

# 끝단면에 켈을 갖는 원통주의 전류분포 해석

正會員 李 康 浩\* 正會員 金 正 祺\*\*

## Analysis of Current Distribution on Cylinders with End Cap

Kang Ho LEE\*, Jung Ki KIM\*\* *Regular Members*

**要 約** 준정적 근사법을 적용하여 평탄한 단면(End cap)을 포함하는 회전체에 유기되는 전류에 대한 적분방정식을 유도하고 모멘트법을 이용해서 해석하였다. 수치해석식 기저함수로 Cubic B Spline함수, 가중함수로 델타함수를 사용한 Point Matching Method를 사용하였다.

또한 끝단에 둠근타원체(Spheroidal end cap)를 갖는 경우 및 평탄한 단면을 갖는 원통주의 구조변수 변화에 따른 영향관계를 해석하였다.

**ABSTRACT** An integral equation is derived for surface current distribution of cylinders with end cap using quasi static approximation method. The moment method is applied for numerical solution. Point matching method using Cubic B-spline function as a basis function, delta function as a weighting function is applied for moment method. And also, the influential relation in accordance with structural variation is analyzed in case of spheroidal end cap type and flat type.

### 1. 서 론

평탄한 단면을 갖는 원통형 안테나의 경우, 크게 두 종류의 형태로 해석된다. 첫째, 끝단면의 영향을 무시한 경우이다. 이 경우 제시되고 있는 적분식은 Pocklington<sup>(1,2,3)</sup>과 Hallen<sup>(4,5)</sup>적분식이 있다. 후자의 경우 널리 사용되고 있으나 전자의 적분식도 입력을 전계에 관한 수식으로

나타낼 수 있으므로 많이 사용되고 있다.<sup>(6,7)</sup> 이러한 적분식의 경우 반경이 파장에 비해 그리 고 안테나의 길이에 비해 작은 경우에 적용된다. 둘째로 끝단면의 영향을 고려한 경우로써 비교적 굵은 안테나 까지도 적용이 가능하다.

이 해석방법은 Taylor와 Wilton에 의해 제시된 준정적 근사법을 이용한 적분식<sup>(8)</sup>, Gentei Sato에 의해 끝단면의 전류밀도 심분을 포함하는 적분식 유도를 통한 해석<sup>(9)</sup>, Dragobic에 의해 시도된 끝단전하분포에 의해 발생하는 전계성분의 영향이 큰 인접 끝단영역을 정의하고 끝단

\* 大有工業專門大學 電子通信科  
Dept. of Elec. Comm. Dae Yeu Technical Junior College  
\*\* 中央大學校 電子工學科  
Dept. of Elec. Eng. Chungang Univ.  
論文番號: 90-89 (接受 1990. 8. 20)

가장자리의 링전하관계를 고려한 기저함수를 이용한 해석이 있다.<sup>10)</sup>

본 논문에서는 안테나 끝단면이 뾰족한 회전체인 경우는 Pocklington 형태, 끝단면이 평탄한 경우는 준정적근사법을 이용하여 일반적 회전체 형태를 갖는 서로 다른 원통수를 해석하였다. 수치해석시 적은 분할요소로도 정확한 해를 구하기 위하여 기저함수로 Cubic B spline 함수<sup>11)</sup>, 가중함수로 Dirac delta 함수로 사용하였다.

## II. 적분 방정식

그림1.에서와 같이 자유공간에 도체가 놓여 있을 경우 이 도체에 외부로 부터 입사전계  $E^i$  가 인가되면 도체 #1, #2에 전위전계  $E^{s1}, E^{s2}$ 를 발생하게 되는데 O.P.(관측점)에서 총전계  $E^t$ 는 다음과 같다.<sup>12)</sup>

$$E^t = E^{s1} + E^{s2} + E^i$$

$$= j \eta / k_0 \left[ \iint_{\Sigma_1} (k_0^2 J_1(R') + \nabla \nabla' \cdot J_1(R')) K_1(R, R') ds' + \iint_{\Sigma_2} (k_0^2 J_2(R') + \nabla \nabla' \cdot J_2(R')) K_2(R, R') ds' \right] + E^i \quad (1)$$

