特輯 技術解說

Robust Stability에 대한 매개변수적 접근방식의 연구동향 : Kharitonov 정리와 그 확장

金 永 喆
忠南大學校 電子工學科

I. 서 론

일반적인 제어계는 제어대상인 플랜트의 정확한 수학적 표현을 가정하고 있으며, 더욱이 이러한 모델이 선형시불변계를 주로 다루고 있다. 그런데 플랜트 모델에는 선형화, 저차화, 시변성등에 기인한 불확실성(uncertainty)이 존재하게 되며, 이것이 안정도나 제어성능에 미치는 영향은 제어기 설계시 매우 중요한 문제로 대두되었다.

강인성(robustness)이란 이와같은 모델 불확실성, 외란 및 잡음, 매개변수의 변화등에 대해 제어기가 전체 안정도나 요구되는 제어성능을 어느정도까지 만족시킬 수 있는 지를 나타낸다. 모델 불확실성에 따른 강인성 문제는 1980년대 이래 제어분야에서 가장 주목을 받아온 주제이며, 불확실성에 대한 접근방식에 따라 다음의두가지로 분류된다.

첫째는 unmodeled uncertainty(또는 high-order norm bounded uncertainty)로서 대개 덧셈형 $G_o(s)+\Delta(s)$ 또는 곱셈형 $G_o(s)[1+\Delta(s)]$로 표현한다. 여기서 $G_o(s)$는 공칭전달함수이고 $\Delta(s)$는 불확실성으로서 H_∞-norm bound로 가정한다.[1-4] 이 방식은 주로 주파수 영역에서 Bode-Nyquist 해석기법에 의존하며, 이득여유에 대한 정보를 근거로 하나 위상여유와 $\Delta(s)$에 대한 bounds를 구하기가 쉽지 않다.

둘째 방식은 구조적 불확실성(structured uncertainty) 또는 low-order parameter variation model 로서 공칭전달함수에 대해 유한크기의 매개변수 섭동(perturbation)으로 표현된다 (상태변수 모델에서는 계수행열의섭동으로 나타낸다). Uncertain parameters가 이득이나 위상이 아니라 물리적인 양-예로써 시정수, 마찰계수, 부하, 상호결합이득, 반사율, 지연시간 등일때는 첫번째 방식보다 유리할 수 있다. 플랜트의 이러한 매개변수의 불확실성을 가질때는 폐루프계의 특성 다항식에도 계수가 섭동을 갖는 형태로 나타나게 된다. 섭동을 갖는 다항식군(polynomial families)의 안정도 문제에 대한 연구는 1800년대말 이래 계속되었으나 뚜렷한 결과를 보이지 못했다.[5,6] 그런데 1978년 소련 수학자 Kharitonov[7]에 의해 이러한 다항식군의 안정도에 대한 획기적인 이론이 발표되었으나 빛을 보지 못하다가 1984년 Barmish[8]에 의해 robust control 문제로의 응용이 제시되면서 서방세계에 알려져 이 분야의 연구에 일대 전기를 맞게 되었다. 그 근거로 1986년부터 1990년 5월 현재에 이르기까지 Kharitonov 정리와 연관된 연구결과가 세계 주요 학술지에만 60여편이 발표되었다. 본고에서는 이러한 구조적 불확실성을 갖는 선형계의 매개변수적 강인성 해석에 관한 연구동향에 대해 소개하고자 한다. 다루게 될 범위는, 특성다항식의 계수의 섭동이 연속계에서 서로 독립인 경우와 1차 종속인 경우를 고려하고, 이산치계로의 확장에 대해 정리한다. 또한 상태공간 모델의 계수행열에 대한 섭동에 대해서도 Kharitonov 정리의 적용문제를 살펴보기로 한다. 그리고 이 분야의 향후 연구과제에 대해서도 간단히 검토하고자 한다.

