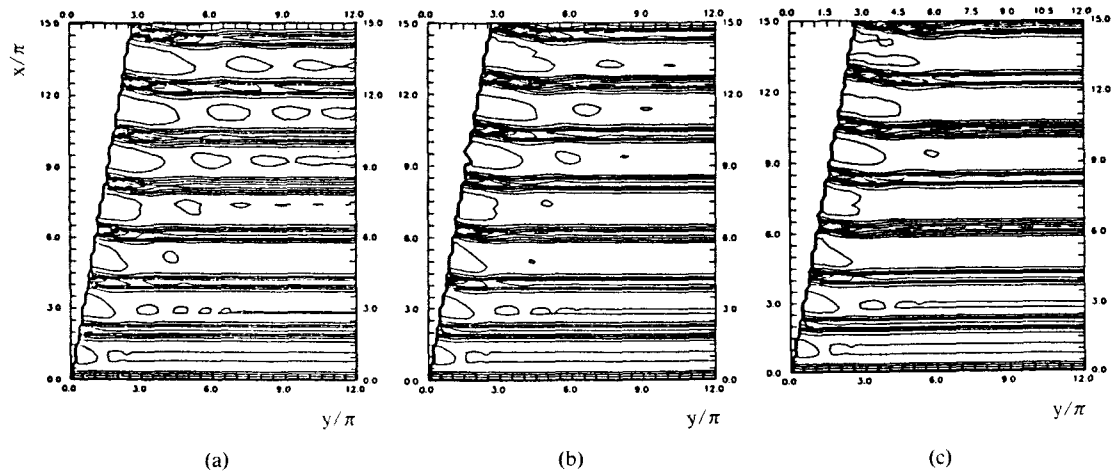


Fig. 7. Contour plots of instantaneous free surface elevations  $\zeta$  for  $\theta=1^\circ$  with contour increments of 0.5; (a)  $S=0$ ,  $S=1/40$ , (c)  $S=1/25$ .

Wave의 높이가 감소하고 더 일찍 일정한 값에 도달하며, 입사각이 클 때 파고가 두배보다 커지는 것은 수치해석시 바닥의 마찰을 무시하였기 때문이다. Fig.6은  $x=15\pi$ 에서 파고의 변화를 나타낸 것으로 방파제와 가까운 곳에서 파고가 일정하고 입사각이 작을수록 Stem Wave의 폭이 증가함을 보여주고, 海底傾斜가 완만할 때에는 수심이 일정할 때와 큰 차이가 없다. 방파제를 따라서 자유수면을 도시하면 입사각이 클수록 파고가 증가하는 현상이 나타난다. Fig.7은 入射角이 일정할 때 ( $\theta=10^\circ$ ) 수심변화에 따른 자유수면의 등고선으로 경사가 클수록 淺水效果가 커지면서 Stem Wave의 특성이 깨어진다.

### 5. 結 論

본 논문은 선형포물선 방정식과 2차 Stokes 파 이론에 의한 비선형 포물형 방정식을 이용하여 암초에 의한 파의 변형에 미치는 비선형효과를 해석하였고, Boussinesq 方程式에 기초한 포물형 방정식을 이용하여 파의 회절현상으로 인해 발생하는 Stem Wave를 해석하였다.

수치실험 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 비교적 단순한 지형에서 암초로 인한 波의 변형해석은 비교적 실험치와 잘 일치하였고, 波向線이 서로 交叉하는 波交點 부근에서는 非線形效果로 인해 波高가 약간 감소한다.

2. 방파제와 入射波가 이루는 角이  $20^\circ$  이하일 때 Stem Wave의 폭은 방파제를 따라감에 따라 점진적으로 증가하고, 入射角이 작을수록 증가한다. 非線形效果의 영향으로 Stem Wave가 방파제에 평행하게 진행하고, Stem Wave의 폭은 x축(波 전 파방향)을 따라 거의 線形的으로 변한다. 海底傾斜가 증가하면 淺水效果가 커지면서 Stem Wave의 특성이 깨어진다.

### 참고문헌

- Berkhoff, J.C.W., 1972. Computations of combined refraction-diffraction. Proc. 25th Conf. Coastal Eng. ASCE, Chap. 26.
- Dean, R.G. & Dalrymple, R.A., 1984. Water wave mechanics for engineers and scientists, Prentice-Hall, Inc.
- Ito, Y. & Tanimoto, K., 1972. A method of numerical analysis of wave propagation-application of wave refraction and diffraction, Proc. 13th Conf. Coastal Eng., ASCE, Chap. 26.
- Kinnmark, I, The shallow water wave equations: formulation, analysis and application, Lecture Notes.
- Kirby, J.T., 1986. Rational approximation in the parabolic eq. method for water waves, *Coastal Eng.*, **10**: 355-378.
- Kirby, J.T. & Dalrymple, R.A., 1983. A parabolic eq. for the combined refraction-diffraction of Stokes Waves by mildly varying topography, *J. of Fluid Mechanics*, **136**: 453-466.
- Liu, P.L-F., 1983. Wave-current interactions on a slowly varying topography, *J. Geophys. Res.*, **88**(C1): 4421-4426.
- Liu, P.L-F. & Tsay, T-K., 1984. Refraction-diffraction model for weakly nonlinear water waves, *J. of Fluid Mechanics*, **141**: 265-274.
- Liu, P.L-F., et al., 1985. Nonlinear refraction-diffraction of waves in shallow water, *J. of Fluid Mechanics*, **153**: 185-201.
- Lozano, C. & Liu, P.L-F., 1980. Refraction-diffraction model for linear surface water waves, *J. of Fluid Mechanics*, **101**(4): 705-720.
- Mei, C.C., 1983. The applied dynamics of ocean surface waves, John Wiley & Sons.
- Melville, W.K., 1980. On the Mach reflexion of a solitary wave, *J. of Fluid Mechanics*, **98**(2): 285-297.
- Radder, A.C., 1979. On the parabolic eq. Method for water-wave propagation, *J. of Fluid Mechanics*, **95**(1): 159-176.
- Yoo, D.H. & O'Connor, B.A., 1988. Diffraction of waves in caustics, *ASCE*, **114**(6): 715-731.
- Yoon, S.B., 1987. Propagation of shallow-water waves over slowly varying depth and currents, Ph.D. Thesis, Cornell University.
- Yue, D.K.P., & Mei, C.C., 1980. Forward diffraction of Stokes Waves by a thin wedge, *J. of Fluid Mechanics*, **99**(1): 33-52.
- 李鍾仁, 1989. 緩傾斜에서 非線形波의 屈折 및 廻折에 관한 數值解析, 碩士學位論文, 漢陽大學校.