$$K_1(R, R') = \exp(-jk_0 |R - R'|) / (|R - R'|) \quad (2)$$

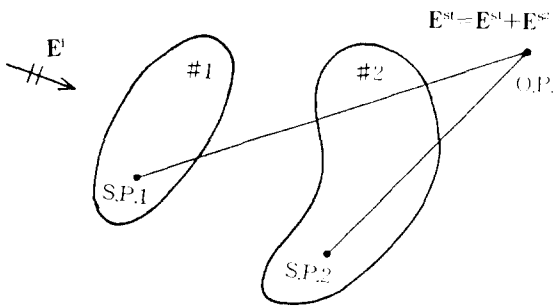


그림 1. 자유공간의 완전도체  
Fig.1. Perfect conductor of free space

여기서  $\eta$ 는 자유공간에서의 고유임피던스,  $k_0$ 는 파수,  $ds'$ 는 #1, #2의 미소표면적,  $R'$ 는 원점에서 S.P.(원점점)간의 거리,  $R$ 은 원점에서 O.P.간의 거리,  $|R - R'|$ 는 O.P.로부터 S.P.간의 거리이다.

윗식을 그림2.에서와 같이 특정 유형인 끝단면을 갖는 회전체 및 양끝이 뾰족한 회전체에 적용하면

$$J = J_t' + J_s \quad (3)$$

$$\nabla' \cdot J = 1/r'(z') \left[ \frac{\partial}{\partial \phi'} J_s' + \frac{\partial}{\partial z'} (r'(z') J_t') \right] \quad (4)$$

$$ds' = r'(z') / \cos(\theta(z')) d\phi' dz' \quad (5)$$

$$|R - R'| = [(z - z')^2 + r'(z')^2]^{1/2} \quad (6)$$

$$I_t(z') = \int_0^{2\pi} J_t(z', \phi') r'(z') ds' \quad (7)$$

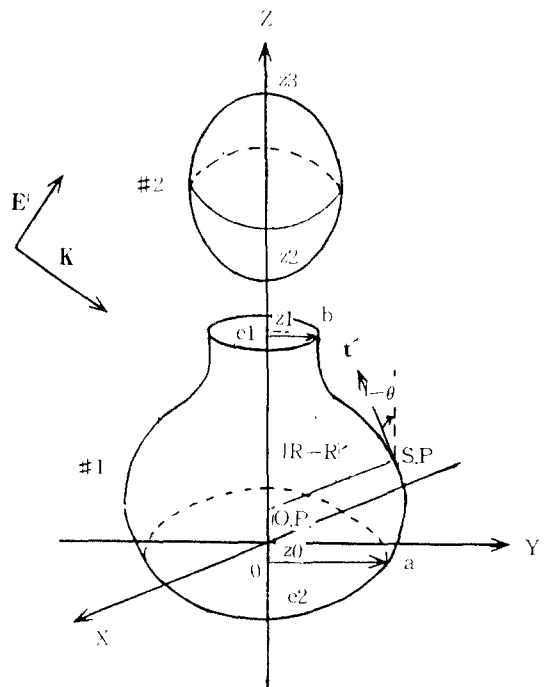


그림 2. 회전체의 좌표상의 위치  
Fig. 2. Coordinate location of B.O.R.

단, 상기식에서  $\theta(z')$ ,  $r'(z')$ 는  $\theta$ ,  $r'$ 가  $z'$ 의 함수임을 나타낸다.  $\mathbf{t}'$ 의 경우는 표면의 접선성분벡터로서  $\hat{\phi}$  벡터와 수직을 이루는 벡터이다. 이때 #1은 끝단면에 평탄한 단면  $e_1, e_2$ 를 갖는 경우로서 이곳에서 발생하는 산란전계를  $\mathbf{E}_{e_1}^{s1}$ ,  $\mathbf{E}_{e_2}^{s1}$ 라고 하면, 상기 (2)-(7)식을 (1)에 대입하고 O.P.를 좌표의 중심축에 두는 확장 경계조건을 적용하여 수학적 과정을 거치면 다음과 같다.

$$\mathbf{E}^l(z) = j \eta / k_0 \left[ \int_{z_1}^{z_2} \mathbf{I}_z(z') (k_0^2 - \frac{\partial^2}{\partial z'^2}) K_2(z, z') dz' + \int_{z_1}^{z_2} \{ \mathbf{I}_u(z') k_0^2 + \frac{\partial}{\partial z'} \mathbf{I}_u(z') \frac{\partial}{\partial z} \} K_1(z, z') dz' \right] + \mathbf{E}_{e_1}^{s1}(z) + \mathbf{E}_{e_2}^{s1}(z) \quad (8)$$

$$K_1(z, z') = \exp[-jk_0 \{ (z-z')^2 + r'(z')^2 \}^{1/2}] / [(z-z')^2 + r'(z')^2] \quad (9)$$