II. 문제의 설정 및 정의

1. 문제의 설정

플랜트의 수학적 동특성 모델에서 계수행열이나 매개변수가 실제값과 다르거나 어떤 한정된 범위에서 변하는 경우는 흔히 접하는 문제이다. 기술을 간단히 하기 위해 그림 1의 단일 입출력 피드백 제어계를 고려한다.

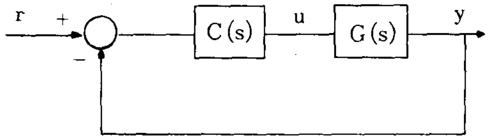

그림 1. 피드백 시스템

그림 1의 폐루프 특성다항식은 G(s)의 매개변수가 섭동을 가질때 다음식으로 표현된다.

$$P(s, a) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \qquad (1)$$

$$a_i \in [a_i^-, a_i^+], \quad 0 < a_i^- < a_i^+, \quad i = 0, 1, \cdots, n \qquad (1a)$$

여기서 a_i는 uncertain coefficients이고 a_i^-, a_i^+는 섭동을 고려한 a_i값의 하한치와 상한치를 표시한다.

먼저, 계수의 변화가 1차독립(linearly independent)이라 가정하자. 그러면 (1)이 Hurwitz 다항식인 지를 판별하기 위한 가능한 방법으로서 각 계수를 이산화시켜 각각의 조합되는 모든 다항식을 조사하는 것을 생각할 수 있다. 예로써, n=3이고 각 계수를 10개씩 분할시킨다 해도 무려 10^4개 다항식의 Hurwitz test를 필요로 한다. 결국 n>3인 경우에는 이러한 방식은 포기하지 않을 수 없다. 그런데, Kharitonov는 위의 interval polynomial family(Ⅱ의 2절 참조)에 대해 단지 4개 다항식의 Hurwitz test만을 필요로 하는 획기적인 이론을 제시한 것이다. (Ⅲ장 참조)

또하나의 문제는 식(1)의 각 계수가 uncertain parameters의 1차종속(linearly dependent)관계일 때 Kharitonov정리는 적용 가능한가 이다. 적용할 수 없다면 가능한 방법은 무엇인가?

다음에는 상태공간에서 표현된 선형계를 고려하자.

$$\dot{x}(t) = A x(t), \quad x(t_0) = x_0 \qquad (2)$$

여기서 A는 실계수를 갖는(n×n)상수 행열이며, 그 요소의 값은 유한크기의 불확실성을 갖는다고 한다. 즉,

$$A_{ij}^{min} \le A_{ij} \le A_{ij}^{max} \quad i, j = 1, 2, \cdots, n \qquad (3)$$

이러한 행열 A를 interval matrix라 한다.

문제는 식(2), (3)으로 표현된 시스템은 안정한가 이다. 또 matrix family {A}가 uncertain parameters에 1차 종속관계인 matrix polytope 일때의 안정도 판별조건은 구할 수 있는가 이다.

이제, 식(1), (2)의 섭동을 P(s)나 A의 공칭치를 기준으로 하여 다음식으로 나타내보자.

$$P(s) = P_0(s) + \varepsilon r(s) \qquad (4)$$

$$A = A_0 + \varepsilon N \qquad (5)$$

P_0, A_0는 공칭치로서 안정이라 가정하고, r(s)와 N은 섭동방향을 나타낸다.

식(4), (5)에서 안정도가 보장되는 섭동한계 ε을 구하는 문제는 강인성의 척도로써 제어기 설계에 매우 유용하게 적용될 수 있다. 이 문제는 앞의 경우와 근본적으로 같으며, ε을 증가시키면서 불안정해지기 직전의 ε값을 구할 수 있겠으나 계산량을 고려해야 될 것이다. 결국 계산량을 감소시키는 소위 "one-shot" 방법의 연구가 필요하다.

2. 정의

1절에서의 문제를 해결하기 위해 제안된 각 이론의 기술을 위해 기본적인 용어의 정의와 예비결과를 정리한다.

[정의 1] Interval polynomial

식(1)로 표현되는 다항식에서 각 계수 a_i의 변화가 1차 독립일 때 (1)을 interval polynomial이라 한다.

[정의 2] Convex hull

E^n − n차원 euclidean space,

S − E^n내의 임의의 set라 할 때, convex hull은 S의 모든 convex 결합의 set이다.

즉,

$$\{S_H\} = \{x \mid x = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i x_i,\ x_i \in S\ \ \forall_i,\ \sum_{i=1}^{K} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \ge 0\ \ \forall_i\} \qquad (6)$$

$\{S_H\}$를 S의 convex hull이라 한다.

[정의 3] Polytope

E^n내의 한정된 수의 점들 $x_1, x_2, \cdots x_{K+1}$의 convex hull을 polytope이라 한다.

[정의 4] 단점(Vertex or Extreme point)

Convex set S의 점 x가 다른 어느 두점들의 convex 결합으로 표시될 수 없을때 x를 S의 단점이라 한다.

[정의 4] Polynomial polytopes

m개의 vertex를 나타내는 다항식의 convex hull을 polynomial polytopes이라 한다.

즉,

$$\mathbf{P}=\{P(s,\lambda)\mid P(s,\lambda)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i P_i(s),$$
$$\lambda_i\in[0,1],\ \sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1\} \qquad (7)$$

여기서, $P_i(s)$는 polytope $\mathbf{P}$의 vertex이다.

[정의 5] Hurwitz polynomial

다항식 P(s)가 다음 조건을 만족하면 Hurwitz라고 한다.

1) S가 실수일 때 P(s)도 실수이다.

2) P(s)의 모든 근의 실수부가 양의 부호를 갖지 않는다.

[정의 6] Hurwitz testing matrix

식 (1) 형태의 실계수를 갖는 다항식의 Hurwitz 검증행열 $H^n(P)$는 다음과 같다.

$$H^n(P)=\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2K-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{2K-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_{2K-3} \\ 0 & a_0 & a_2 & \cdots & a_{2K-4} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \end{bmatrix} \qquad (8)$$

$H^n(P)$의 모든 principal minors가 양의 수이면 다항식 P(s)는 Hurwitz이다.

[정의 7] Kharitonov polynomials

식 (1)의 interval polynomial에서 2^{n+1} 개의 vertex를 나타내는 다항식군 $\mathbf{P}$의 실수부와 허수부는 다음 4개의 다항식의 그것 내에 bound된다.[7] 이 4개의 vertex를 Kharitonov 다항식이라 한다.

$$\begin{aligned} K_1(s)&=a_0^-+a_1^-s+a_2^+s^2+a_3^+S^3+\cdots \\ K_2(s)&=a_0^++a_1^+s+a_2^-s^2+a_3^-s^3+\cdots \\ K_3(s)&=a_0^++a_1^-s+a_2^-s^2+a_3^+s^3+\cdots \\ K_4(s)&=a_0^-+a_1^+s+a_2^+s^2+a_3^-s^3+\cdots \end{aligned} \qquad (9)$$

[정의 8] D-안정

$P(\cdot,a)$의 모든 근이 복소평면에서 미리 설정해준 영역 D내에 존재하면 $P(\cdot,a)$는 D-안정이라고 한다. 영역 D는 복소평면에서 LHP, disc, 단위 원 등으로 주어질 수 있다.

Ⅲ. Kharitonov 정리와 Robust Stability

1. 다항식 군의 Robust Stability

매개변수 공간에서 hyperrectangle을 형성하는 interval polynomial 문제에 대해 Guiver[9]는 강인성의 최대 한계치를 구하였으나 다항식의 차수가 n≤4인 경우였다. 그런데 Kharitonov[7]는 다음의 완전해를 보였다.