상기식에서  $\mathbf{I}_u(z')$ ,  $\mathbf{I}_z(z')$ 는 #1, #2의 표면을 통과하는 총전류이며,  $K_1(z, z')$ ,  $K_2(z, z')$ 는 S.P.가 각각 #1, #2 표면에 위치하는 경우의 그린함수이다.  $\mathbf{E}^l(z)$ 는 중심 Z축상에서의 입력 전계이다.

그림2에서  $\mathbf{E}_{e_1}^{s1}(z)$ ,  $\mathbf{E}_{e_2}^{s1}(z)$ 를 준정적근사법을 이용하여 구해보면 다음과 같이 구할 수 있다. 우선 그림2.에서 e2면만을 고려해보면, 끝단면내에 존재하는 전하를 Q라하고 끝단면에서의 전하분포가 균일하고 끝단면 내 중점전류치는 영인 전류도  $J_r$ 성분만 존재한다고 보면 전류연속 방정식에 의거  $J_r$ 는 전하량 Q의 방정식으로 나타낼 수 있다.<sup>(8)</sup>

$$J_r(r') = -j\omega Q \cdot r' / (2\pi a^2) \quad (10)$$

그런데 끝단면의 가장 자리에서 또한 전류연속성이 만족 되어야 하므로 잊식은

$$J_r(r') = I_t(z_0) r' / (2\pi a^2) \quad (11)$$

로 나타낸다.

끝단면 e2만을 고려하면 그림3.과 같다. 이때

O.P.에서의 전계 분포를 살펴 보기위해서 벡터포텐셜항으로 나타낸 식(8)을 인용하고 그림3.에서와 같이 원편환내에 전계전류 (Electric Current)  $\mathbf{J}_r$ 성분만 존재하므로 전계 벡터포텐셜  $F=0$ 가 된다. 이때  $\mathbf{J}_r$ 에 의한 산란전계는 다음과 같다.

$$\mathbf{E}_{e_2}^{s1} = \mu_0 / \omega \epsilon_0 (\Delta \Delta \cdot \mathbf{A} + k_0^2 \mathbf{A})$$

$$\mathbf{A} = \int_0^a \int_0^{2\pi} [\mathbf{J}_r \exp(-jk_0 |R-R'|)] / 4\pi |R-R'| r' d\phi' dr' \quad (12)$$

$$|R-R'| = [r^2 + r'^2 + (z-z')^2 - 2rr' \cos \phi']^{1/2} \quad (13)$$

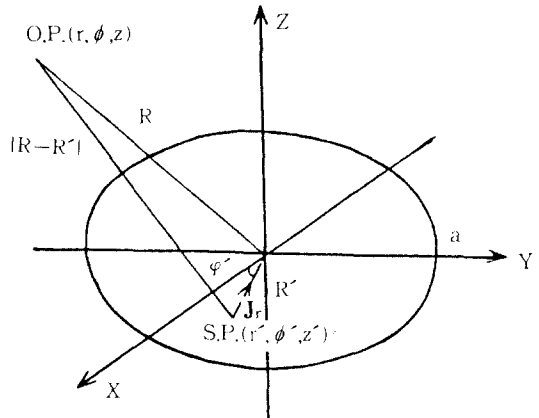


그림 3. 평탄한 단면 원통의 좌표상의 위치  
Fig. 3. Coordinate location of flat source

여기서  $|R-R'|$ 는 S.P.와 O.P.간의 거리,  $\phi'$ 는 그림3.의 O.P.의  $|\phi - \phi'|$  값이다. 그런데 (12)식의 좌변에 적분항으로 표시된 자계 벡터 포텐셜은  $\phi'$ 에 대해 대칭적인 관계가 있으므로 O.P.를 xz평면에 고정 시켰을 때의 관계는 그림4.와 같다.

O.P.가 위치하는 xz평면으로 대칭을 이루는 S.P.1 과 S.P.2 의 전류밀도성분  $\mathbf{J}_r$ 의 경우 xz에 투영되는 벡터 성분은 크기가 같고 서로 반대 방향을 갖는 전류밀도에 의해 O.P.에서 관측되는

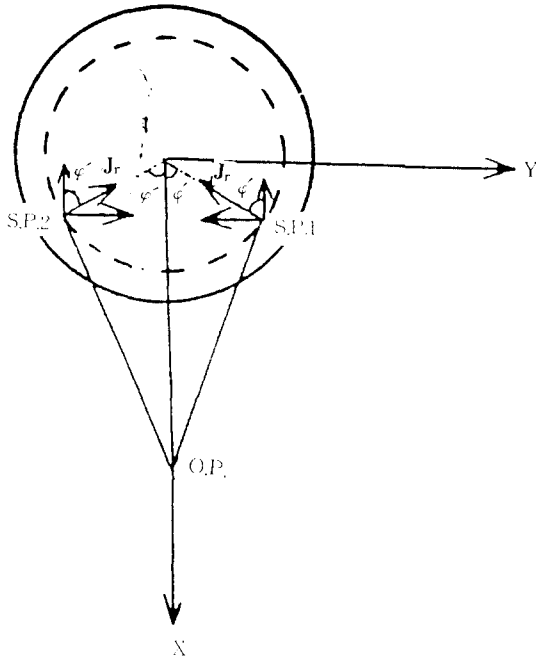


그림 4. 관측점과 원천점수의 벡터관계  
Fig. 4. Polarization relation between observation point and source point.

벡터 포텐셜은 서로 상쇄되고 투영 방향과 직각을 이루는 성분은 의해서만 포텐셜이 유지된다.

이러한 결과로 인해 자기벡터 포텐셜은 r 벡터 성분만 존재함을 알수 있고 대칭관계에 있으므로 자기벡터 포텐셜은 다음과 같이 나타낸다.

(12)식 좌변의 자기벡터 포텐셜형은

$$\mathbf{A}_r(r,z) = \mu_0 / 2\pi \int_0^a \int_0^{2\pi} \cos \phi' \mathbf{J}_r(r', \phi') \exp(-jk_0 |R-R'|) / |R-R'| r' d\phi' dr' \quad (14)$$

(11)식을 (14)식에 대입하여 정리 하면

$$\mathbf{A}_r(r,z) = \mu_0 / (4\pi^2 a^2) \mathbf{I}_t(z_0) \int_0^a \int_0^{2\pi} \cos \phi' \exp(-jk_0 |R-R'|) / |R-R'| r' d\phi' dr' \quad (15)$$

(15)식을 (12)식에 대입하여 정리 하면

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{z2}^{SI}(r,z) &= 1 / j\omega\epsilon_0 \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ 1/r \frac{\partial}{\partial z} (r \mathbf{A}_z(r,z)) \right\} \right. \\ &+ \left. j \frac{\partial}{\partial r} \left( 1/r \frac{\partial}{\partial r} (r \mathbf{A}_r(r,z)) \right) + k_0^2 \mathbf{A}_r(r,z) \right] \\ &= \mathbf{E}_z + \mathbf{E}_r \end{aligned} \quad (16)$$

단면에 존재하는  $\mathbf{J}_r$ 에 의해 유지되는 전계 성분은 상기식을 통해 z, r 성분만 갖는다는 것을 알수 있다. (15), (16)식으로 부터 Z축에 위치하는 O.P.의 전계 성분은 단면의 원천인  $\mathbf{J}_r$ 의 대칭성으로 인해  $\mathbf{E}_r$  성분이 존재하지 않으며  $\mathbf{E}_z$  성분만 존재함을 알수 있다.  $\mathbf{E}_z$  성분의 경우 (16)식으로 부터 구할수 있는데  $r \rightarrow 0$ 이므로 (16)식은 특이점을 갖게 된다.

그러나  $|R-R'| = [(z-z')^2 + r'^2]^{1/2}$ 을 대입한 자기 벡터 포텐셜항  $\mathbf{A}_r(0, z) = 0$ 가 된다. 그러므로 (16)식 좌변 첫번째 적분항으로부터 L'Hospital 법칙을 적용하면

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{z2}^{SI}(0, z) &= 2 / (j\omega\epsilon_0) \frac{\partial^2}{\partial r^2} \mathbf{A}_r(r,z)_{r=0} \\ &= -\mathbf{I}_t(z_0) / (j2\pi\epsilon_0) \left[ \exp(-jk_0 |R-R'|) / |R-R'| \right]_{r=0} + \mathbf{I}_t(z_0) / (j\pi\epsilon_0 a^2) (z_0 - z) \\ &\quad \left[ \exp(-jk_0 |R-R'|) / |R-R'| \right]_{r=0} \end{aligned} \quad (17)$$