[Kharitonov 정리]

$\mathbf{P}^n$을 n차 interval polynomial family(IPE)의 set, $\mathbf{H}^n$을 n차 Hurwitz polynomial family의 set라 할 때,

$$\mathbf{P}^n\subset\mathbf{H}^n \text{ iff } K_i(s)\subset\mathbf{H}^n \quad i=1,2,3,4 \qquad (10)$$

이 정리는 식(1)로 부터 구해지는 4개의 Kharitonov 다항식 $K_1(s), K_2(s), K_3(s), K_4(s)$가 안정이기만 하면 섭동을 포함하는 전체 다항식 군의 안정도가 보장됨을 의미한다.

식 (1)의 계수가 복소수로 주어진 interval polynomial인 경우에도 유사하게 확장되어 단지 8개의 다항식을 검증하면 된다.[10,11] 1986년 이래 Kharitonov 정리에 대한 높은 관심은 여러 형태의 증명의 발표로도 입증해 주고 있다.[11-14]

그런데 Kharitonov 정리의 한계는 다항식의 계수 변화가 독립적이어야 하고, 검증되는 안정영역이 복소평면의 좌반평면(left half plane:LHP)으로 한정된다는 것이다. 이러한 제약때문에 이산치계,[15] 지연시간계,[16,17] 특히 다항식 계수의 변화가 1차 종속인 경우에는 적용될 수 없다.

모델 불확실성을 갖는 피드백 제어계에서는 특성방정식의 계수가 uncertain parameters의 1차 종속관계로 나타나게 된다. 간단한 예를 들어보기로 한다.

[예제 1] 그림 1의 피드백 제어계에서

$$G(s)=\frac{s}{s^3+\alpha s^2-s+1},\quad \alpha\in[3.4\ ,5]$$

$$C(s)=\frac{3}{s+1} \qquad (11)$$

여기서 제어기 C(s)는 α의 공칭치 $\alpha_0=4$를 기준으로 설계되었으며 α_0에 대해서는 폐루프 안정이다. 이제 C(s)가 α의 모든 섭동에 대해 전체 제어계의 안정도를 보장하는지 Kharitonov 정리를 적용해 보기로 한다. 폐루프 특성 다항식 군은

$$\begin{aligned} P(s,a)&=a_4s^4+a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0 \\ &=s^4+(\alpha+1)s^3+(\alpha-1)s^2+3s+1 \end{aligned} \qquad (12)$$

(12)의 $a_3(\alpha)$와 $a_2(\alpha)$는 α에 1차 종속임을 알 수 있다.

$$a_3\in[4.4,\ 6],\quad a_2\in[2.4, 4]$$

식 (12)의 P(s, a)로부터 발생시킨 Kharitonov 다항식

은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
&K_1(s)=1+3s+4s^2+6s^3+s^4 \\
&K_2(s)=1+3s+2.4s^2+4.4s^3+s^4 \qquad (13) \\
&K_3(s)=1+3s+2.4s^2+6s^3+s^4 \\
&K_4(s)=1+3s+4s^2+4.4s^3+s^4
\end{aligned}
$$

식 (13)을 매개변수 공간에 나타내면 그림 2와 같다.

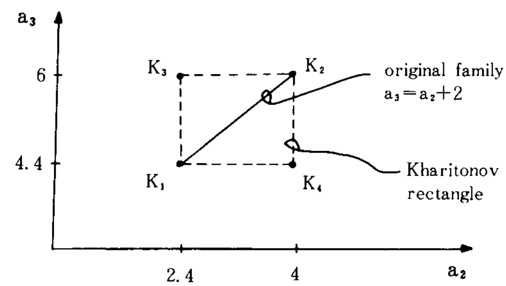

그림 2. Kharitonov's rectangular family

식 (13)의 $K_1(s)\sim K_4(s)$중 $K_3(s)$는 Hurwitz가 아니다. 그러므로 Kharitonov 정리에 따르면 불안정으로 판별된다. 그런데 α의 섭동에 대해 a_2, a_3는 $\overline{K_1K_2}$선분으로 나타나고 Hurwitz determinant check를 하면,