그러나 그림2.에서 단면을 두개를 가지고 있으므로 상기식에서 하단부의 경우 (17)식의  $z_0 = 0$ 으로하면 밑단에서의 전계가 되며  $z_0 = z_1$ ,  $a = b$ 을 대입하면 윗단에서의 전계값을 얻을 수 있다. 이러한 관계식을 그림2.에서와 같이 끝단면을 갖는 회전체 및 양끝이 뾰족한 회전체에 의한 최종적 방정식 (8)에 대입하고 (8)식 우변의 두번째 적분식을 부분 적분을 수행하여 정리하면

$$\begin{aligned} -j4\eta k / \eta \mathbf{E}^I(z) &= \int_{z_0}^{z_1} \mathbf{I}_u(z') \left[ k_0^2 - \frac{\partial^2}{\partial z \partial z'} \right] K_2(z, z') dz' \\ &+ \int_0^{z_0} \mathbf{I}_u(z') \left[ k_0^2 - \frac{\partial^2}{\partial z \partial z'} \right] K_1(z, z') dz' \\ &- 2\mathbf{I}_u(z_0) \frac{\partial}{\partial z} K_1(z, z_0) + 2\mathbf{I}_u(z_1) \frac{\partial}{\partial z} K_1(z, z_1) \\ &- 4/a^2 \mathbf{I}_u(z_0)(z-z_0) \left[ K_1(z, z_0) \right]_{r=0} - K_1(z, z_0) \end{aligned}$$

$$+4/b^2 \mathbf{I}_0(z_1) (z-z_1) [K_1(z, z_1)_{r \rightarrow 0} - K_1(z, z_1)_{r \rightarrow b}] \quad (18)$$

가 된다.

### III. 결과치

평면파가 외부로부터 입사시 안테나 z축상에 유기되는 전계값은 다음과 같다.

$$E'(z) = E_0 \sin \theta \exp[-jk_0 z \cos \theta] \quad (19)$$

여기서  $\theta$ 는 평면파 파수의 방향과 z축이 이루는 각도,  $E_0$ 는 전계의 복소 증폭률이다.

그림5에서 #1의 경우, 갯 크기  $h_1 \rightarrow L_1/2$ 일때 타원체가 되며,  $h_1 \rightarrow 0.0$  일때 원통형이 된다. 우선 #1만을 고려할 경우는 (18)식의 우변 첫번째 적분식을 이용하여 해석하게 되는데 외부로부터 평면파가 입사되고  $a_1 = 0.072449$ ,  $k_0 L_1 / 2 = 1.2$

12~3.232까지 변화시키는 경우 중점에서의 전류치는 Taylor의 결과치와 비교한 결과 잘 일치하였다.<sup>(13)</sup>

비교적 반경이 좁고  $h_1 \rightarrow 0.0$ 으로 하여 원통주로 근사화 시킬때 끝단면 영향을 고려치 않은 수식을 적용하여 구한 전류치와 끝단면 영향을 고려한 수식을 적용하여 구한 전류치를 비교해 보면 표1과 같다.

단, 표1의 결과는  $k_0 L_1 / 2.0 = 1.586$ , 반경  $a_1 = 0.1 L_1$ , 갯 크기인  $h_1 = 0.001 L_1$ 으로 작게하여 원통주로 근사화 시켰을 때 결과치이다. 입사각도  $\theta$ 를  $\pi/2$ 로 하였으며 전류분포는 대칭적으로 분포하기 때문에 절반의 전류분포만 나타내고 있다. 표에서와 같이 끝단면 영향을 무시한 수식을 사용할 경우, 단 인접부는  $0.0 < z/L_1 < 0.16$ 에서 전류값이 증가하는데 이는 끝단면 영향 관계를 고려치 않으므로 오차는 오차라고 볼 수 있다.