$$H_1=1+\alpha,\ \ H_2=\alpha^2-4,\ \ H_3=H_4=2\alpha^2-2\alpha-13 \qquad (14)$$

$\alpha\in[3.4, 5]$에 대해 $H_i>0\ \forall_i$이므로 식 (12)의 다항식은 실제로는 안정이다. 따라서 다항식의 계수변화가 1차 종속인 본 예제에서는 Kharitonov정리는 단지 충분조건만이 된다.

이제 다항식의 계수변화가 uncertain parameters의 1차 종속인 경우를 나타내기 위해 식 (1)을 다음식으로 표현한다.

$$P(s,q)\triangleq\sum_{i=0}^{n} a_i(q)s^i \qquad (15)$$

여기서, $q^T=[q_1, q_2, \cdots, q_k]$는 불확정 매개변수로서 Box Q내에서 변화한다.

$$Q=\{q\,|\,q_i^-\leq q_i\leq q_i^+,\ \ i=1,2,\cdots,k\} \qquad (16)$$

(15), (16)으로 표현되는 다항식 군을 다음 식으로 쓴다.

$$\mathbf{P}\triangleq\{p(s,q)\,|\,q\in Q\} \qquad (17)$$

식 (15)의 각 계수 a_i가 q에 대해 1차 종속이면 **P**는 매개변수 공간에서 2^K개의 verteces를 가지며, polynomial polytope으로 나타남은 〈정의2〉와 〈정의3〉으로 부터 자명하다.

1987년 Bartlett 등[18]은 polynomial polytope 문제에 대해 "Edge 정리"라 불리는 일반해를 발표하였다. 이 결과는 거의 Kharitonov 정리에 필적할만 하며 robust stability 해석 및 설계에 유력한 수단을 제공하게 되었다.

[Edge 정리] Parameter space에 주어진 polynomial polytope에 대해서,모든 exposed edges[27]의 root space가 D-영역에 존재하기만 하면 전체 polytope의 rrot space도 D-영역내에 존재한다. (여기서, D는 복소평면에서 설정해 주는 simply connected domain이다.)

Edge 정리는 다시말해서, N개의 polynomial verteces에 대해 다음 convex 결합들의 D-안정도가 전체 polytopic polynomial family **P**의 D-안정도를 보장한다는 것이다.

$$\{P_{ij}(s,\lambda)=\lambda P_i(s)+(1-\lambda)P_j(s),\ \lambda\in[0,1],\ \ i,j=1,2,\cdots,N\} \qquad (18)$$

Edge 정리의 특징은 기본적으로 근위치(root locations)에 근거하므로 D-영역의 설정에 따라 연속계 뿐만 아니라 이산치계[19,20]도 적용할 수 있으며 또한 안정도와 더불어 제어성능까지도 고려할 수 있다. 즉, 공칭모델을 기준으로 설계한 폐루프계의 특성근이 섭동에도 불구하고 원하는 영역 D내에 존재하도록 제어기를 설계하는 데도 활용할 수 있다.

Edge 정리의 단점은, 식 (15), (16)에서 불확정 매개변수 q_i의 수가 증가할 수록 조사해야 할 edge 다항식 $P_{ij}(s,\lambda)$수도 크게 증가하여 계산량이 문제가 되는 것이다. q_i의 수가 k개이면 조사해야 할 edge 수는 $e=k2^{k-1}$개로 주어진다. 예를들면, $k=8$이면 vertex는 2^8개가 발생되고 edge 수는 1024개가 된다. 이러한 이유로 polytope 문제에서는 보다 계산량을 줄이고 안정영역 설정을 일반화시키는 방법에 관한 연구가 발표되고 있다.[21,22]

Barmish는 zero exclusion principle에 근거하고, 있으며, Chapellat 등[22]은 소위 "Box정리"를 제안하여 계산량을 크게 감소시켰다. 김[23]은 선형변환기법을 이용하여 섭동에도 불구하고 원하는 제동특성을 만족시키는 보상기 설계방법을 제안하였다.

2. 섭동을 갖는 Matrix의 Robust Stability

다항식 polytopes에 대한 Kharitonov 형태의 안정도가 matrix polytopes에도 적용될 수 있는 지에 대해

관심이 모아졌으나 결국 적용될 수 없음이 밝혀졌다.[23]

예를들어 두개의 행열 $M_1, M_2 \in R^{n \times n}$, 그리고 M_1, M_2에 대응하는 특정다항식을 $P_1(s), P_2(s)$라 하자, Matrix polytope은 다음 식으로 표현된다.

$$M(\lambda) = \lambda M_1 + (1-\lambda) M_2 \tag{19}$$

$$\triangle\lambda(s) = \det[SI - M_\lambda] \tag{20}$$

그런데 M_λ의 요소로부터 $\triangle\lambda(s)$의 계수로의 사상(mapping)이 $\triangle\lambda(s)$가 $\lambda P_1(s) + (1-\lambda)P_2(s)$와 같아지도록 연결되지 않는다는 것이다.

Barmish등[23]에 의하면 Edge 정리도 성립되지 않으며, interval matrix의 polytope 문제로 제한한 경우에도 결과는 마찬가지였다. 다음 예제는 이를 잘 설명해준다.

[예제 2] 다음 interval matrix A를 고려하자.

$$A(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} -0.5-\alpha & -12.06 & -0.06 & 0 \\ -0.25 & -0.03 & 1 & 0.5 \\ 0.25 & -4.0 & -1.03 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & -1-\beta \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$\alpha \in [0, 1], \quad \beta \in [0, 3]$$

Verteces인 $A(0,0), A(0,3), A(1,0), A(1,3)$은 안정이지만 $A(0.5, 1.0)$은 불안정이다.

그렇지만 interval matrix의 안정도에 대한 충분조건은 제시되고 있다. Gerschgorin circle criterion을 이용한 방식[24]과 Lyapunov 함수에 의한 방법등이 있다.

한편 식 (5)에서 안정인 공칭치 A_0에 대해 강인성 보장의 한계치인 ε을 구하는 문제에 대한 현재까지의 연구결과도 역시 진부한(conservative) 상태에 있다고 보여진다. 전반적으로 말해 perturbed matrix의 robust stability에 관한 연구는 아직 이렇다할 결과가 없는 상태이다.

Ⅳ. 향후의 연구방향 및 검토

다항식 문제에서는 Ⅲ장 1절에서 정리한 바와 같이 계수의 변화가 1차 독립이거나 1차 종속인 경우에 대해서만 일반해가 주어졌다. 그런데 전달함수 모델에서는 흔히 multilinear인 경우가 나타난다.

Ackermann등[25]과 Djaferis[26]의 최근 연구가 있으나 매우 제한적이다. 계수변화가 bilinear인 경우를 설명해주는 예로서, 그림 1의 피드백 시스템에서 루프전달함수가 다음식으로 주어진다고 하자.

$$G(s)H(s) = \frac{k}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)} \tag{22}$$

식 (22)에서 이득 k와 시정수 τ_1, τ_2가 불확정 계수이면, 특정다항식은

$$\begin{aligned} P(s,a) &= s^2 + a_1 + a_0 \\ &= s^2 + (\tau_1 + \tau_2)s + (k + \tau_1 \tau_2) \end{aligned} \tag{23}$$

(23)에서 a_0는 매개변수 공간에서 bilinear 형태임을 보여준다. 이 문제의 연구는 제어기 설계에 매우 유용한 수단이 될 것이다.