그림 5에서와 같이 3개의 소자로 구성된 끝단면에 갯을 갖는 원통주에 평면파가  $\theta$ 의 각도로 입사하는 경우  $k_0 L_2 / 2.0 = 1.586$ ,  $a_3 / L_2 = a_1 / L_1$

표 1. 끝단면 영향을 고려한 원통주의 결과치와 고려치 않은 원통주의 결과치 비교

Table 1. Comparison of formulation result with and without end effect

Z / L <sub>1</sub>	FORMULATION RESULT WITH END EFFECT		FORMULATION RESULT WITHOUT END EFFECT	
	REAL	IMAGINARY	REAL	IMAGINARY
.00000	.147E-02	-.194E-03	.000E+00	.000E+00
.04000	.463E-02	-.198E-02	.132E+01	-.643E-02
.08000	.658E-02	-.333E-02	.150E+01	-.755E-02
.12000	.811E-02	-.460E-02	.115E+01	-.615E-02
.16000	.962E-02	-.592E-02	.889E+02	-.539E-02
.20000	.111E-01	-.723E-02	.113E+01	-.674E-02
.24000	.124E-01	-.848E-02	.141E+01	-.826E-02
.28000	.135E-01	-.962E-02	.158E+01	-.926E-02
.32000	.145E-01	-.106E-01	.163E+01	-.968E-02
.36000	.153E-01	-.115E-01	.162E+01	-.979E-02
.40000	.160E-01	-.121E-01	.161E+01	-.987E-02
.44000	.164E-01	-.126E-01	.163E+01	-.101E-01
.48000	.166E-01	-.128E-01	.168E+01	-.104E-01
.50000	.166E-01	-.128E-01	.172E+01	-.106E-01

$=0.06$ ,  $h_3/L_2=h_1/L_2=0.2$ ,  $L_3/L_2=L_1/L_2=0.5$ ,  $g_1=g_2=0.1L_2$ ,  $a_2=0.12L_2$ 로 하였을때 각도에 따른 전류분포를 그림6.에 나타내고 있다.

그림에서와 같이  $\theta=\pi/18$ 일 경우 유기되는 전류치는 매우 작고 입사각도에 따라 위상이 변하는 것을 알수 있다.

입사각도가  $\pi/2$ 일때 #2의 중점에서 최대 전류치 20.5-j12.4 mA가 유도되고 있다.

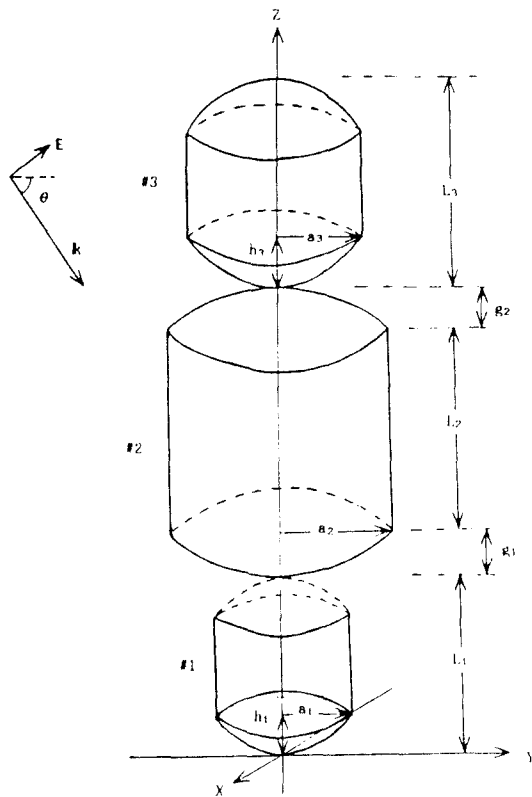


그림 5. 3개의 요소로 구성된 끝단면에 갠을 갖는 원통주  
Fig. 5. 3 element cylinders with end cap

#### IV. 결 론

평탄한 단면을 갖는 일반적인 형태의 회진체에 대해 특이점이 없는 1차원 순수 방정식을 유도하였으며 여기서 끝단면이 필요한 회진체인 경우에는

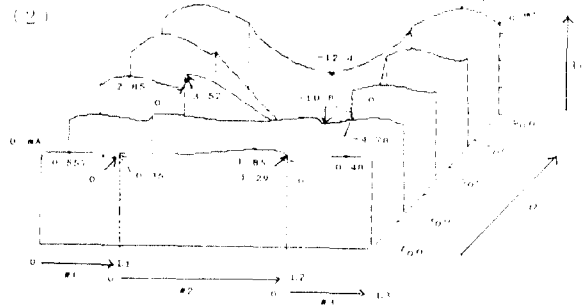
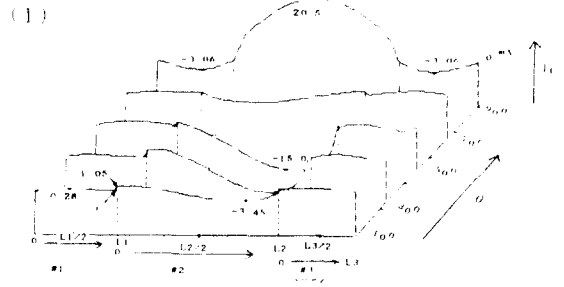