한편, 상태변수 모델에서는 불확정성은 행열요소의 섭동으로 나타나고, 강인성 문제는 곧 matrix polytope의 robust stability 문제로 된다. 앞장에서 검토한 바와같이 이 부분의 현재까지 연구는 크게 못미치고 있다. 그리고 다항식과 행열 문제 모두에서 공칭모델을 기준으로 최대 섭동한계를 구하는 연구도 강인성 보장면에서 공개된 과제의 하나이다.

Ⅴ. 결 론

모델 불확실성을 계수공간에서 접근하여 특성다항식의 매개변수 섭동과 행열 요소의 섭동으로 보고 robust stability를 해석한 최근의 연구결과를 요약하였다. Interval polynomial family의 절대 안정도에 대한 완전해를 보인 Kharitonov 정리의 출현으로 1986년 이래 이 분야의 연구는 대단한 관심을 야기시켰으며, 이어서 Edge 정리의 발표에 의해 실용성 높은 polynomial polytopes 문제까지 해결된 결과를 보였다. Edge 정리는 연속계와 이산치계 모두에 적용할 수 있으며, 후속 연구결과로 계산량 감소 안정영역의 일반화에 크게 진전을 이루었다. 그러나 상태 공간 모델에서의 perturbed matrix의 강인성 문제는 Kharitonov 형태의 결과가 적용되지 못함이 밝혀졌고, matrix polytopes 문제에 대해서는 아직 이렇다할 결과를 보이지 못하고 있다. 향후 과제로 multilinear case와 matrix polytopes, 그리고 robustness measure로서 최대섭동 한계의 결정에 관한 연구등을 들 수 있다.

Robust stability에 대한 이러한 parametric approach는 강인한 제어기 설계시 장점이 많으며 지금까지의 연구결과도 유용하게 응용될 것으로 기대된다.

參 考 文 獻

[1] Doyle, J., "Multivariable feedback design: Concepts for a classical/Mordern synthesis,"

IEEE Trans. Auto. Contr., vol. 26, no. 1, pp. 4-6, 1981.

[2] Doyle, J., "Analysis of feedback systems with structured uncertainties," *IEE Proc.*, vol. 129, Pt. D, no. 6, pp. 242-250, 1982.

[3] Wei, K, et al. 1, "Robust stabilizability for linear systems with both parameter variation and unstructured uncertainty," *IEEE Trans. Auto. Contr.*, vol. 34, no. 2, pp. 149-156, 1989.

[4] Vidyasagar, M and H. Kimura, "Robust controllers for uncertain linear multivariable systems," *Automatica*, vol. 22, pp. 85-94, 1986.

[5] Siljak, D.D., "Parameter space methods for robust control design : A guided tour," *IEEE Trans. Auto. Contr.*, vol. 34, no. 7, pp. 674-687, 1989.

[6] Ackermann J., "Parameter space design of robust control systems," *IEEE Trans. Auto. Contr.*, vol. 23, no. 3, pp. 454-458, 1978.

[7] Kharitonov, V.L., "Asymptotic stability of an equillibrium position of a family of systems of linear differential equations," *Differentsial'nye Uravneniya,* vol. 14, no. 11, pp. 2086-2088, 1978.

[8] Barmish, B.R., "Invariance of the strict Hurwitz property for polynomials with perturbed coefficients," *IEEE Trans. Auto. Contr.*, vol. 29, no. 10 , pp. 935-936, 1984.

[9] Guiver, J.P. et al. 1, "Strictly Hurwitz property invariance of quartics under perturbations," *IEEE Trans. Auto. Contr.*, vol. 28, no. 1, pp. 106-107, 1983.

[10] Kharitonov, V.L., "On a generalization of a stability criterion," *IZV. Akad. Nauk, Kazakh. SSR. SERFiz. Mat.*, vol. 1, pp. 53-57, 1978.

[11] Bose, N.K., et al. 1, "A simple general proof of Kharitonov's generalized stability criterion," *IEEE Trans. Circuits and Systems,* vol. 34, no. 8, pp. 1233-1237, 1987.

[12] Yeung, K.S. et al. 1, "A simple proof of Kharitonov's theorem," *IEEE Trans. Auto. Contr.*, vol. 32, no. 9, pp. 822-823, 1987.

[13] Chapellat, H. et al. 1, "An alternative proof of Kharitonov's theorem," *IEEE Trans. Auto. Contr.*, vol. 34, no. 4, pp. 448-450, 1989.

[14] Minichelli, R.J. et al. 2, "An elementary proof of Kharitonov's stability theorem with extensions," *IEEE Trans. Auto, Contr.*, vol. 34, no. 9, pp. 995-998, 1989.

[15] Hollot, C.V. et al. 1, "Some discrete-time counter parts to Kharitonov's stability criterian for uncertain systems," *IEEE Trans. Auto. Contr.*, vol. 31, no. 4, pp. 355-356, 1986.

[16] Fu, M. et al. 2, "Robust stability for time delay systems: The edge theorem and graphical tests," *IEEE Trans. Auto. Contr.*, vol. 34, no. 8, pp. 813-819, 1989.

[17] Barmish, B.R., et al. 1, "A simple test for robust stability of delay systems," Proc. 27th IEEE Conf. Decision. Contr., Texas, pp. 92-97, 1988.

[18] Bartlett, A.C. et al. 2 , "Root locations of an entire polytope of polynomials: its suffices to check the edges." Proc. Amer. Contr. Conf., pp. 1611-1616, Minnapolis, 1987.

[19] Bartlett, A.C. et al. 1, "A necessary and sufficient conditions for schur invariance and generalized stability of polytopes of polynomials," *IEEE Trans. Auto. Contr.*, vol. 33, ~~no~~. 6, pp. 575-578, 1988.

[20] Ackermann, J.E. et al. 1, "Robust schur stability of a polytope of polynomials," *IEEE Trans. Auto. Contr.*, vol. 33, no. 10, pp. 984-986, 1988.

[21] Barmish, B.R., "A generalization of Kharitonov's four-polynomials concept for robust stability problems with linearly dependent coefficient perturbations," *IEEE Trans. Auto. Contr.*, vol. 34, no. 2, pp. 157-165, 1989.

[22] Chapellat, H. et al. 1, "A generalization of Kharitonov's theorem: Robust stability of interval plants," *IEEE Trans. Auto. Contr.*, vol. 34, no. 3, pp. 306-311, 1989.

[23] Barmish, B.R. et al. 2, "Stability of a polytope of matrices: Counter examples," *IEEE Trans. Auto. Contr.*, vol. 33, no. 2, pp. 481-484, 1987.

[24] Heinen, J.A., "Sufficient conditions for stability of interval matrices," *Int. J. Cont.*, vol. 39, no. 6, pp. 1323-1328, 1984.

[25] Ackermann, J. et al. 2,"Robustness analysis: A case study," *IEEE Trans. Auto. Contr.*, vol. 35, no. 3, pp. 352-356, 1990.
[26] Djaferis, T.E., "Shaping conditions for the roubst stability of polynomials with multilinear parameter uncertainty," Proc. 27th IEEE Conf. Decision Contr., Texas, pp. 526-531, 1988.
[27] Rockafellar, R.T., *Convex Analysis,* Princeton Univ. Press, 1972.

筆 者 紹 介

金 永 喆
1954年 12月 29日生
1981年 2月 고려대학교 전기공학과(공학사)
1983年 2月 서울대학교 대학원 전기공학과(공학석사)
1987年 8月 서울대학교 대학원 전기공학과(공학박사)
1988年 3月～현재 충북대학교 공과대학 전자공학과 조교수