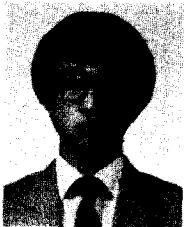
그림 6. 일반적 입사각 입사각도에 따른 원통주의 전류분포  
(1) 실수부 (2) 허수부  
Fig. 6. Current distribution of cylinders impressed with plane wave (1) real, (2) imaginary

Pocklington 형태, 끝단면이 평탄한 경우 준정적 근사법을 이용하여 해석하였다. 수치해석시 기저 함수로 Cubic B spline함수를 사용하여 적은 분할 요소로도 정확한 해를 얻을 수 있었다. 끝단면의 영향관계를 고려하므로써 비교적 적은 원통주 해석이 가능하고 또한 이와같은 방법의 해 임의의 형태를 갖는 산란체에 대해서도 해석이 가능하다.

#### 참 고 문 헌

1. L.L. Tsai, "A Comparison of Geometric Theory of Diffraction and Integral Equation Formulation for Analysis of Reflector Antennas", IEEE Trans, Antennas and Propagation, Vol. AP 20, No.6, 1972.
2. R.King, "The Theory of Linear Antennas, Cambridge", Mass, Harvard Univ. Press, 1956.

3. J.H. Richmond, "Digital Solution of the Rigorous Equation for Scattering Problems", IEEE Press, Vol. 53, 1965.
4. R.H. Kyle, "Mutual Coupling between Log-Periodic Dipole Antennas", Ph.D. Dissertation, Syracuse Univ., Syracuse, New York, 1968.
5. K.K.Mei, "On the Integral Equations of Thin Wire Antennas", IEEE Trans. Antennas and Propagation, Vol. AP 13, 1965.
6. L.L.Tsai, "A Numerical Solution for the Near and Far Fields of an Annular Ring of Magnetic Current", IEEE Trans. Antennas and Propagation, Vol.AP 20, No.5, 1972.
7. R.E. Collin, "Equivalent Line Current for Cylindrical Dipole Antennas and its Asymptotic Behavior", IEEE Vol.AP 32, No.2, 1984.
8. C.D. Taylor and Wilton, "The Extended Boundary Solution of the Dipole Antenna of Revolution", IEEE Trans., Antennas and Propagation, Vol. AP-31, No. 6, 1972.
9. Genta Sato, et al., "Theoretical Analysis and Some Experiments on Vierergruppe antenna", IEEE Trans. Antennas and Propagation, Vol. AP 31, No.3, 1983.
10. B.D. Popovic, et al., "Analysis and Synthesis of Wire Antennas", Reserch Studies Press, pp.79-90, 1982.
11. P.M. Prenter, "Splines and Variational Methods", John Wiley & Sons Inc., pp.78-83, 1975.
12. D.S. Jones, "The Theory of Eletromagnetism", New York Pergamon Press, pp.55, 1964.
13. 윤재훈, "화상경제조건을 이용한 회절체모양 안테나의 전류분포특성", 중앙대학교 대학원 석사학위논문, pp. 25, 1985.



李康浩(Kang Ho LEE) 正會員  
 1953年3月18日生  
 1976年2月: 東亞大學校 電子工學科 卒業  
 1978年2月: 東亞大學校 大學院 電子工學院 卒業(工學碩士)  
 1985年2月~現在: 中央大學校 大學院 電子工學科 博士過程  
 1982年3月~現在: 大石工業專門大學 電子通信科 助教授



金正祺(Jung Ki KIM) 正會員  
 1942年5月5日生  
 1965年2月: 延世大學校電氣工學科卒業  
 1969年2月: 延世大學校大學院電氣工學科(工學碩士)  
 1975年2月: 延世大學校大學院電氣工學科(工學博士)  
 1970年3月~1977年2月: 光云工科大学 副教授  
 1977年3月~現在: 中央大學校電子工學科 教授  
 1982年12月~1983年12月: 美國인大學校 客員教授